

Niels Henrik Abels matematikkonkurranse

Andre runde 2025–2026 – Løsninger



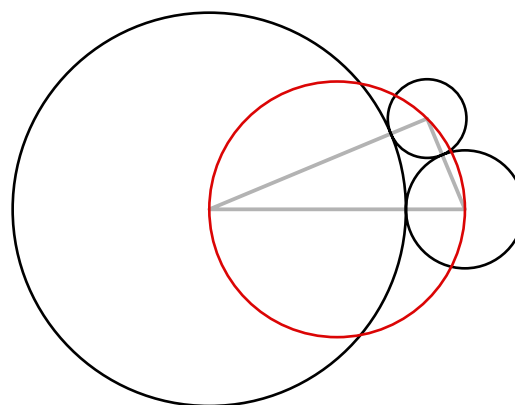
8. januar 2026

Oppgave 1. I utgangspunktet var det fire ganger så mange gutter som jenter, så det totale antallet – la oss kalle det N – var fem ganger antall jenter. Derfor må N være et multiplum av 5. Etterpå var det fem ganger så mange gutter som jenter, og samme resonnement sier at N er et multiplum av 6. Dermed må N være et multiplum av 30, og vi ser at $N = 30$ passer: I utgangspunktet var det seks jenter og 24 gutter, mens etterpå var det fem jenter og 25 gutter.

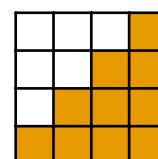
Alternativ løsning: La oss si at det var J jenter og G gutter opprinnelig. Da er $G = 4J$. Etterpå var det $J - 1$ jenter og $G + 1$ gutter, og $G + 1 = 5(J - 1)$. Samlet gir det $4J + 1 = 5(J - 1)$, som gir $J = 6$ og dermed $G = 24$ **30**

Oppgave 2. Vi benytter primtallsfaktoriseringen $2025 = 3^4 \cdot 5^2$. Hvis n går opp i 2025, må $n = 3^i \cdot 5^j$ med $0 \leq i \leq 4$ (fem muligheter) og $0 \leq j \leq 2$ (tre muligheter), i alt $5 \cdot 3$ muligheter. **15**

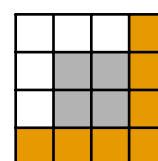
Oppgave 3. Parvis avstand mellom de tre sirkelsentrene er $20 + 30 = 50$, $20 + 100 = 120$ og $30 + 100 = 130$. Fordi $(5, 12, 13)$ er et pytagoreisk trippel ($5^2 + 12^2 = 25 + 144 = 169 = 13^2$), er sirkelsentrene hjørner i en rettvinklet trekant. Sirkelen som går gjennom de tre hjørnene må da ha sentrum på hypotenusen, så hypotenusen (lengde 130) er diameter i sirkelen. Radien er halvparten så stor. **65**



Oppgave 4. Hvis vi bytter om på rekkefølgen av radene, endres ikke antall fargelagte ruter i noen kolonne, så brettet er fremdeles korrekt fargelagt. Tilsvarende skjer om vi bytter om på kolonnene. Så om vi sorterer radene (ovenfra og ned) etter antall fargelagte ruter og deretter kolonnene (fra venstre mot høyre) likedan, ender vi opp med mønsteret i figuren. Det er $4! = 24$ mulige ordninger av radene og like mange for kolonnene, i alt $24 \cdot 24$ mulige fargelegginger.



Men: Det er kanskje ikke *helt* opplagt at brettet må fargelegges som over, når rader og kolonner er sortert som beskrevet. Det som *er* opplagt, er at siste rad og siste kolonne må være helt fylt, som i figuren. Og siden første rad og første kolonne bare har én fargelagt rute hver, må de første tre rutene i hver av dem være blanke. Nå gjenstår det bare å se hvordan de fire midterste rutene må

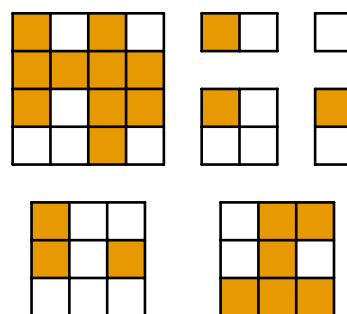




fargelegges. Men siden rad 3 og kolonne 3 skal ha tre fargelagte ruter hver, må vi fargelegge de to nederste rutene og de to til høyre i de midterste 2×2 rutene. Og da er det klart at den øverste venstre av de fire rutene må være blank.

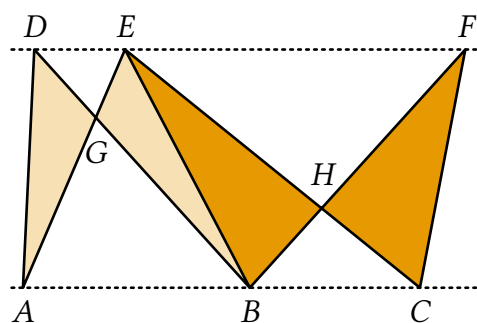
Alternativ løsning: Som i løsningen over, ser vi at vi kan velge fritt hvilke kolonner og hvilke rader skal ha henholdsvis 1, 2, 3 og 4 fargelagte ruter: Bare start med fargeleggingen i den første figuren over, og bytt om på rader og kolonner.

Vi må vise at det bare finnes én fargelegging når vi har spesifisert hvor mange farger hver rad og hver kolonne skal ha. Åpenbart må vi fargelegge alle rutene i den raden og den kolonnen som skal ha fire fargelagte ruter! Så la oss ta vekk den raden og kolonnen, og skyv sammen til et 3×3 -brett. Hvis vi nå bytter om på fargelagte og ikke fargelagte ruter i dette mindre brettet, skal vi igjen ha en rad med én fargelagt rute, en med to, og en med tre fargelagte ruter, og tilsvarende for kolonnene. Nå kan vi gjenta argumentet: Reduser til et 2×2 -brett og så til et 1×1 -brett, og noter at vi hele veien ikke har noen flere valg. 576



Oppgave 5. For $1 \leq n \leq 9999$ kan vi skrive $n = 100x + y$, med $0 \leq x \leq 99$ og $0 \leq y \leq 99$. Da blir $f(n) = f(100x + y) = x + y$. Merk at $n - f(n) = 99x$, og dermed er også $n - f(f(n)) = (n - f(n)) + (f(n) - f(f(n)))$ et multiplum av 99. Om $f(f(n)) = 99$, må derfor n selv være et multiplum av 99. Sett $n = 99(k + 1)$ med $0 \leq k \leq 100$: Dersom $k < 100$ kan vi skrive det som $n = 100k + (99 - k)$ og derfor $f(n) = k + (99 - k) = 99$, og $f(f(n)) = f(99) = 99$. For $k = 100$ har vi $f(9999) = 99 + 99 = 198$ og $f(f(9999)) = f(198) = 1 + 98 = 99$. Og flere muligheter er det da ikke. 101

Oppgave 6. Trekk en ekstra hjelpelinje BE i figuren. De to trekantene ABD og ABE har samme grunnlinje AB og lik høyde, så de har samme areal. Trekk fra snittet av de to (trekanten ABG), og konkluder at trekantene ADG og BEG har samme areal, altså 196. På samme måte har de to trekantene BEH og CFH samme areal, la oss si a . Men siden fir-kanten $BHEG$ har areal 539, er $a = 539 - 196 = 343$ 343





Oppgave 7. La oss for korthets skyld skrive $g^0(k) = k$, $g^1(k) = g(k)$, $g^2(k) = g(g(k))$ og så videre, altså $g^{i+1}(k) = g(g^i(k))$. Om vi velger en vilkårlig $k \in D$ så kan ikke alle de åtte verdiene $k, g(k), g^2(k), \dots, g^7(k)$ være forskjellige. La oss si at $g^i(k) = g^j(k)$ der $0 \leq i < j \leq 7$. Dersom det skjer for mer enn én $j > i$, velger vi den minste av dem. Med $n = g^i(k)$ og $m = j - i$, er altså $g^m(n) = n$, mens $g^l(n) \neq n$ for $0 < l < m$. Siden $g^7(n) = n$, må m gå opp i 7, og fordi 7 er et primtall, må enten $m = 1$ eller $m = 7$. Dersom $m = 7$, så er $\{n, g(n), \dots, g^6(n)\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$, og g er en *syklisk permutasjon*. Det finnes $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$ sykliske permutasjoner: Først har du seks valg for $g(1)$ (alt unntatt 1), deretter fem valg for $g^2(1)$ (alt unntatt 1 og $g(1)$), fire valg for $g^3(1)$, og så videre. Dersom g ikke er syklisk, må vi ha $g(i) = i$ for alle i . I alt har vi altså 720 sykliske permutasjoner pluss identitetspermutasjonen, i alt 721 mulige. 721

Oppgave 8. Skriv $P(x) = (x+1)Q(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \dots + c_{2026}x^{2026}$. Siden $P(1) = 2Q(1)$, er også $P(1) = c_0 + c_1 + \dots + c_{2026}$ størst mulig gitt betingelsene. Betingelsene er nå simpelthen $c_k \leq 2026$, sammen med ligningen $P(-1) = 0$. For dersom $P(-1) = 0$, kan vi dividere $P(x)$ med $x + 1$, så $P(x)$ har formen $(x+1)Q(x)$. Nå kan vi i grunnen glemme alt snakk om polynomer og bare si at $s = c_0 + c_1 + \dots + c_{2026}$ er størst mulig, forutsatt at $c_k \leq 2026$ for alle k og

$$c_0 - c_1 + c_2 - \dots + c_{2026} = 0 \quad (*)$$

(som bare er betingelsen $P(-1) = 0$). Men nå legger vi merke til at om $(*)$ holder, er også $s = 2(c_0 + c_2 + \dots + c_{2026}) = 2(c_1 + c_3 + \dots + c_{2025})$. (Bare ta definisjonen av s og legg til eller trekk fra venstresiden av $(*)$.) Den sistnevnte summen har bare 1013 ledd, så $s \leq 2 \cdot 1013 \cdot 2026$. Og den summen kan vi få til, bare ved å sette $c_k = 2026$ først for alle odde k og likeså for 1013 forskjellige partall k (vi har 1014 å ta av), og $c_k = 0$ for ett partall k . For dette valget får vi så $Q(1) = P(1)/2 = s/2 = 1013 \cdot 2026$. Resten når vi deler med 1000 blir $13 \cdot 26$ 338



Oppgave 9. Vi ser først etter rettvinklede trekanter der en av katetene har lengde 2025. Pytagoras gir $a^2 + 2025^2 = c^2$, så $2025^2 = c^2 - a^2 = (c-a)(c+a)$. Da må faktorene $c \pm a$ begge være odde, og ethvert par av forskjellige oddetall kan skrives som $c - a$ og $c + a$ med heltall a og c . Så antall trekanter er antall måter å faktorisere 2025^2 i to forskjellige faktorer på. Nå er $2025 = 45^2 = 3^4 \cdot 5^2$, så $2025^2 = 3^8 \cdot 5^4$, og det tallet har $9 \cdot 5 = 45$ forskjellige faktorer, og dermed 45 måter å faktorisere tallet på i to faktorer, om vi tar hensyn til rekkefølgen. En av dem (2025) gir like faktorer, så vi står igjen med 44 faktoriseringer. Når vi så ser bort fra faktorenes orden, står vi bare igjen med halvparten, altså 22 trekanter.

Så ser vi etter trekanter med hypotenus 2025, altså $a^2 + b^2 = 2025^2 = 3^8 \cdot 5^4$, med a og b positive heltall. Skriv nå $a = 3i + j$ med heltall i og $j = 0, j = 1$ eller $j = 2$, så er $a^2 = 9i^2 + 6ij + j^2 = 3(3i^2 + 2ij) + j^2$. Fordi $j^2 = 0, j^2 = 1$ eller $j^2 = 3 + 1$, kan vi skrive $a^2 = 3k + l$ der $l = 0$ eller $l = 1$. På samme måte er $b^2 = 3m + n$ der $n = 0$ eller $n = 1$. Men så er $a^2 + b^2 = 3(k + m) + (l + n)$, og fordi $a^2 + b^2$ er et multiplum av 3, har vi ikke andre muligheter enn $l = n = 0$, slik at a og b begge er multiplum av 3. (Merknad: Dersom du kjenner til modularegning, kan dette resonnementet skrives noe kortere.) Dette koker ned til at dersom $a^2 + b^2 = c^2$ der a, b og c er heltall, og c er et multiplum av 3, så er også a og b multiplum av 3, så vi kan skrive $(a/3)^2 + (b/3)^2 = (c/3)^2$, med $a/3, b/3$ og $c/3$ heltall. Dette kan vi så gjenta: Dersom $c/3^q$ er et heltall (der q er heltall), er også $a/3^q$ og $b/3^q$ heltall og $(a/3^q)^2 + (b/3^q)^2 = (c/3^q)^2$. Anvendt på $c = 2025^2 = 3^8 \cdot 5^4$, betyr dette at vi skal ha $a = 3^8 \bar{a}$ og $b = 3^8 \bar{b}$ med heltall $\bar{a}$ og $\bar{b}$, og $\bar{a}^2 + \bar{b}^2 = 5^4 = 25^2$. Igjen, fordi $25^2 = 625 = 3 \cdot 208 + 1$, må enten $\bar{a}$ eller $\bar{b}$ være et multiplum av 3, mens den andre ikke er det. Bytter vi om $\bar{a}$ og $\bar{b}$, får vi en kongruent trekant, så vi trenger bare telle opp de hvor $\bar{b}$ er et multiplum av 3. Skriv nå $\bar{b}^2 = (25 - \bar{a})(25 + \bar{a})$. Fordi $(25 - \bar{a}) + (25 + \bar{a}) = 50$ ikke er et multiplum av 3, kan ikke begge faktorene $25 \pm \bar{a}$ være multiplum av 3, så en av dem må være et multiplum av 9. Det begrenser hvilke verdier for $\bar{a}$ vi må undersøke:

$\bar{a}$	$25 - \bar{a}$	$25 + \bar{a}$	$\bar{b}^2$
2	23	27	$3^4 \cdot 23$
7	18	32	$2^6 \cdot 3^2 = 24^2$
11	14	36	$2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$
16	9	41	$3^2 \cdot 41$
20	5	45	$3^2 \cdot 5^2 = 15^2$

Primtallsfaktoriseringen av $\bar{b}^2$ viser tydelig at bare to av dem er kvadrattall. Det er altså bare to ikke kongruente rettvinklede trekanter med heltallige sider og hypotenus 2025. 24



Oppgave 10. La X og Y være fotpunktene til normalene fra P på sidene AB og BC , og la $x = PX$ og $y = PY$, mens s er sidekanten på kvadratet. Pytagoras gir oss

$$x^2 + (s - y)^2 = 289,$$

$$x^2 + y^2 = 121,$$

$$(s - x)^2 + y^2 = 25.$$

Om vi ekspanderer første og tredje ligning, trekker fra den midterste, og flytter litt rundt på leddene får vi henholdsvis $2ys = s^2 - 168$ og $2xs = s^2 + 96$. Nå ganger vi midterste ligning med $4s^2$, bytter om sidene, og regner videre:

$$484s^2 = (2xs)^2 + (2ys)^2 = (s^2 + 96)^2 + (s^2 - 168)^2,$$

$$2s^4 - 628s^2 + 96^2 + 168^2 = 0,$$

$$(s^2 - 157)^2 = 157^2 - \frac{96^2 + 168^2}{2} = 5929 = 77^2,$$

så $s^2 = 157 \pm 77 = 80$ eller 234 . Men linjestykket $AP = 17$ får ikke plass i et kvadrat med sidekant $\sqrt{80}$, så vi må velge den andre muligheten. **234**

