Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Skriftserie

Konferanserapport

No. 5 - 2008

"TALL OG TALLFORSTÅELSE - fra telleremser til algebra"

Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU
26. og 27. november 2007

Forside: Fra ressurspersonenes presentasjoner

Redigert av Merete Lysberg

Trykk: NTNU-Trykk
ISSN: 1503-5336
ISBN: 82-471-6055-2

Programkomitéen 2007

Bengt Johansson, Sverige

Carl Winsløw, Danmark

Lisen Häggblom, Finland

Ingvill M. Stedøy-Johansen, Norge

Forord

“Tall og tallforståelse – fra telleremser til algebra” viste seg å være et veldig populært tema. Novemberkonferansen 2007 slo alle rekorder når det gjaldt interesse. Da fristen for påmelding gikk ut, måtte vi lukke alle muligheter for etteranmelding. Med et nødskrik fikk vi plassert alle deltakerne på hoteller, og overtalt kantineansvarlig i Realfagbygget til å servere lunsjer til så mange. Vi måtte bytte lokaler for å romme alle, og verkstedene kunne ikke bli så deltakerorientert som vi ønsket. Men det gikk strålende allikevel. Det var bare blide mennesker å se, og alle var glade over å få være med.

Det ble løftet fram som veldig positivt at vi hadde valgt et fagtema som rød tråd gjennom hele konferansen, og at alle forelesninger, verksteder og utstillinger dreide seg om det samme tema. Denne gangen hadde vi avsatt to timer på begynnelsen av dag 2 til at ressurspersonene for Matematikksenteret kunne vise aktiviteter, utstyr og undervisningsopplegg som de hadde utviklet, brukt i klassene sine, og formidlet på etterutdanningskurs. Dette ble en suksess som vi vil gjenta på senere konferanser.

Tradisjonen tro startet vi med et ”oppvarmingstilbud” på søndag. Gerd Bones med hjelpere arrangerte matematikk og teknologi på Festningen, med tittel ”Se! Den kan fly! Matematikk og teknologi i det fri”. May Settemsdal og Ingvill Stedøy-Johansen med hjelpere hadde laget en historisk-matematisk byvandring med innlagte oppgaver (Matematikkorienterting).

I denne konferanserapporten finner dere søndagsaktivitetene, artikler fra bidragene under konferansen, taffelmatematikken (oppgaver under festmiddagen) og det som ble delt ut på stand fra noen av ressurspersonene. Jeg benytter anledningen til å takke alle bidragsyterne for en fantastisk jobb. Takk også til alle deltakerne som var ivrige og engasjerte under hele konferansen, og ga bidragsyterne en positiv opplevelse av å nå fram til publikum.

Velkommen tilbake til Novemberkonferansen 2008. Da er tema ”Geometri – eksperimentering og utforsking”.

Ingvill Merete Stedøy-Johansen

Faglig leder

Innholdsfortegnelse

Plenum 1, mandag kl 09.30 – 10.30

Alistair McIntosh is retired but holds honorary positions at Edith Cowan University and the University of Tasmania. For over forty years he has worked with teachers and researched into children's thinking and misconceptions in mathematics and the development of number sense, as Principal Mathematics Adviser in Leicestershire, and later in universities in Australia. He has been a visiting scholar at universities in Norway, Sweden, Canada, the United States, England, Australia, New Zealand and Malaysia. He was a member of the Cockcroft Committee of Inquiry into the Teaching of Mathematics in the U.K., was academic adviser to the writers of the Australian National Numeracy Testing Programme, and was the 2004 recipient of the Australian Minister of Education's Award for Outstanding Services to Numeracy. He is the author of numerous curriculum and research papers and books.

Difficulties and Misconceptions with Numbers and Numbersense

I want to start by reading a passage from John Holt's magnificent book 'How Children Fail', which has stayed with me and influenced me since first I read it in the 1960s.

> *Soon after I arrived the class began. The children had done some multiplication problems and, in turn, were reading answers from their marked papers. All went smoothly until, right after a child had read his answer, another child raised his hand. 'What is it, Jimmy?' the teacher asked, with just the faintest hint in her voice that this interruption could not be really necessary. 'Well, I didn't get that answer', said Jimmy, 'I got...' but before he could say any more, the teacher said 'Now, Jimmy, I'm sure we don't want to hear any wrong answers.' And that was the last word out of Jimmy.*
>
> *This woman is far ahead of most teachers in intelligence, education and experience. She is articulate, cultivated, has had a good schooling, and is married to a professor. And in the twenty years or more that she has been teaching it has apparently never occurred to her that it might be worth taking a moment now and then to hear these unsuccessful Jimmies talk about their wrong answers, on the chance that from their talk she might learn something about their thinking and what was making the answers come out wrong.*
>
> *What makes everyone call her such a good teacher? I suppose it is the ability to manage children effortlessly, which she does. And for all I know, even the Jimmies may think she is a good teacher; it would never occur to them that it was this nice lady's fault that they couldn't understand arithmetic; no, it must be their own fault, for being so stupid.*
>
> (Holt, J. (1964). *How children fail*. New York: Delacorte Press.)

'Now, Jimmy, I'm sure we don't want to hear any wrong answers.' This demoralising reply, given by a primary school teacher to a child half way through an incorrect answer to a mathematical question the teacher had posed, neatly summarises much of what was wrong with the traditional approach to teaching which I and many others thought was the only way to teach in the 50s and 60s - and which seems to me still to be in danger of erupting back into our classrooms.

The teacher teaches, the children listen and try to answer the teacher's (usually low level) questions with the desired (usually brief) answer.

If only things were different today! But evidence from the TIMMS 1999 video study suggests that things haven't changed much. The TIMMS 1999 Video Study was a project of gigantic proportions and presumably correspondingly gigantic cost, involving as it did, for mathematics alone, the videoing of 638 eighth-grade lessons collected from seven participating countries. These videos and data represent fairly normal current practice in these countries, according to the teachers and others involved in the study. Two of the findings of the Analysis Report are as follows:

(1) Most lessons did not contain even one example of more than one solution being presented to a problem, or even one example of students having a choice of solution methods, and there were very few lessons indeed in which students presented and examined different solution methods.

(2) Regarding the opportunities for teachers and students to talk: the researchers counted all the words spoken by teachers and students in each lesson and found that, on average, teachers in every country spoke at least 8 words to every one word spoken by students. Moreover, over 70% of all teacher utterances in each country contained over five words while at least 66% of student utterances in each country was of four words or less.

It all seems like one-way-traffic, from the teacher to the child. But teaching is a *two-way* process, both teacher and student needing to learn and reorient their thinking as a result of the other's words and actions. Teachers need to be learners too, since we must learn from our students what we need to do to encourage and move forward their learning.

If we do not listen to our students, then it is as though we wish to meet up with our students at a certain destination, and we tell them in great detail how to get from where we are to where our destination is, but we do not realise that our students are NOT where we are, but are in fact starting from a variety of points in the countryside, so that the information we provide from our standpoint has little or no meaning for them.

We have three ways of learning from our students: by observing what they do, by reading what they write, and by listening to what they say. [At this point a number of video excerpts and examples of children's written work were shown to exemplify these three ways of probing children's thinking.]

We can also learn about students' common misconceptions not from one student's response, but rather by aggregating the responses of many students to the same item. For example, in research conducted in conjunction with Professors Bob and Barbara Reys of the University of Columbia, Missouri, it was found that a substantial minority of both United States and Australian 10- and 12-year olds selected 5/9 as the largest of the four fractions 5/6, 5/7, 5/8. 5/9. It needed oral interviews to confirm the assumption that students were carrying over whole-number thinking into fractions, almost as though they were comparing 5 sixes, 5 sevens, 5 eights and 5 nines, which, at least in English, sound very similar to 5 sixths, 5 sevenths, 5 eighths, 5 ninths.

In 2005 I was invited by Bengt Johansson and Ingvill Stedoy to spend a total of six months at their two centres, to work on material which would assist teachers from Year 1 to Year 10 (a) in identifying the common misconceptions and difficulties of their students in number, and (b) in using this information to make decisions about teaching the class and individual students. The focus of the material was to be on students' number sense, rather than on their ability to follow rules.

There are many tests for sale, and many books of teaching suggestions, but these are usually written independently from each other. The aim of this material is specifically to unite these two processes into one, so that the results of testing would lead directly to suggestions for remediation.

The material is structured around a five-stage cyclical process. First, a class screening test is given which establishes the main areas of strengths and weakness in number within the class, and also identifies areas of concern for individual students or groups of students. Second, the results of the test are recorded in a form that helps with analysis of the main areas of strengths and weakness. Third, selected individual students are interviewed to determine the underlying thinking behind their errors. Discussion of common misconceptions and the thinking behind them is provided in the resource material, which is linked directly to each test item. Fourth, the teacher analyses both the results of the test and the interviews with students and uses the resource material as an aid in determining follow-up work with individual students, groups of students, or the class as a whole. Fifth, the follow-up work takes place, and the cycle can be repeated.

Reports from teachers in Norway, Sweden and Western Australia suggest that the material is both practical and helpful. In the United Kingdom the 1982 Cockcroft Report, of which I was a member, acknowledged in its opening paragraph that mathematics is a difficult subject both to teach and to learn. I earnestly hope that *Alle Teller!* makes easier the task of both teacher and learner of mathematics.

Plenum 2, mandag kl 11.00 – 12.00

Lisen Häggblom, lektor i matematikens didaktik vid Institutionen för lärarutbildning, Åbo Akademi i Vasa. Intresseområdet är språk och utvärdering i matematik och forskningen handlar om elevers kunskapsutveckling i matematik. Skriver läromedel i Finland och Sverige.

Barns talutveckling från 6 till 15 års ålder

Vilka kunskaper har barn i matematik innan de inleder sin skolgång? Hur utvecklas deras kunskaper och vad är orsaken till att en del elever upplever ett misslyckande i matematik? Kan resultatet före skolstarten förutsäga hur barnen kommer att lyckas under skoltiden? Det här är några av de frågor som ställdes när en grupp på ca 140 barn inledde sin skolgång för ett antal år sedan. Genom att följa dessa elevers utveckling i matematik under hela grundskoltiden har det varit möjligt att studera deras utveckling. Föreliggande artikel är en sammanfattning av en longitudinell studie av elevers utveckling i matematik (Häggblom, 2000).

Barns kunskaper om tal vid skolstarten

Redan vid skolstarten uppvisar barnen stora variationer i att uppfatta och använda tal. De flesta kan använda tal inom talområdet 0-6, dvs göra jämförelser och kombinera rätt siffra med rätt antal föremål. Den abstrakta talramsan differentierar barnen. En stor del av barnen visar stor säkerhet i att räkna antal upp till 32 och i att skriva tvåsiffriga tal. Variationer noteras både i sifferskrivning och skrivriktning vid två- och tresiffriga tal. Barnen uppfattar de språkliga uttrycken "talet före" och "talet efter" på olika sätt. Hos vissa barn hade de informella kunskaperna ännu inte utvecklats till den distinktion och exakthet som karakteriserar matematisk kunskap.

Barnens säkra talbehandling noteras även i deras goda förmåga att lösa muntliga textuppgifter inom talområdet 0-10. Minst hälften av barnen löser räknehändelser inom talområdet 0-18. Barnen förstår överlag det språkliga innehållet i räknehändelserna och visar god förståelse för val av rätt räkne-operation. Talområdet utgör begränsningar och när talområdet överstiger 10 uppstår skillnader i resultat. Lösningsmetoden varierar så att vissa barn använder en abstrakt lösning utan användning av fingrar eller klossar, medan andra barn har en konkret lösningsmetod genom att söka stöd för räknandet i fingrar eller klossar. Resultatet överensstämmer med tidigare forskning om att barn tidigt utvecklar informella kunskaper och att de flesta barn kan hantera tal inom talområdet 0-6 innan formell undervisning inletts.

Skolnybörjarna är således långt på väg i sin talkonstruktion och deras förmåga att använda tal är överlag mycket god, vilket kan tolkas så att de har goda förutsättningar för inlärning av formell matematik. Detta har den positiva följden att matematiken upplevs som lätt och lusten att lära är stor. Lusten att lära hänger samman med att de förstår matematik.

Om lärare inte är medvetna om dessa kunskaper hos barnen ställs ribban för lågt, vilket har konsekvenser för elevernas senare inlärning. Barns kunnande men också deras syn på och attityder till matematik grundläggs under tiden före och efter skolstarten.

Vad händer med elevernas matematikkunskaper?

De goda kunskaper som eleverna bär med sig vid skolstarten visar sig genom ett stort intresse för matematik under de första skolåren. Från 6 till 7 års ålder utvecklas antalsräknandet mot större säkerhet. Lösningsfrekvensen för undervisat lärostoff har i 7-årsstudien en lösningsfrekvens på över 90%. Kunskapsutvecklingen är under det första skolåret så markant och har så stor överspridningseffekt att vissa elever utvecklar kunskaper även inom sådant matematikinnehåll som ännu inte behandlats i skolkursen.

Med elevernas stigande ålder minskar lösningsfrekvensen för årskurstypiska uppgifter och andelen olösta uppgifter ökar. Det sker en gradvis utslagning som beror på övergång till högre talområden och matematikuppgifter med komplexa strukturer, vilka kräver mer sammansatta tankefunktioner. Det finns bl.a. brister i begreppsförståelsen när det gäller vårt positionssystem och de rationella talen.

Vid 9 års ålder har eleverna gått tre år i skola. Enligt läroplanen innefattar taluppfattning på den åldersnivån naturliga tal inom talområdet 0-10000. Minst 90% av eleverna kan (a) skriva tal över tusen med siffror, (b) skriva tre- och fyrsiffriga tal i storleksordning, (c) fortsätta talföljder framåt och (d) ange tal som kommer före och efter ett annat tal. Lösningsfrekvensen sjunker när uppgiftstyperna avviker från den normala strukturen (t.ex. talföljden ökar med 5 eller går mot mindre tal). Elevernas kunskaper om tal vid 9 års ålder är således överlag goda, även om summapoängen visar på stora variationer.

I 12-årsstudien utvidgas talområdet till sexsiffriga hela tal samt decimal- och bråkstrukturer. Andelen elever som kan tolka bråkmodeller varierar beroende på modellens struktur. Uppgifter med likadelad helhet löses av 90% av eleverna, medan modeller utan traditionell likadelning löses av endast 40%.

Mellan 9 och 12 års ålder minskar lösningsfrekvensen från 81 % till 66 %. Vid 12 års ålder löser hälften av eleverna minst 70% av uppgifterna och en tredjedel löste högst hälften av uppgifterna. Ca 30% av hela undersökningsgruppen har uppenbara svårigheter, vilket framkommer som obesvarade frågor eller som felsvar.

Vid 15 års ålder kan mellan 50% och 80% av eleverna hantera positionssystemet och bråkstrukturer och ungefär hälften av eleverna kan använda procenträkning och tiopotensform. Eleverna uppnår i 15-årsstudien ett bättre resultat i de flesta uppgifter jämfört med 12-årsstudien. Lösningsprocenten för dessa uppgifter har ökat med mellan 10 och 20 procentenheter, men lösningsfrekvensen för uppgifter som tillhör lågstadiets stoff når sällan över 80%. Detta visar att förståelse för ett moment utvecklas senare hos vissa elever. För högstadietypiska uppgifter ligger lösningsfrekvensen på ca 50%. Till dessa uppgifter hör bl.a. att tolka en bråkmodell i decimalform, att skriva och tolka potensform samt att beräkna procent. Det faktum, att ungefär hälften av eleverna kommer upp till bara hälften av totala poängsumman, visar på oklar taluppfattning.

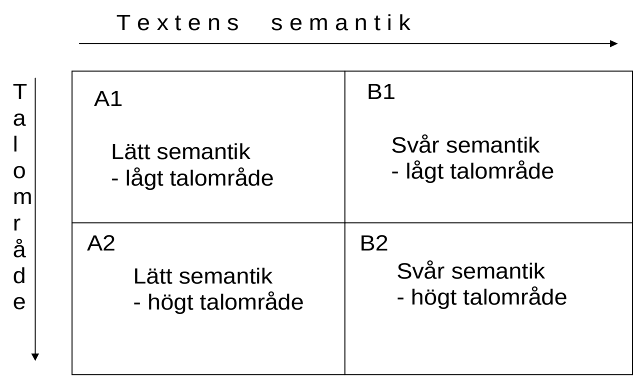
Mellan låg- och högstadiet blir talområdet mera komplext eftersom nya strukturer tillkommer och det finns krav på kunskaper i allt mera sammansatta tankekomponenter. Den minskade lösnings-frekvensen kan ses som ett tecken på gradvis utslagning. Andelen elever som i 15-årsstudien lyckas lösa årskurstypiska uppgifter minskar, likaså andelen som når toppoäng. De sammansatta tankefunktioner som orsakar denna utslagning identifieras i denna undersökning som bråk- och decimalstrukturer i 12-årsstudien och som procent- och tiopotensstruktur i 15-årsstudien. Inom dessa strukturer varierar lösningarna beroende på uppgiftens utformning.

Förändringen i taluppfattning från 6 år till 15 års ålder kan beskrivas som en utveckling mot ett mer komplicerat och krävande innehåll. Lösningsprocenten för en årskurstypisk uppgift ökar när den återkommer på en senare åldersnivå, men lösningsprocenten når sällan över 80%. Vid jämförelse av identiska uppgifter mellan två åldersnivåer noteras en markant förbättring i att skriva stora tal, att fortsätta talföljder och i att hantera decimal- och bråkstrukturer. Beträffande förmåga att hantera talenheternas namn sker en mycket liten förbättring, och i vissa uppgifter t.o.m. försämras resultatet. Undersökningen visar att inte alla elever kan inhämta och bearbeta det matematiska innehåll som är avsett för en viss årskurs, utan utvecklingen sker senare.

Att lyckas lösa textuppgifter

För textuppgifter är den gradvisa utslagningen inte lika tydlig som för taluppfattning. Valet av textuppgifter i studien gjordes så, att resultaten på olika åldersnivåer skulle vara jämförbara med avseende på räkneoperation och textens struktur. När samma uppgift återkommer på en senare årskurs ökar lösningsfrekvensen, men när textens struktur bibehålls och de numeriska värdena årskursanpassas, minskar lösningsfrekvensen i allmänhet. Mellan 9 och 12 års ålder ökar lösningsfrekvensen i allmänhet med upp till 40 procentenheter, medan ökningen mellan 12 och 15 års ålder sällan är högre än 10 procentenheter. Det här tyder på att även om det sker en utveckling under högstadietiden så är den mycket marginell. En av orsakerna kan ligga i det faktum att årskursanpassade talvärden innebär svårare talstrukturer.

Numeriska talvärden och textens semantik har stor betydelse för hur eleverna kan lösa textuppgifter. Talvärdena har mera sammansatta strukturer i högre årskurser. På motsvarande sätt sker progressioner i textens semantik. När lösningarna utvärderats utkristalliserades en fyrfältstabell för nivåer i svårighetsgrad utifrån variationer i talvärden och textens semantik:



Figur 1. Samband mellan textuppgifternas talvärden och textens semantik.

Figuren visar textuppgifter på fyra nivåer. I fält A1 ligger sådana uppgifter som har enkla talvärden och en enkel semantik. Med enkel semantik avses bl.a. korta och enkla meningar med entydig information och frågor som besvaras genom användning av ett enda räknesätt. Till fält A2 hör uppgifter med samma enkla semantik, men den numeriska strukturen i talvärdena är mera komplex. Dylika talvärden är t.ex. bråk- och decimalstrukturer. Karakteristiskt för uppgifterna inom fält A är att valet av räknesätt är självklart. I fält B1 ligger uppgifter med enkla talvärden men med texter som har svår semantik. Med svår semantik avses att lösningen förutsätter användning av två räknesätt eller att lösningsmetoden inte är entydig. Även terminologin och ordvändningar är svårare i fält B1 än i A1. De svåraste textuppgifterna ligger inom fält B2, dvs. de har mera komplicerade talvärden och krävande semantisk struktur.

Eftersom många elever överlag har svårigheter med lösningar av textuppgifter kunde fyrfältstabellen användas som underlag för att kategorisera textuppgifter och anpassa svårighetsgraden till elevers olika behov och förutsättningar.

Korrelationen mellan taluppfattning och textuppgifter varierar mellan 0,62 och 0,79, medan korrelationen mellan läsförståelse och textuppgifter varierar mellan 0,38 och 0,47. I felanalyserna framkommer att misslyckandet i de flesta textuppgifter till cirka 80% av felsvaren beror på numeriska räknefel eller avskrivningsfel. Elevernas läsförståelse kan anses vara tillräcklig för att förstå innehållet i de uppgifter som ingår i denna undersökning.

Räknemönster

När elevernas lösningar analyserades framträdde ett slags räknemönster med variationer i räknemetoder och räknestrategier.

Varierande räknemetoder

När eleverna utför aritmetiska räkneoperationer anpassar de räknemetoden till talens struktur. I de lägre årskurserna är huvudräkning överlag vanligare än uppställning, medan uppställning ökar i högre årskurser. Vid 9 års ålder använder många elever huvudräkning i sådana uppgifter som av tradition löses med uppställning. Vissa elever ger endast ett svar till en uppgift och tillvägagångssätt saknas. Dylika lösningar kan inte användas för diagnostisering av elevernas räknestrategier. Vid lösning av textuppgifter förekommer liknande mönster. Lösningarna redovisas som huvudräkning eller uppställning. Ibland innehåller en lösning en s.k. beteckning där endast räknesättet framgår. När bråkstrukturer införs i högre årskurser, övergår räknandet till en form av skriftlig huvudräkning med stegvisa redovisningar, vilket gör det lättare att utvärdera räknandet. Variationer i räknemetoder visar olikheter i elevernas sätt att räkna och hantera matematisk information.

Medvetna räknestrategier

Att kunna beskriva en räknestrategi visar på en medveten kunskap. Redan vid 9 års ålder har vissa elever förmåga att ge en skriftlig förklaring till hur de tänker. Dessa räknestrategier uttrycks med ord eller tal- och teckensymboler. Varje räkneoperation löses med minst tre olika räknestrategier, varav samma strategi oftast förekommer i minst hälften av lösningarna. Strategierna redovisas både för rätt och fel svar. Denna utvärderingsmetod är inte heltäckande för alla lösningar eftersom eleverna uppfattar frågan “ Hur tänkte du när du räknade ... ?“ på olika sätt. Vissa elever skriver att de inte kan besvara frågan medan andra besvarar den med en upprepning av uppgift och svar. Några elever visade på en automatiserad kunskap med att svara “det är inpräntat“ eller “det kommer automatiskt“. Genom att analysera räknestrategier är det möjligt att utvärdera kvalitet och felsvar i elevernas räknande. Variationer i medvetenhet kan bero på avsaknad av träning i att verbalisera sitt tänkande. En stor del av de elever som räknar fel redovisar sina strategier. De använder ofta liknande räknestrategier som de elever som räknar rätt. Genom att studera räknestrategin till en fellösning kan man få information om hur den elev tänker, som ger samma svar men själv inte kan verbalisera sin strategi. En didaktisk konsekvens av denna felanalys är att en elevs tankefel kan användas för att förstå en annan elevs tänkande eller för att medvetandegöra en annan elev på sitt tänkande och sin lösning. Resultaten visar dels att kvalitativt bättre räknestrategier växer fram med stigande ålder, dels att vissa typer av räknefel förekommer under hela grundskoltiden. Att elever misslyckas i sitt räknande beror på en mångfald olika faktorer.

Utvecklingstrender hos flickor och pojkar

Det finns statistiskt signifikanta skillnader vid 6 års ålder mellan könen till pojkarnas favör. Under lågstadietiden utjämnas prestationsskillnaderna mellan könen och flickorna visar överlag en större förändringsbenägenhet än pojkarna. Under högstadietiden blir flickorna sämre i relation till pojkarna, så att det vid 15 års ålder åter är statistiskt signifikanta skillnader mellan könen till pojkarnas favör. Både pojkar och flickor har nästan samma medelvärde vid 15 års ålder som de har vid 6 års ålder. Flickorna gör alltså större framsteg än pojkarna under lågstadietiden medan pojkarna går mera framåt under högstadietiden. En av orsakerna kan vara att undervisningsmetoderna i lågstadiet gynnar flickornas utveckling medan det är omvänt i högstadiet. Det kan även vara en följd av skillnader i undervisningsmetoder hos kvinnliga och manliga lärare, eftersom antalet kvinnliga lärare dominerar i lågstadiet.

De ovan diskuterade utvecklingstrenderna visar på svårigheter att entydigt beskriva hur barnens kunskaper utvecklas och förändras under skoltiden. Jag vill slutligen skissera ett förändringsmönster för att besvara den fråga jag många gånger fått under forskningens gång, nämligen huruvida det är möjligt att på ett tidigt skede avgöra hur barnen kommer att klara sig under skoltiden.

Förändringsmönster

Resultatet vid 6 års ålder har ett mycket litet prediktionsvärde för elevernas kunskapsutveckling. För att kunna jämföra resultaten vid 6, 12, och 15 års ålder delades eleverna in i prestationsgrupper utgående från summapoäng. Det visade det sig att eleverna vandrar mellan prestationsgrupper. T.ex. av 35 lågpresterande elever vid 6 års ålder är 19 elever kvar i samma prestationsgrupp vid 9 års ålder medan elva elever gått över till gruppen mellanpresterande och fem till högpresterande. Liknande förändringsmönster finns mellan övriga åldersnivåer. Andelen elever som tillhör samma prestationsgrupp under hela skoltiden är mindre än 20 %. Detta resultat tyder på att skolan som inlärningsmiljö har en mycket stor betydelse för elevernas inlärning och att lärares engagemang och intresse för matematik påverkar elevers lärande.

Didaktiska konsekvenser

Som en didaktisk konsekvens av undersökningen vill jag lyfta fram den kommunikationsorienterade utvärderingen som ett redskap för att synliggöra elevers räknande. Modellen implicerar såväl muntlig som skriftlig kommunikation. Språkets användning betonas inte endast i samband med begreppsbildning utan även i diagnostiskt syfte. Elevernas olika förmåga att verbalisera en lösning visar på behovet av en systematisk språkanvändning. En medveten språklig träning ökar inte bara elevernas kommunikativa förmåga, utan gör också tankarna synliga och åtkomliga för värdering. Inom varje stadium finns orsak att finna de mest optimala situationerna för språklig träning så att inre representationsformer överförs i lingvistisk och symbolisk form, s.k. yttre representationer.

Den muntliga och skriftliga kommunikationen möjliggör utvärdering av felsvar. Undervisningen är ofta inriktad på att lyfta fram rätta lösningar och därmed får analyser av felsvar oftast inte rum inom den egentliga undervisningen. Framför allt vid lösning av textuppgifter händer det lätt att eleven fokuserar sitt felräknande på att de inte kan lösa textuppgifter, även om felet ligger i utförandet av själva räkneoperationen. När eleverna kommunicerar kring sitt tänkande utvecklas deras medvetenhet om sina egna tankeprocesser, deras metakognition. Även om syftet med denna undersökning inte var att utvärdera elevernas metakognitiva förmåga blev den framträdande i och med studiet av deras beskrivningar av sina räknestrategier.

Jag har många gånger ställt mig frågan vad det beror på att en del elever så tydligt redan vid 9 års ålder kan beskriva hur de tänker när de utför vissa räkneoperationer, medan andra konstaterar att de “räknar“ eller att “det kommer automatiskt“. Kanske saknar dessa elever erfarenheter av att verbalisera sin kunskap. Vid utvärderingen av dylika direktsvar kan man endast konstatera om svaret är rätt eller fel. Enligt en socialkonstruktivistisk inlärningssyn är elevens tänkande inte en avbild av någon annans sätt att tänka utan det har originalitet och en egen funktion. Eftersom livskraft i elevens kunskap är utgångspunkt vid bedömning av matematik inlärning, får den metakognitiva kunskaps-utvecklingen stor betydelse vid utvärdering. Genom att låta eleverna reflektera över sina lösningar får de erfarenhet av att verbalisera sin kunskap och de medvetandegörs på sitt tänkande. Den underlättar analyser av elevernas felsvar. I denna undersökning noterades att redan vid 9 års ålder kan en elevs skriftliga redovisning av ett felsvar användas för att förstå en annan elevs felsvar.

Sammanfattning

Redan vid 6 års ålder har barnen goda matematikkunskaper även om det finns stora individuella skillnader mellan resultaten. Under skoltiden sker så stora förändringar att det resultat barnen har vid 6 års ålder har ett mycket litet prediktionsvärde. En annan iakttagelse är en gradvis utslagning såtillvida, att årskurstypiska uppgifter får allt lägre lösningsfrekvens i högre årskurser. Denna gradvisa utslagning är både läroplans- och individrelaterad. Den diskrepans som finns mellan läroplanen i matematik och elevens inlärningsmöjligheter är ett av de problem som skolan bör ägna uppmärksamhet. En allt vidare syn på vad matematik är och vad som borde ingå i matematikundervisningen är en utmaning för hela skolan. Läroplanen kunde inriktas både på kvalitativt varierande innehåll och valfria inriktningar för elever på olika nivåer.

Vilka bakomliggande faktorer är orsaker till dessa variationer och hur överensstämmer dessa färdigheter med elevernas resultat och utveckling? Finns det skillnader mellan pojkars och flickors språkliga hantering i lösning av matematikuppgifter? Eftersom den språkliga kommunikationen är en naturlig del av skolans matematikundervisning öppnas här, ur lärarperspektiv, många möjligheter till forskning inom en enskild klass. Kunde lärarforskning i högstadiet ytterligare belysa den gradvisa utslagning som de facto sker? Under devisen jag kan hjälpa en elev att utveckla sitt tänkande om jag vet hur eleven tänker ser jag både möjligheter och begränsningar i varje enskilt klassrum.

Referenser

Ahlberg, A. (1996). Undervisningsprocessens betydelse för flickors och pojkars lärande. *Nomad*, 2/3 (4), 7-30.

Björkqvist, O. (1993). Social konstruktivism som grund för matematikundervisning. *Nomad*, 1 (1), 8-17.

Brown, M. (1993). Assessment in mathematics education: Development in philosophy and practice in the United Kingdom. In: M. Niss (Ed.), *Investigations into assessment in mathematics education. An ICMI study* (pp. 71-83). Dordrecht: Kluwer.

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1984). *Children learning mathematics. A teacher´s guide to recent research*. London: Holt, Rinehart and Winston.

Fuson, K.C, Kalchman, M. & Bransford, J.D. (2005). Mathematical Understanding: An Introduction. In M.S. Dobovan & J. D. Bransford (Eds.), *How Students Learn Mathematics in the classroom.* Washington: The National Academies Press.

Gelman, R. & Gallistel, C. R. (1978).*The child´s understanding of number*. London: Harvard University Press.

Ginsburg, H. P., Jacobs, S. F. & Lopez, L. S. (1993). Assessing mathematical thinking and learning potential in primary grade children. In M. Niss (Ed.), *Investigations into assessment in mathematics education. An ICMI study* (pp. 157-167). Dordrecht: Kluwer.

Grevholm, B.(1998). Kön och matematikutbildning. I B. Gran (red.), *Matematik på elevens villkor - i förskola, grundskola och gymnasieskola*. Lund: Studentlitteratur.

Häggblom,L. (2000). *Räknespår. Barns matematiska utveckling från 6 till 15 års ålder.* Åbo: Åbo Akademis förlag.

Kieren, T. E. (1993). Rational and fractional numbers: From quotient fields to recursive understanding. In T. P. Carpenter, E. Fennema & T. A. Romberg (Eds.), *Rational numbers. An integration of research* (pp. 49-84). New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

Kulm, G. (1991). New directions for mathematics assessment. In G. Kulm (Ed.), *Assessing higher order thinking in mathematics* (pp. 71-78). Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Morgan, C. (2001). The place of pupil writing in learning, teaching and assessing mathematics. In P. Gates (Ed.), Issues in Mathematics Teaching. RoutledgeFalmer.

Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1987). Representation and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics*. London: Lawrence Erlbaum Associates.

Magne, O. (1998). *Att lyckas med matematik i grundskolan*. Lund: Studentlitteratur.

Steffe, L. P. & Cobb, P. (1988). *Construction of arithmetical meanings and strategies*. New York: Springer -Verlag.

Parallellsesjon 1, mandag kl 13.00 – 15.00

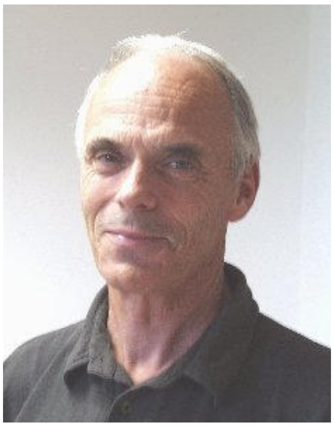
Håvard Johnsbråten er førsteamanuensis i matematikk ved Høgskolen i Telemark (HiT). Han er faglig leder av fjernundervisningen i matematikk ved HiT og er leder for Nettverk for matematikk i lærerutdanningen. Tidligere har han vært med på utviklingen av nettbaserte nasjonale prøver i matematikk. Nå er han prosjektleder for digitaliseringen av KIM-prosjektet i regi av Telemarksforsking-Notodden.

KIM – nå også som et digitalt kartleggingsverktøy

Det opprinnelige KIM-prosjektet ble gjennomført ved Telemarksforsking-Notodden (TFN) fra 1995 til 2002. I prosjektet ble det utviklet kartleggingsprøver innen de fleste emner i matematikk i grunnskolen. Noen av prøvene ble også utviklet for 1. trinn i videregående opplæring. Det ble skrevet veiledningshefter med resultater fra utprøvingen og ideer til undervisningsaktiviteter og metoder.

Nå er KIM-oppgavene for grunnskolen digitalisert, og programmet planlegges lansert i løpet av våren 2008. Programmet ble presentert og drøftet i en parallellsesjon på Novemberkonferansen 2007. Denne artikkelen inneholder hovedpunktene fra presentasjonen, og er ajourført per februar 2008.

Hva er KIM?



For enkelhets skyld vil betegnelsen KIM bli brukt både om det tidligere prosjektet, om videreføringen av dette prosjektet og om selve dataprogrammet. KIM står forøvrig for *Kvalitet I Matematikkundervisningen*.

KIM-prosjektet er et samarbeidsprosjekt mellom Utdanningsdirektoratet og TFN. Hovedmannen bak prosjektet er høgskoledosent Gard Brekke ved Høgskolen i Telemark og TFN. Han har vært prosjektleder for ”den skriftlige delen av KIM” fra starten av og fram til 2006. Etter det har undertegnede overtatt ansvaret for ”den digitaliserte delen av KIM”.

Oppgavene som er utviklet i KIM-prosjektet går i stor grad på forståelsen av begreper innen sentrale emner i matematikk. De fleste oppgavene er laget som såkalte *diagnostiske oppgaver*, der hensikten er å få fram hvordan elevene tenker om et emne og i hvilken grad de har mangelfullt utviklede begreper eller misoppfatninger innen emnet.

Det første heftet som ble utgitt i KIM-prosjektet hadde tittelen *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk*. Her tas det spesielt opp hva diagnostiske oppgaver er og hvordan en kan arbeide med slike oppgaver i undervisningen. Dette følges også opp i de andre veiledningsheftene.

Nedenfor gir vi to eksempler på diagnostiske oppgaver, hentet fra dette heftet.

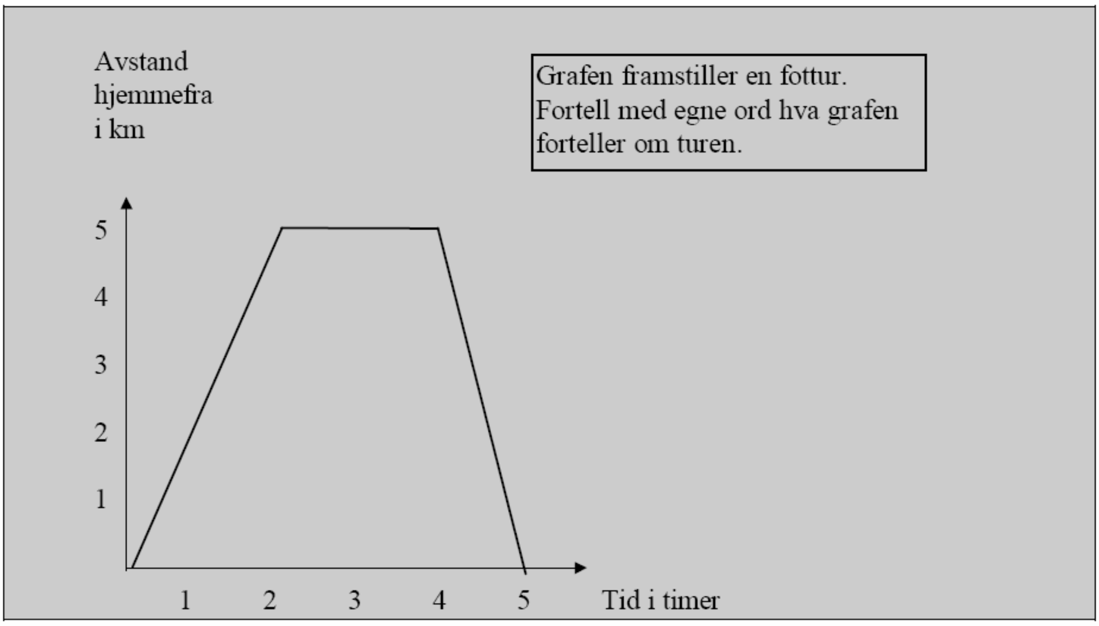
Eksempel 1

Elevene skal velge riktig regneoperasjon for denne oppgaven:

Kjøttdeig koster 69,50 kroner per kg, hvor mye koster 0,86 kg?

Her velger mange elever divisjon. Det er ikke unaturlig å svare dette, for da elevene arbeidet med hele tall, ble de vant til å tenke at multiplikasjon gjør svaret større og divisjon gjør svaret mindre. Overføres dette til desimaltall, vil imidlertid denne tankegangen være en misoppfatning.

Eksempel 2



Denne oppgaven går på forståelsen av en graf. Det overlates til leseren å foreslå både riktige og feilaktige måter å beskrive denne fotturen på! I heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* gis det interessante eksempler på misoppfatninger elever kan ha mht. denne grafen.

I det opprinnelige KIM-prosjektet ble det utviklet kartleggingsprøver og skrevet veiledningshefter[1] innen følgende emner for grunnskolen:

- *Tall* (5., 7. og 9. trinn)
- *Tallregning* (5., 7. og 9. trinn)
- *Funksjoner* (5., 7. og 9. trinn)
- *Algebra* (6., 8. og 10. trinn)
- *Geometri* (6. og 9. trinn)
- *Måling og enheter* (6. og 9. trinn)

(Oppgavene innen *Tall* og *Tallregning* ble laget for 4., 6. og 8. trinn, som tilsvarer dagens 5., 7. og 9. trinn.)

[1] Alle prøver og veiledningshefter kan bestilles i papirutgave slik:
Gå til http://bestilling.utdanningsdirektoratet.no/ og velg
Kartlegging, *Åpne kategori* for Kartleggingsmateriell og *Matematikk*.
Heftet *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* kan også lastes ned i pdf-format.

Alle oppgavene ble prøvd ut i stor skala, og resultatene er lagt inn i veiledningsheftene. Der finnes det også egne kapitler med ideer til undervisningsaktiviteter.

Det ble også utviklet kartleggingsprøver og veiledningshefter innen emnene *Tall og tallregning*, *Geometri* og *Måling og enheter* for 1. trinn i videregående opplæring.
I tillegg til *Introduksjon til diagnostisk undervisning i matematikk* ble det også skrevet hefter med titlene *Matematikk på småskoletrinnet* og *Tanker om matematikkfaget hos elever og lærere*.

I KIM-prosjektet ble mange av oppgavene testet ut på flere klassetrinn. Hensikten var å kunne følge utviklingen av elevenes forståelse gjennom flere klassetrinn. Siden oppgavene går på helt grunnleggende emner i matematikkfaget, vil de være like aktuelle for undervisning etter LK06 som da de ble utviklet.

Digitalisering av KIM-oppgavene

Prøvene og veiledningsheftene har blitt distribuert og solgt til et stort antall skoler, og lærere har rapportert om svært gode erfaringer med bruk av KIM-materiellet. Men mange lærere har hatt problemer med å få tak i heftene, så prosjektet ble etterhvert nesten "glemt". Derfor var det meget fortjenestefullt at Kunnskapsdepartementet ønsket å "*videreutvikle og digitalisere prosjektet KIM*" som et av tiltakene i Strategiplanen *Et felles løft for realfagene*. (Se Tiltaksplan 2006 og 2007/08 tiltak 11A.)

I 2006 besluttet Utdanningsdirektoratet å lage en nettbasert og interaktiv versjon av KIM i samarbeid med TFN. Formålet var bl.a. å øke tilgjengeligheten til KIM-oppgavene og å bidra til et nasjonalt løft innen IKT og matematikk.

I løpet av våren 2007 ble samtlige KIM-oppgaver for grunnskolen lagt inn i dataprogrammet, og rett før sommeren 2007 ble KIM-programmet lagt ut på en server hos Utdanningsdirektoratet. Oppgavene er testet ut ved en god del skoler[2].

I den første versjonen av programmet ble oppgavesettene for de forskjellige emneområdene lagt inn på de klassetrinnene som oppgavene opprinnelig ble prøvd ut på. I den versjonen som vil bli lansert våren 2008 vil denne inndelingen bli forenklet: De oppgavene som passer på trinn 5-7 ("mellomtrinnet") vil bli samlet innen hvert emneområde, og det samme vil bli gjort med de oppgavene som passer på trinn 8-10 (ungdomstrinnet). Dette er naturlig å gjøre fordi de fleste oppgavene er testet ut på flere trinn, og denne inndelingen vil gjøre det lettere for læreren å velge ut oppgaver.

Når det gjelder KIM-oppgavene i algebra, så er det svært få av disse oppgavene som egner seg for trinn 5-7 utfra LK06. Og når det gjelder funksjoner, så er ikke dette emnet med som noe hovedområde i LK06 før enn på ungdomstrinnet. Derfor vil det ikke bli lagt ut noe oppgavesett innen algebra og funksjoner på trinn 5-7.

---

[2] De som er interesserte, kan få brukernavn til KIM-programmet. Se info om KIM på hjemmesiden til Telemarksforsking-Notodden, http://www.tfn.no.

Den første versjonen av KIM-programmet vil derfor inneholde oppgaver i emnene:

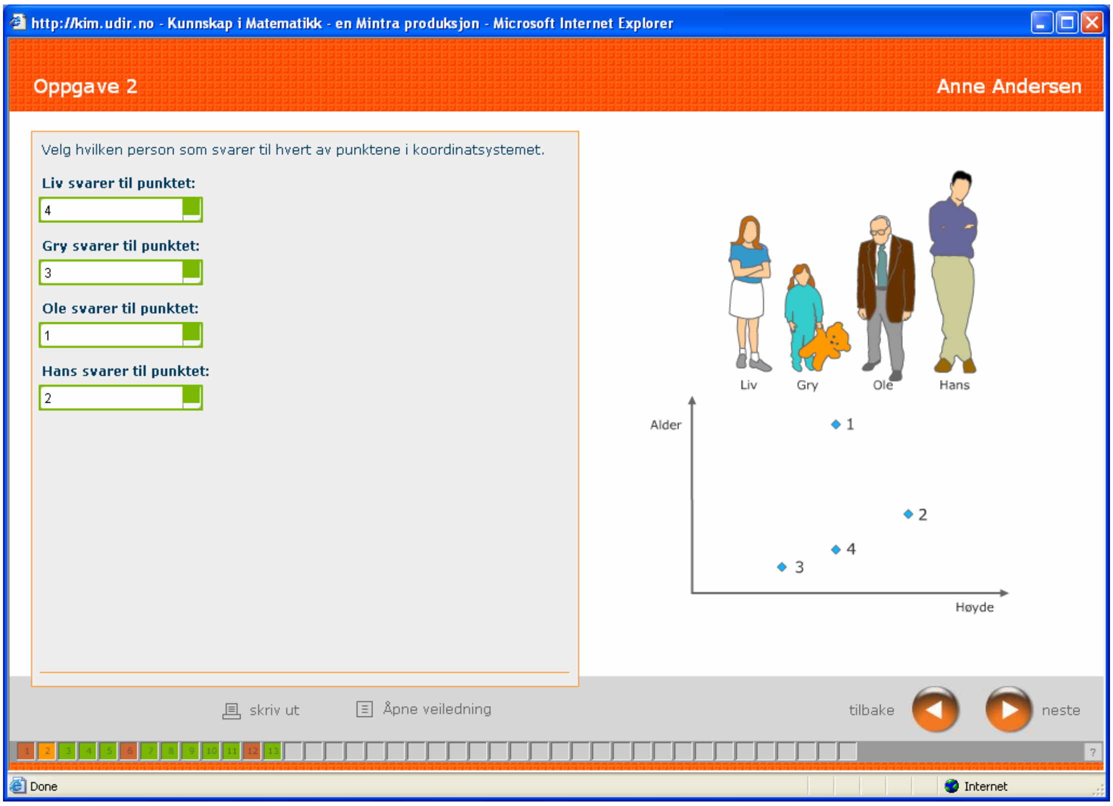
- *Tall* (5.-7. og 8.-10. trinn)
- *Tallregning* (5.-7. og 8.-10. trinn)
- *Funksjoner* (8.-10. trinn)
- *Algebra* (8.-10. trinn)
- *Geometri* (5.-7. og 8.-10. trinn)
- *Måling og enheter* (5.-7. og 8.-10. trinn)

I arbeidet med digitaliseringen av KIM er det lagt vekt på å gjøre oppgavene mest mulig lik oppgavene i papirutgaven av prøvene, slik at resultatene fra de tidligere utprøvingene blir så pålitelige som mulig også i den digitaliserte versjonen av KIM. Men i oppgaver der f.eks. elevene skal tegne en geometrisk figur, må det bli litt forskjell mellom oppgaver i papirversjonen og i nettversjonen. Dette bør læreren ta med i betraktning når vanskegraden av de enkelte oppgavene skal vurderes.

For hver enkelt oppgave er det lagt inn korte veiledningstekster fra KIM-heftene i lærermodulen til programmet. Disse inneholder tabeller med resultater og kommentarer til oppgaven. Læreren bør lese gjennom disse i planleggingen av hvilke oppgaver som skal gis i prøvene til elevene.

Det er mange måter elevene skal svare på i de enkelte oppgavene. Noen svar gis som tallsvar, noen gis med avkrysning for ett eller flere alternativer eller med valg i rullegardinmenyer (som i eksemplet på neste side). Noen svar gis ved hjelp av formler eller som rene tekster. Og i enkelte oppgaver skal elevene tegne en geometrisk figur eller en graf. Der hvor elevene skal tegne, gis det egne veiledningstekster på skjermen. Utprøvningen av disse oppgavene tyder på at elevene ikke har særlig store problemer med det rent tekniske.

Eksempel 3



Denne oppgaven tester grunnleggende forståelse av koordinatsystemet, og er satt opp som oppgave 2 under funksjoner. Skjermbildet er slik læreren vil se det når han/hun går gjennom besvarelsene. Nederst til venstre er oppgavene markert. Ved hjelp av fargekoder (rødt/grønt) kan læreren se hvilke oppgaver og oppgavepunkter som er godkjent av programmet. Hvis læreren klikker på Åpne veiledning, vil det åpnes en tekst med resultater og kommentarer til denne oppgaven, hentet fra KIM-heftet om funksjoner.

Elevenes svar blir evaluert av dataprogrammet utfra de fasitsvar som er lagt inn, og en svarprosent blir beregnet for hver elev. Dette er bare ment å gi en indikasjon på hvor godt elevene har svart. Læreren bør uansett se gjennom alle svarene til elevene og vurdere dem på selvstendig grunnlag. Spesielt gjelder det de oppgavene som skal besvares med et tekstsvar i en tekstboks. Disse kan ikke bli evaluert av programmet. Slike svar blir markert som rett så sant eleven har skrevet noe i tekstruta. Derfor må læreren lese gjennom alle disse tekstsvarene og vurdere dem i lys av de kategoriene som finnes i veiledningstekstene til den enkelte oppgave.

Når KIM-programmet blir lansert, vil det bli lagt ut informasjon og brukerveiledning til programmet på Utdanningsdirektoratets nettsider. Der vil det også bli lagt ut en "trailer" som vil gjennomgå bruken av programmet på en visuell måte.

Hvordan bør oppgavene brukes?

KIM-materialet skal være *læringsstøttende*. Oppgavene bør derfor *ikke* brukes som grunnlag for å sette karakterer.

En prøve kan inneholde alle oppgavene fra et emneområde. Men læreren kan også velge ut oppgaver som går på elevenes forståelse av noen helt bestemte begreper. Derfor kan det lages en "prøve" som bare inneholder én eller noen ganske få oppgaver. Oppgaver kan også vises fram ved hjelp av videokanon og diskuteres i samlet klasse.

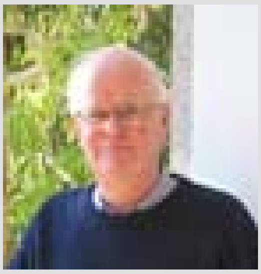
Siden mange av oppgavene er laget for å få fram hvordan elevene tenker om et begrep, kan enkelte oppgaver også brukes *før* stoffet er gjennomgått. Da vil læreren få vite mye om hvilke tanker elevene har om disse begrepene, og undervisningen kan legges opp utfra dette. Men i og med at noen av oppgavene da kan synes vanskelige for elevene, bør læreren opplyse om hensikten med disse oppgavene på forhånd.

I veiledningsheftene står det mer om dette, og der finnes det også ideer til undervisningsaktiviteter som kan hjelpe elevene til bedre begrepsforståelse og gi lærerne ideer til undervisningsmetoder[3].

Videre planer for KIM

- I KIM-prosjektet er alle hovedområder i grunnskolens matematikk dekket, bortsett fra *Statistikk og sannsynlighet*. Det arbeides nå med å utvikle oppgaver for 8. trinn innen dette emnet. Oppgavene vil bli prøvd ut i digitalisert versjon og lagt inn i KIM-programmet i løpet av 2008.
- Det planlegges også å utgi et veiledningshefte om Statistikk og sannsynlighet med resultater fra utprøvingen og ideer til undervisningsaktiviteter.
- For første trinn i videregående opplæring er det utviklet oppgaver innen *Tall og tallregning*, *Geometri* og *Måling og enheter*. Disse oppgavene planlegges lagt inn i KIM-programmet i løpet av 2008.
- Det planlegges også å utvikle oppgaver for dette trinnet innen *Funksjoner*, *Algebra* og *Statistikk og sannsynlighet*, slik at alle emner i matematikk også blir dekket av KIM-oppgaver for første trinn i videregående opplæring. Dette arbeidet ventes fullført i løpet av skoleåret 2008/09.

---
[3] Se også artikkelen til Anne Rasch-Halvorsen i denne konferanserapporten.

Alistair McIntosh, Australia,
Ingvill M. Stedøy-Johansen og
May R. Settemsdal, Matematikksenteret

Alle teller! Kartlegging for bedre tilrettelagt opplæring

Se innlegg av Alistair McIntosh, side 5

Per-Eskil Persson undervisar i matematik och matematikdidaktik vid Lärarutbildningen i Malmö. Han är också doktorand vid Luleå tekniska universitet och forskar inom området algebra och lärande, med speciell inriktning mot gymnasiet. Tidigare har han varit gymnasielärare i matematik och fysik, men har även intresserat sig för matematiklärande genom hela skolan.

Algebra – en väg till eller resultatet av god taluppfattning?

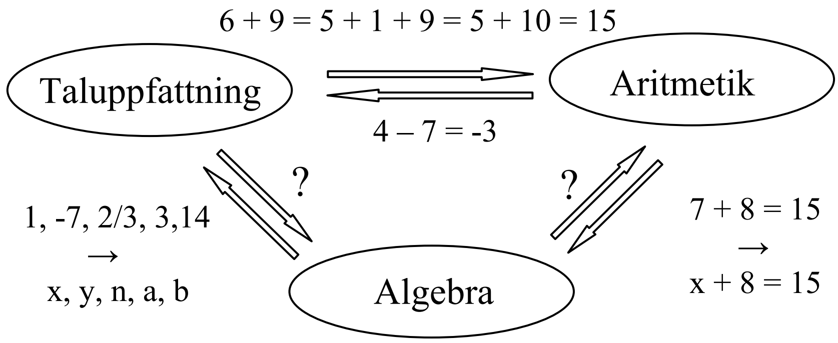
Per-Eskil Persson
Malmö Högskola – Lärarutbildningen
per-eskil.persson@mah.se

Algebra är ett område inom skolmatematiken som beskrivs som problematiskt. Elever uppfattar ofta ”räkning med bokstäver”, ekvationer och funktioner som något svårt, onödigt och lösryckt från den övriga matematiken. Algebran får representera allt det man tyckt var dåligt med matematikundervisningen i skolan och kan i värsta fall bidra till det man kallar matematikångest. Varför har vi då algebra i skolan? Man kanske kan fråga sig om det inte räcker med de övriga matematikområdena, som exempelvis aritmetik och geometri?

Men det finns en helt annan bild av algebran som en väg till tänkande på en högre, mer generell nivå (Vygotsky, 1999) som stärker andra matematikområden. Algebran är också ett kraftfullt redskap för att lösa mer avancerade uppgifter och problem, och därmed användbar även inom andra ämnesområden, som naturvetenskap, ekonomi, etc. På så sätt blir algebra en nyckel till vidare studier på gymnasiet och högskolan. Men det finns en ännu mer fundamental betydelse av goda algebrakunskaper och ett algebraiskt tänkande i matematiken, och detta ska diskuteras vidare här.

När ett barn (elev) bit för bit skaffar sig en allt bredare och en allt djupare taluppfattning, gör hon/han det i nära förbindelse med de räkneoperationer vi använder på talen, alltså det vi kallar aritmetik. Exempelvis bereder förståelsen för att heltal kan delas upp i summor på flera olika sätt vägen för en variation av metoder för addition och subtraktion, och tillämpningen av de fyra räknesätten breddar talförståelsen till att gälla ny talmängder, som negativa tal och bråktal.

När bokstavssymbolerna så småningom införs i skolmatematiken, så antar man ofta att eleverna direkt ska kunna ersätta de olika talformerna med x, y, n eller a, och att talförståelsen automatiskt följer med. Vidare bör väl eleverna kunna byta ut vissa tal i aritmetiska beräkningar mot bokstäver, och så kan man börja med ekvationer.



Men är det så enkelt? Och hur är det med elevernas taluppfattning och deras aritmetikkunskaper? Är de verkligen ”färdiga” för att ”översätta” alltsammans till bokstäver? Nej, verkligheten ser annorlunda ut, vilket alla som undervisar i matematik är väl medvetna om. Eleverna har problem med taluppfattningen långt fram i sin utbildning, och faktiskt finns det hos några allvarliga brister ända fram i högskolan eller universitetet. Men jag vill hävda att en del av dessa problem kan man mildra betydligt om man ser algebrans roll på ett annat sätt, nämligen även som en väg till bättre taluppfattning och en mer mångsidig aritmetisk förmåga. Det finns nyare forskning som visar på detta och på att det i själva verket finns ett intimt och samtidigt invecklat samband mellan förståelse av tal, räkneoperationer och algebraiska symboler.

Algebra och algebraiskt tänkande

Ordet ”algebra” har olika innebörd för olika personer. För många har det en stark koppling till ekvationer och förenklingar av uttryck, men för andra har det en mycket vidare betydelse. Det kan vara på plats att försöka göra en definition av vad jag menar här.

Det finns en *försymbolisk algebra* som sträcker sig långt tillbaka i tiden, och som utvecklades mer eller mindre oberoende i de gamla högkulturerna i Mesopotamien, Egypten, Indien, Kina och Grekland. De äldsta källorna går så långt tillbaka som till 2000 år f.Kr. Denna algebra tog sig olika uttryck, men den vanligaste är den *retoriska algebra* man exempelvis finner hos Al-Khwarizmi i *Al jabr* (c:a 825 e.Kr). Där beskrivs i berättelser metoder för hur olika andragradsekvationer löses (liknande finner man i Indien, varifrån den islamiska kulturen troligen lånat metoderna). Ett exempel:

> ***Vilken är kvadraten som kombinerad med tio av sina rötter ger en totalsumma av trettionio?***
> *Sättet att lösa denna typ av ekvation är att ta hälften av de nämnda rötterna. Nu är rötterna i vårt problem tio. Tag därför fem, som multiplicerat med sig själv ger tjugofem, ett belopp som adderat till trettionio ger sextiofyra. Kvadratroten härur är åtta, varifrån subtraheras halva antalet rötter, fem, vilket ger tre. Talet tre representerar en rot av denna kvadrat, som är nio. Den sökta kvadraten är därför nio.*

En annan typ av försymbolisk algebra gjordes med räknebräden i Kina under Han-dynastin (c:a 200 f.Kr.). I *Jiu zhang suanshu* (*Nio kapitel om räknekonsten)* beskrivs bl.a. hur man utför reguladetri, lösning av andra-, tredje- och fjärdegradsekvationer samt ekvationssystem med upp till fem obekanta. Här används också negativa tal utan några problem, vilket vi i europeisk matematik inte gjorde förrän vid ganska sen tidpunkt.

I en mellantid användes *synkoperad algebra*, i vilken texten blandades med vad vi uppfattar som algebraiska uttryck. Exemplet nedan kommer från Diofantos' Arithmetica (c:a 250 e.Kr.), men metoderna användes i Europa ända fram till 1500-talet.

> ***Att finna två tal för vilka summan och produkten är givna.***
> *Given summan 20, given produkten 96. 2x är differensen av de sökta.*
> *Då är talen 10 + x och 10 – x. Därför är 100 – x^2 lika med 96.*
> *Det ger att x är 2 och de sökta talen 12 och 8.*

Det första arbetet med *symbolisk algebra* anses vara François Viètes *In artem analyticem isagoge* (1591). Detta verk innehåller dock ett symbolspråk som vi skulle ha svårt att tyda, och symbolerna kom att utvecklas exempelvis via sådana matematiker som René Descartes (*La géométrie*, 1637) till Isaac Newton (1642 – 1727) och Gottfried Wilhelm Leibniz (1646 – 1716). Dessa breddade algebran till att även omfatta funktioner och kopplade den till andra områden via analysen och den analytiska geometrin. Vidare bidrog speciellt Leibniz till att ge algebran den form vi idag känner igen i skolans matematik.

Men det fanns de som såg ett djupare mönster och kunde utnyttja detta för att få svar på problem som tidigare inte gått att lösa. Niels Henrik Abel (1802 – 29) visade med hjälp av *abstrakt algebra* omöjligheten av att lösa en allmän femtegradsekvation. En annan ung matematiker, Evariste Galois (1811 – 32), skapade Galois-teorin med begrepp som grupper, ringar, kroppar. Det är en övergripande teori som klassificerar och definierar många olika ”algebror”, t.ex. Z_{12} som vi ser på våra urtavlor varje dag. Den abstrakta algebran visar också att de lagar som styr talmängderna och räkneoperationernas egenskaper är övergripande lagar som inte är godtyckliga. De algebraiska regler vi tillämpar i skolmatematiken bestäms helt av villkoren för talringar och talkroppar. Aritmetiken är alltså ingenting annat än tillämpad algebra!

Idag har också elektroniken gjort sitt intåg i algebran via *elektroniska verktyg* av olika slag. Symbolhanterande såväl som mer avancerade program för datorer har varit i användning under ett antal år, och de senaste åren har även de symbolhanterande räknarna introducerats i skolmatematiken. Ofta sammanfattas dessa med beteckningen CAS (Computer Algebra System), och användningen av sådana kraftfulla verktyg måste med nödvändighet komma att få stor inverkan på hur algebraundervisningen ser ut i framtiden.

Sammantaget kan alltså algebra definieras mycket brett, kanske så här: ”*Varje slags matematisk verksamhet som har att göra med generaliserade beräkningsprocesser*” (Sfard, 1995). Med ett sådant tänkesätt skär algebra långt in i områden man traditionellt sett som aritmetik. Vissa typer av uppgifter, som jag kallar *strukturell aritmetik*, skulle även falla inom algebran. T.ex. är omskrivningen $123 \cdot 17 = 100 \cdot 17 + 20 \cdot 17 + 3 \cdot 17$ en tillämpning av distributiva lagen, och en snabb beräkning av $256 + 179 - 56 = 200 + 179 = 379$ en tillämpning av associativa lagen i kombination med inversa element (negativa tal).

Ett framkomligt sätt är att tala om *algebraiskt tänkande*, vilket inbegriper såväl det vi har i skolalgebran som andra generaliserade metoder. Crawford (2001) har beskrivit det med följande punkter:

- *Ability to think in symbolic language, to understand algebra as generalized arithmetic and to understand algebra as study of mathematical structures.*
- *Ability to understand equality and equations of algebra and to apply these within real world problem solving settings.*
- *Ability to understand relationships of quantities through patterns, defining functions, and applying mathematical modelling.*

Jag vill till detta tillfoga vikten av att ha en strukturell och övergripande syn på beräkningar samt att kunna se tal som något man kan strukturera på mer än ett och kanske på en mångfald sätt. Genom de grundläggande lagar algebran tillhandahåller ges man då möjligheter att få en djupare taluppfattning och en större repertoar med större säkerhet när det gäller beräkningsmetoder.

Att lära sig algebra

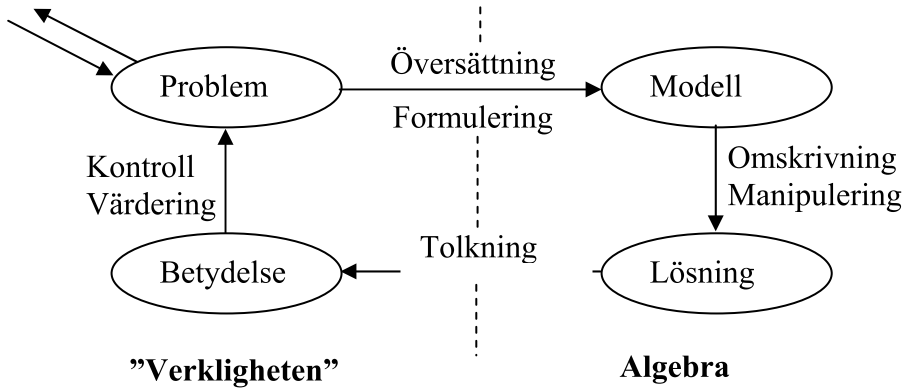
För att fullt ut förstå och kunna använda sig av algebra är det flera olika, och ofta svåruppnådda förmågor som krävs. Förutom den tidigare nämnda taluppfattningen och blicken för aritmetiska strukturer är naturligtvis en förståelse för vad bokstavssymbolerna står för grundläggande. För elever är de x, y, a, b, c eller n som förs in i matematiken ofta konstiga och lite mystiska. Det visar sig också att man gradvis tillägnar sig denna förståelse. I början ser man ofta bokstaven som en förkortning (vilket det också är när bokstäverna används i formler, exempelvis inom fysik). Denna syn förstärks ibland i undervisningen om man för att underlätta för eleverna säger att a står för apelsiner, b för bananer och c för citroner. Eleverna riskerar då att sammanblanda bokstavssymbolerna med de fysiska föremålen istället för att inse att det är *antalet* av varje frukt de betyder, alltså att de står för tal.

Elevers olika uppfattning om vad bokstavssymbolerna står för och hur deras varierande roller i algebran har utretts av flera forskare. Usiskin (1988) gjorde en uppdelning i fyra områden: (1) a*lgebra som generaliserad aritmetik,* (2) a*lgebra som ett problemlösningsverktyg,* (3) a*lgebra som en studie av relationer* och (4) *algebra som en studie av strukturer.* Symbolerna uppträder där i olika roller:

- Generaliserade tal: $2·1 + 1, 2·2 + 1, 2·3 + 1, \ldots$ representeras av $2·x + 1$
- Ekvationer: $2x + 1 = 7x – 5$ x är ett bestämt, men *dolt tal* man ska upptäcka.
- Olikheter: $2x +1 \leq 7$ x representerar *oändligt många tal* inom ett intervall
- Funktioner: $y = kx + m$ k, m *parametrar,* x *oberoende* och y *beroende variabel*

Ett speciellt problem är förhållandet mellan *process* och *objekt*, som först beskrevs av Sfard & Linchevski (1994). Algebraiska formler och uttryck har en *objektkaraktär*, men eleven uppfattar dem ofta som *processer* eller handlingar och får problem med att de inte är ”färdigräknade”. Exempelvis ”förenklas” uttrycket $3x + 5$ till $8x$, eftersom plustecknet innebär att man ska addera. Sfard & Linchevski införde termen *reifikation* (= förtingligande) för det som händer i begreppsuppfattningen när uttryck också kan uppfattas som objekt. Uppfattningarna kan finnas samtidigt och för flexibiliteten i skiftet mellan process och objekt använde Gray & Tall (1994) termen ”*procept*” (*pro*cess–con*cept*).

Karakteristiskt för användningen av algebra i problemlösning är ”översättningarna” mellan olika representationsformer. Om vi antar att vi har ett problem i form av en text, situation etc. måste man ”gå in i algebravärlden”, lösa det algebraiska problemet och sedan återvända till verkligheten:



Modellen kan uttryckas i flera olika representationsformer, och bytena mellan dessa kräver ingående övning med olika aktiviteter i undervisningen för att skicklighet ska uppnås. En tabell över några sådana ”översättningsaktiviteter” kan innehålla följande:

Till \ Från	Situationer Text	Tabeller	Grafer	Formler Symboler
Situationer Text		*tolka tabeller*	*tolka grafer*	*känna igen och tolka*
Tabeller	*samla in data*		*avläsa punkter*	*beräkna värden*
Grafer	*skissa grafer*	*plotta grafer*		*plotta funktioner*
Formler Symboler	*modellera situationer*	*anpassa formel till data*	*anpassa funktion till graf*	*omskriva, manipulera*

(Persson, 2005; efter Janvier, 1987)

En fundamental modell för förståelse av hur vi använder representationsformer i matematiken har skapats av Duval (2006). Han ser det som att vi utnyttjar olika *register* och indelar dessa i två typer. De *multifunktionella* registren, som t.ex. naturligt språk, argumentation, bevis och geometriska figurer, kan inte överföras i algoritmer. I de *monofunktionella* registren, som t.ex. olika notationssystem: numeriska, algebraiska, formella språk eller grafer i koordinatsystem, är de flesta processer algoritmiska.

I bytena av register skiljer Duval mellan t*reatment* (behandling), som är transformationer inom ett register (t.ex. algebraisk lösning av ekvation, hjälpkonstruktioner i koordinatsystem, och c*onversion* (omvandling) då transformationer består av byte av register utan att objekten ändras (t.ex. ekvation→graf, naturligt språk→bokstavsuttryck). Han menar också att ”*den karakteristiska egenskapen hos matematisk aktivitet är den samtidiga mobiliseringen av minst två representationsregister eller möjligheten att när som helst byta från ett register till ett annat*”.

Speciella svårigheter med algebra

Varför upplever då eleverna algebra som så väldigt mycket svårare än andra områden av matematiken? Drijvers (2003) pekar på några viktiga huvudorsaker:

1. Den formella, algoritmiska karaktären hos algebraiska procedurer som eleven inte kan relatera till informella och meningsfulla sammanhang.
2. Den abstrakta nivån på vilken problem löses, jämfört med de konkreta situationer de kommer från, och bristen på mening som eleven lägger i de matematiska objekten på den abstrakta nivån.
3. Behovet av att vara medveten om den övergripande problemlösningsstrategin, samtidigt som man utför de elementära algebraiska procedurerna som är en del i den.
4. Det kompakta algebraiska språket med dess specifika konventioner och symboler.
5. Objektkaraktären hos algebraiska formler och uttryck, medan eleven ofta uppfattar dem som processer eller handlingar (se ovan).

Algebrans speciella konventioner är ofta svåra att genomskåda för eleverna, vilket alla som undervisat inom området har fått erfara. I uttrycket 5x är ett multiplikationstecken underförstått, men ibland ska man inte bry sig om det, som t.ex. när man förenklar 5x + 3x då istället vi ska lägga samman 5 och 3. Men om man ska sätta in $x = 3/4$ så ska man multiplicera, för $5\,3/4$ är något helt annat. Om man ska ta bort a från 4a, så blir det väl 4 kvar? Och om man förenklar $n \cdot n^3$ så blir det väl n^3, för ingenting plus3 blir väl 3?

Prioriteringsreglerna är också svåra att reda ut, och frågan är vad som bestämmer ordningen som eleven utför beräkningarna i. Kanske är det helt visuella faktorer som spelar in. I uttrycken 3^x, $3 \cdot x$ och $3 + x$ avlägsnas symbolerna 3 och x alltmer från varandra, och regeln är väl ”närmast tas först”, eller? Denna visuella pseudoregel kan ställa till med ordentliga problem när eleverna utför olika förenklingar. Kirshner & Awtry (2004) har visat att fel användning av algebraiska regler ofta beror på det visuella intrycket av omskrivningen.

Ex.: $(a+b)^c = a^c + b^c$ Jfr $(a + b)c = ac + bc$

$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} + \frac{a}{c}$ Jfr $\frac{b+c}{a} = \frac{b}{a} + \frac{c}{a}$

När det gäller process ↔ objekt-problematiken ska det tilläggas att det också inom taluppfattning och aritmetik finns problem med ”lack of closure”. Exempelvis kan det vara svårt för elever att skilja mellan bråktalet $\frac{4}{5}$ som inte ska beräknas, och divisionen $\frac{4}{5}$ som ger svaret 0,8. Men oftast krävs det att vi förkortar bråk, som $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$, så hur vet egentligen eleven när uppgiften ska anses vara klar? Kvadratrotuttryck brukar också ställa till besvär. Kvadratrotstecknet innebär att man ska utföra beräkningen som heter kvadratrotsutdragning, eller? Är alltså uttrycket $2 + \sqrt{3}$ ”färdigräknat”?

Insikten att likhetstecknet har mer än en betydelse är en annan viktig grund för förståelsen av algebran, och brister härvidlag ställer stora hinder för elevernas utveckling inom funktioner och ekvationslösning. Sáens-Ludlow & Walgamuth (1998) har undersökt tredjeklassares tolkningar av likhet och likhetstecken och fann stora skillnader. Den vanligaste uppdelningen är i två huvudanvändningar; ”*blir*”, en beräkning ska utföras, och ”*lika mycket som*”, två uttryck jämförs. Men det finns flera. Vasco (2004) föreslår hela sju olika avsikter elever i olika åldrar har när de skriver och tolkar likhetstecken.

Kieran (1992) skiljer på *procedurella* och *strukturella* algebraiska operationer. Exempel:

Procedurellt: En elev löser ekvationen 2x + 5 = 11 genom att sätta in värden på x eller genom att räkna baklänges.
Strukturellt: En elev börjar lösa ekv. 5x + 5 = 2x – 4 genom att subtrahera 2x från båda leden.

Om eleven uteslutande har den procedurella uppfattningen blir det svårt, eller kanske omöjligt att lösa ekvationer som har x-termer i båda leden. Algebran uppfattas då enbart som aritmetiska beräkningar och bokstavssymbolerna är bara provisoriska platshållare för ”riktiga” tal.

Problemen med algebraförståelsen som funnits i grundskolan finns kvar när eleverna börjar gymnasiet, i mindre eller högre grad. Några beror på bristande taluppfattning eller svårigheter med aritmetiken, men huvudparten rör de ovan nämnda (Persson, 2005). Dessutom tillkommer nya problemområden efter hand: rationella uttryck, radikaler, trigonometrisk algebra, logaritmer, komplexa tal och rentav boolesk algebra. De gamla reglerna ska kompletteras med nya specialregler, som att $\log(3x) = \log 3 + \log x$, $2i \cdot 3i = -6$ och $\cos(x+y) = \cos x \cdot \cos y - \sin x \cdot \sin y$. Det finns också stora brister i strukturkänsla helhetssyn när större uttryck ska behandlas. Hoch & Dreyfus (2004) undersökte 11-klasselever i Israel och fann att de flesta inte använde strukturtänkande. T.ex. skulle ekvationen $\frac{1}{4} - \frac{x}{x-1} - x = 5 + \frac{1}{4} - \frac{x}{x-1}$ lösas, och en majoritet av eleverna började med att ta ut minsta gemensamma nämnare, multiplicera båda leden med den, osv.

Tidig algebra

Hur kan man då komma tillrätta med elevernas problem med algebra? Naturligtvis är det viktigt att man som lärare är bekant med de olika aspekterna på algebra, bokstavssymbolerna skilda betydelser, förhållandet mellan process och objekt osv. Men det finns en annan, mera långsiktig strategi, nämligen att föra in algebran gradvis i grundskolan och börja relativt tidigt. Här stöter vi på flera frågeställningar, som exempelvis vid vilken ålder man kan införa bokstavssymbolerna.

Det finns en hel del nyare forskning som gjorts kring algebra i de lägre åldrarna. Jag blev själv varse möjligheten att starta med algebraiska regler vid Matematikbiennalen 2000 i Göteborg. En av punkterna i programmet var ”*Vad har snäckor, pinnar, kottar och luvor med algebra att göra?”* som redogjorde för ett försök med barn i åldrarna 6-13 år. De minsta barnen bildade själva mönster: visuellt, med ljud, lägen etc. Därefter fick de identifiera mönsterdelar och lägga mönsterdelar med hjälp av material som kottar och pinnar (o = kotte, / = pinne).

Exempel: *Parentes:* 5(o//) = ooooo////////// *Faktorisera:* oooooo// = ooo/ooo/ = 2(ooo/)
Kommutativa lagen: /o = o/
Förenklingar: //o/oo = ///ooo = 3(/o)
2a + b + a + 2b = 3a + 3b = 3(a + b)

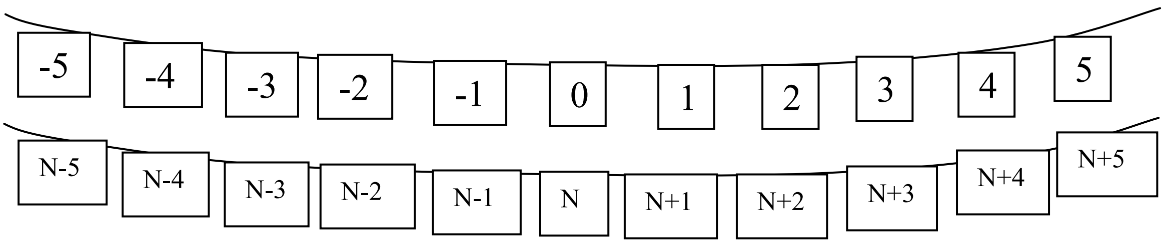
Så småningom infördes bokstavssymbolerna som stenografiska tecken för vad som hände, och därmed fick algebrareglerna en tydlig, verklighetsbaserad förankring.

Traditionellt har man sett begreppsutvecklingen som *Taluppfattning och aritmetik* → *Algebra.* Åsikten har varit att yngre elever inte har abstraktionsförmåga tillräcklig för att förstå variabelbegreppet och använda bokstavssymboler. Dougherty & Slovin (2004) visar i sitt ”*Measure up*”-projekt på Hawaii att barn som går tredje klassen (som andra här) är kapabla att använda algebraiska symboler och generaliserade diagram för att lösa problem.

Ex1. *Ama caught **k** fishes and Chris caught **e** fishes less. How many fishes did Chris catch?*

Ex2. *Reed gave Jackie a strip of paper **w** length-units long. He gave Macy another strip of paper 9 length-units shorter than Jackie's. How long are Macy's and Jackie's lengths altogether?*

Carraher m.fl. (2006) har visat att amerikanska elever i åldern 9 – 10 år klarar av att använda bokstavssymboler för generaliserade tal och kvantiteter. Eleverna lyckades själva diskutera fram variabelbegreppet och även att överföra sina kunskaper från ett problem till ett annat. Metoden de byggde på var tallinjer, den ena utgående från noll och den andra från ett godtyckligt tal N (= anything). Talen $-10 \rightarrow 20$ fästes på långa snören (c:a 10 m), så att eleverna kunde förflytta sig mellan olika positioner. Därefter löstes olika uppgifter kring pengar, temperatur m.m.



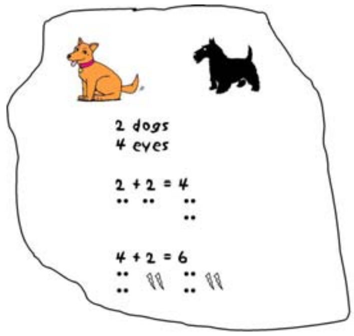
Nästa moment var att jämföra de två tallinjerna. Om N stod över ett visst tal, exempelvis 12, var befann sig då de andra, som N-7? Eleverna fick sedan lösa problem som:

Mary and John each have a piggy bank.
On *Sunday*, they both had the same amount in their piggy banks.
On *Monday*, their grandmother comes to visit them and gives $3 to each of them.
On *Tuesday*, they go together to the bookstore. Mary spends $3 on Harry Potter's new book. John spends $5 on a 2001 calendar with dog pictures on it.
On *Wednesday*, John washes his neighbor's car and makes $4. Mary also made

$4 babysitting. They run to put their money in their piggy banks.
On *Thursday*, Mary opens her piggy bank and finds that she had $9.

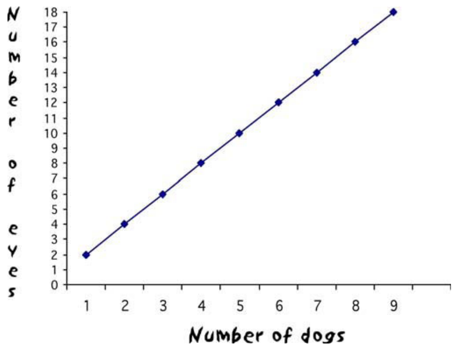
Slutsatserna som dras efter de intressanta diskussionerna med eleverna är flerfaldiga: (1) De menar att de kognitiva hinder man ofta anför för att inte börja med bokstavssymboler för tidigt inte finns. (2) Istället för att bara ge algebraisk betydelse åt redan existerande aritmetik, bör man arbeta för att ändra matematiken mot mer av algebraisk symbolism. (3) Också i de tidigare skolåren kan algebraisk notation stödja matematiklärande inom flera områden. Problemen som uppstår när eleverna börjar med ekvationer till stor del kan undvikas om man tidigare arbetat med funktionssamband.

Blanton & Kaput (2004) undersökte hur barn i förskolan (3-5 år) och i de första skolåren (6-11 år) upptäcker och uttrycker funktionssamband. Förskolebarnen fick räkna ögon och svansar på hundbilder och bl.a. använda uttryck som ”jämnt” och ”udda”. Resultat fördes in i tabeller. Representation för 2 hundar som barn från förskoleklassen gjorde det:



Data från undersökningen visar att elever är kapabla till ett funktionellt tänkande mycket tidigare än man trott. Elever kan:
- använda representationsformer som tabeller
- uttrycka och symbolisera mönster, från naturligt språk till symbolspråk
- förstå samband mellan storheter.

Grafisk representation av antalet ögon i förhållande till antalet hundar i tredjeklassen:



Barbara van Amerom har i sin doktorsavhandling *”Reinvention of early algebra – developmental research on the transition from arithmetic to algebra.”* (2002) arbetat med övergången aritmetik → algebra och har bl.a. frågeställningen: När börjar elever kunna bemästra skillnaderna mellan aritmetik och algebra, och om de inte klarar detta, vilka är hindren de möter och varför? Hon drar en rad viktiga slutsatser:

- Låt elever utveckla symbolism och mening samtidigt, och när eleven är mogen för det. Meningslös symbolism skapar bara problem.
- Man bör skapa övningar i vilka symboliseringen i lösningsproceduren är lika viktig som att finna den rätta lösningen.
- Övningar bör designas så att strukturering och skapande av schemata blir viktigt, meningsfullt och även nödvändigt.
- Elever bör ges möjlighet att reflektera över sina tankestrategier och när det algebraiska tänkandet används.
- Elever bör medvetet konfronteras med välkända algebraiska svårigheter och göras medvetna om dem.
- Elever bör tränas i att rutinmässigt kontrollera sina lösningar för att på så sätt uppnå en högre säkerhet.

Många forskare har identifierat svårigheter med aritmetiken och bristande taluppfattning som grundorsaker till problem med algebra (se t.ex. Norton & Cooper, 2001). Subramaniam & Banerjee (2004) undersökte sambandet mellan elevers förståelse för aritmetik och inledande algebra, och fann att en djupare förståelse för begreppet ”term” i aritmetiken medförde att eleverna kunde hantera

algebraiska uttryck bättre och kunde se den övergripande strukturen. Gallardo & Hernandez (2205) analyserade problem med negativa tal och talet noll i övergången från aritmetik till algebra (12-13-åringar). De använde konkret material, ”Algebraiska block”, och fann att begreppet ”motsatta tal” som adderade blir noll
[a + (-a) = 0] skapar förståelse för förenklingar och ekvationslösning och även likhetstecknets dubbla roll.

Algebra som en röd tråd

Den nyare forskning som gjorts kring algebralärande pekar, menar jag, i en bestämd riktning. Algebra ska inte vara något konstigt man plötsligt inför de sista åren i grundskolan, kanske utgående direkt från införande av x och sedan en rad ekvationer. Istället bör den bilda en röd tråd, inte bara genom en elevs alla skolår på olika sätt, utan även genom övriga matematikområden, precis som taluppfattning och aritmetik också gör. För att inte elever ska uppleva algebran som något lösryckt, onödigt och främmande behöver tidpunkten och metoderna för dess införande och användning diskuteras och i viss mån koordineras.

Vägarna till algebraförståelse är många:

- *Generaliseringvägen:* Algebra är generaliserad aritmetik. Mönster och regelbundenheter vi finner bland de vanliga talen eller i situationer som skapar vanliga tal kan beskrivas med algebraisk mall.
- *Problemlösningsvägen:* Algebra ska användas för att lösa komplicerade problem. Där aritmetiken fallerar, kommer algebran in och möjliggör lösandet.
- *Modelleringsvägen:* Algebra kan skapa modeller av verkliga eller tänkta situationer. Genom att tillämpa algebrans regler kan t.ex. förutsägelser om utfall av experiment kring modellen göras.
- *Funktionsvägen:* Algebra uttrycker samband mellan variabler. Funktionerna kan undersökas med hjälp av algebraiska regler och kan ges olika representationer. Funktionsperspektivet leder vidare till den matematiska analysen.
  (Bednarz, Kieran & Lee, 1996)
- Drijvers (2003) lägger även till *språkvägen*. Algebra ses som ett system av representationer, som ett semiotiskt system.

Många elever säger att algebra är roligt, för att den bygger på så klara regler. När man behärskar dem kan man plötsligt göra väldigt mycket. Men egentligen är det aritmetikens regler eleverna nu fått en högre förståelse för. Målet är ju att våra elever ska lyckas med matematiken och i synnerhet med algebran i slutänden, exempelvis på de nationella proven. Då måste vi också vara beredda att ändra på den ordning vi nu ofta har och börja sätta in algebran i sin rätta plats i undervisningen.

Referenser

Amerom, B. van (2002). *Reinvention of early algebra – Developmental research on the transition from arithmetic to algebra*. Doktorsavhandling, Universitetet i Utrecht, Nederländerna. ISBN 90-73346-48-7

Blanton, M.L. & Kaput, J.J. (2004). Elementary grades students’ capacity for functional thinking. *Proceeedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 2, 135-142.

Carraher, D. m.fl. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 37, No. 2, 87-115.

Crawford, A. (2001). Developing algebraic thinking: Past, present, and future. I H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Red.), *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, s. 192-198). Melbourne, Australia: The University of Melbourne.

Dougherty, B. & Slovin, H. (2004). Generalized Diagrams as a Tool for Young Children's Problem Solving. *Proceeedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 2, 295-302.

Drijvers, P. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment – Design research on the understanding of the concept of parameter*. Doktorsavhandling, Universitetet i Utrecht. ISBN 90-73346-55-X

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies of mathematics,* 61: 103-131.

Gallardo, A. & Hernández, A. (2005). The duality of zero in the transition from arithmetic to algebra. I Chick, H.L. & Vincent, J.L. (Red.) *Proceeedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 3, 17-24.

Gray, E. & Tall, D. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A "proceptual" view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 35, No. 4, 116-140.

Hoch, M. & Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. *Proceeedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 3, 49-56.

Janvier, C. (1987). Translation Processes in Mathematics Education. I C. Janvier, *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics.* NJ: Lawrence Erlbaum.

Kirshner, D. & Awtry, T. (2004). Visual Salience of Algebraic Transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, Vol. 35, No. 4, 224-257.

Norton, S. & Cooper, T. (2001). Students' perceptions of the inportance of closure in arithmetic: Implications for algebra. Paper vid MEC 21, Cairns, Australien.

Persson, P-E. (2005) *Bokstavliga svårigheter – Faktorer som påverkar gymnasieelevers algebralärande*. Licentiatuppsats. Luleå tekniska universitet, 2005:09. Elektroniskt: http://dspace.mah.se/handle/2043/1591

Rivera, F. & Becker, J.R. (2004). A Sociocultural Account of Students' Collective Mathematical Understanding of Polynomial Inequalities in Instrumented Activity. I *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol.4, pp. 81–88.

Sáens-Ludlow, A. & Walgamuth, C. (1998). Third graders' interpretations of equality and the equal symbol. *Educational Studies in Mathematics* 35, 153-187.

Sfard, A. (1995). The Development of Algebra: Confronting Historical and Psychological Perspectives. *Journal of Mathematical behaviour 14*, 15-39.

Sfard, A. & Linchevski, L. (1994). The Gains and Pitfalls of Reification – The Case of Algebra. *Educational Studies in Mathematics 26*, 191-228.

Subramaniam, K. & Banerjee, R. (2004). Teaching arithmetic and algebra expressions. *Proceeedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol 3, 121-128.

Usiskin, Z. (1988). Conceptions of school algebra and uses of variables. I A. Coxford (Red.) *The ideas of algebra, K – 12.* (1988 Yearbook). Reston, VA: NCTM.

Vasco, C. (2004). Eualities revisited: A pragmatic analysis. *Proceeedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.*

Vygotskij, L. (1999). Tänkande och språk. (Öberg Lindsten, K., Övers.). Göteborg: Daidalos. (Original publicerat 1934)

Bengt Johansson är universitetslektor i matematikämnets didaktik och föreståndare för Nationellt Centrum för Matematikutbildning (NCM), vid Göteborgs universitet

Matematiksvårigheter –
Vad kan man lära av matematikämnets historia?

Abstract:

Föredraget handlar om några vägval i matematikundervisningens historia bl.a. med exempel från valet mellan räknebord/romerska talsystemet och algoritmer/hindu-arabiska talsystemet och mellan tal i bråkform och tal i decimalform. Finns det något samband mellan dessa vägval och bristande taluppfattning bland våra elever idag? Vad kan vi lära av historien?

Parallellsesjon 2, mandag kl 15.30 – 17.30

Anne Rasch-Halvorsen har arbeidet som høgskolelektor i matematikk ved Høgskolen i Telemark de 12 siste årene. Hun har sin bakgrunn fra grunnskolen der hun har arbeidet i 25 år. I en periode har hun vært engasjert i KIM-prosjektet ved Telemarkforsking-Notodden og var da med på oppgaveutvikling, pilotering og koding. Hun er en av forfatterene av matematikkverket Tusen Millioner på 5. – 7. trinn og har dessuten hatt ansvaret for Norsk Matematikkråds undersøkelse de seks siste gangene den er gjennomført.

Bruk av KIM-materiale i undervisningen

Innledning

KIM er en forkorting for *Kvalitet i matematikkundervisningen,* og er navnet på et forskningsprosjekt som ble utført ved Telemarkforskning på Notodden, TFN, i perioden 1995 til 2002. Prosjektet ble satt i gang av Utdanningsdirektoratet, og oppdraget ble gitt til TFN med prosjektleder Gard Brekke. Det ble her utviklet kartleggingstester[4] innen flere matematiske emner. Dette skulle være et læringsstøttende materiale. De fleste av oppgavene er derfor diagnostiske. Denne artikkelen fokuserer på oppgaver til bruk innen emnene tall og tallregning i grunnskolematematikk og er kortversjon av min presentasjon på November-konferansen i Trondheim 2007 av deler av KIM-materialet.

Konferansen, med tittelen *Tall og tallforståelse – fra telleremser til algebra,* hadde fokus på arbeidet med solide matematiske begreper i skolens matematikkundervisning. Dette har med kvalitet på kunnskap å gjøre. Diagnostiske oppgaver slik vi finner dem i KIM-materialet, kan brukes til å undersøke soliditeten i en del av elevenes matematiske begreper. Oppgavene kan hjelpe oss til å se hvilke problemer en som lærer i matematikk står ovenfor i arbeidet med god tallforståelse hos elever.

Hvorfor diagnostiske oppgaver?

Diagnostiske oppgaver slik de er utviklet i KIM-prosjektet, kan brukes blant annet for å oppdage hvilke hindringer elever kan møte i prosessen fram mot et solid tallbegrep. Oppgavene brukes for å avdekke misoppfatninger og mangelfullt utviklede begreper som elever kan ha. Dette kan gi læreren nyttig informasjon slik at han/hun kan tilrettelegge for en undervisning der eventuelle misoppfatninger eller svakt utviklede begreper blir fremhevet og bevisstgjort for eleven.
Dersom læreren kjenner elevenes tenkning, er det mulig for han/henne å arbeide preventivt ovenfor aktuelle misoppfatninger. Målet er å komme så tidlig inn i arbeidet mot solide matematiske begreper at en slipper lange og omstendelige avlæringsprosesser.

[4] Nå er KIM-oppgavene for grunnskolen digitalisert.
Se artikkelen til Håvard Johnsbråten i denne konferanserapporten.

Misoppfatninger viser seg ofte å være så grunnfestet hos enkelte elever at de dominerer når elever skal anvende matematikk framfor bruk av logiske tenkning. En dialog mellom lærer og elev hentet fra en undervisningstime viser problemet:

Eksempel 1

Oppgave. En kg kjøttdeig koster 49,90 kr. Hvor mye koster 0,7 kg?

Elev: Skal jeg dele eller trekke fra her?
Lærer: Ett kilogram koster 49,90 kroner. Hva vil du gjøre for å finne hva 2 kilogram koster?
Elev: Gange med to.
Lærer: Og hva vil du gjøre for å finne hva 3 kilogram koster?
Elev: Gange med tre, selvfølgelig!
Lærer: Enn hvis du kjøper 4 kilogram?
Elev: (viser tydelig at dette begynner å bli for kjedelig/selvsagt) Gange med fire da vel!!
Lærer: Hva hvis du kjøper 0,7 kilogram da?
Elev: Er det da jeg må dele?!

Her ser en at eleven ikke følger sin logiske tenkning når desimaltallet 0,7 dukker opp. Ved intervju viste det seg at eleven hadde misoppfatningene *multiplikasjon gjør alltid svaret større* og *divisjon gjør alltid svaret mindre*. Elevens erfaring med multiplikasjon og divisjon var vesentlig knyttet til hele tall. Generalisering ut fra dette ståstedet førte til at han hadde fått en misoppfatning som var så grunnfestet at han ikke stolte på sin logikk.

Hva er kunnskap i matematikk for en elev i grunnskolen?

Idedugnaden som ble gjennomført på parallellsesjonen, førte til at vi kom fram til tre hovedkategorier som tilhørte kunnskap i matematikk på grunnskolenivå:

- faktakunnskap
- ferdigheter
- refleksjon

Sentrale spørsmål sett ut fra grunnskoleperspektiv blir da:
Hvordan lærer elever i grunnskolen fakta innen faget matematikk?
Hvordan går vi lærere frem når målet er gode ferdigheter?
Og hva kan/bør gjøres for å stimulere til refleksjon?

Fakta og ferdigheter ligger på nivået pugg/drill. Dette er noe av det som en hver matematikklærer må forholde seg til. Det er, slik jeg ser det, ikke mulig å oppnå solid matematisk kunnskap hos en elev hvis ikke fakta er pugget/drillet slik at eleven har det helt grunnleggende i bunnen og noe å tenke ut fra. Har de ikke lært seg/pugget hvordan for eksempel plassverdisystemet vårt er bygd opp, blir det ikke soliditet i tallbegrepet til eleven. Dette kan avsløres ved blant annet bruk av diagnostiske oppgaver. Da kan en se hvilken tenkning elever kan ende opp med hvis faktakunnskap ikke er på plass. Et par eksempler hentet fra KIM-prosjektet:

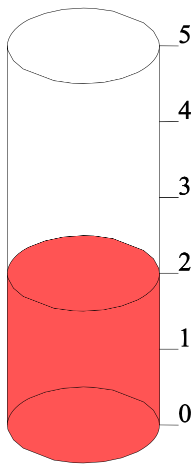
Eksempel 2

Oppgave. Hvor mange tall finnes det mellom 0,47 og 0,48?

Her viser det seg at blant elevene i 7. klasse var det 29 % som svarte *ingen*, og i 9. klasse var det 23 % som ga dette svaret.
Ett tall svarte hele 33 % i 7. klasse. Her var prosenten for 9. klasse 13.
Uendelig mange (tusenvis, så mange du vil eller lignende) ble gitt av bare 5 % i 7. klasse og ikke mer enn 18 % i 9. klasse.
Dette avslører hvor liten soliditet det er i mange elevers desimaltallbegrep på disse klassetrinnene. Misoppfatningen de har er at tallinjen ikke er "tett".

Eksempel 3

Oppgave. Fortell med et desimaltall hvor stor del av hele glasset som er fylt med vann.



Her ble elevene presentert for fire ulike svar de kunne velge mellom:

A 2,5
B 0,4
C 2,3
D 0,2

Det viser seg at blant elevene i 7. klasse var det 21 % som svarte ***2,5*** og i 9. klasse var det 15 % som ga dette svaret. ***2,3*** svarte 24 % i 7. klasse og 21 % i 9. klasse. ***0,2*** ble gitt som svar av 36 % av 7. klassingene og 26 % av 9. klassingene. ***0,4*** var det bare 11 % i 7. klasse og ikke mer enn 31 % i 9. klasse som mente at var riktig. Dette viser at desimalnotasjonen er noe elevene ikke er stødige i.

Gjennom intervju kom det fram at flere av de som svarte 2,5 begrunnet valget sitt med at det var "to av fem"! Noe som viser at de tenker riktig, men at de ikke har faktakunnskapen angående desimalkomma inne. De skiller ikke mellom brøknotasjonen og desimalkomma. De tenker altså riktig, men bruker feil notasjon.

Disse elevene behersker ikke titallsystemet. Misoppfatningen de har er at foran komma står det to deler og bak komma 5 deler. De ser ikke på desimaltall som ett tall i titallsystemet, men bruker komma for å skille to hele tall fra hverandre.

Ser en samlet på elevenes besvarelse av desimaltalloppgavene i KIM prosjektet, er det mye som peker i retning av at overgangen fra tenkningen innen hele tall til desimaltall må være en av de store barrierene i elevers "matematikkarriere".

Min påstand angående kunnskap i matematikk på grunnskolenivå er at noe må pugges og noe må drilles, men vi får lite solide begreper hvis vi som lærere ikke legger opp til mye refleksjon i vår matematikkundervisning. Skal vi få til dette tilsier mine erfaringer at det er viktig med mye muntlig aktivitet. Når elever må sette ord på hva de tenker, blir de på en måte presset til å reflektere, og da kommer etter mine erfaringer også relevante spørsmål for forståelse frem. I denne sammenheng blir også regnefortellinger brukt for å synliggjøre elevers tenkning. Et eksempel fra KIM-prosjektet som viser detter er følgende:

Eksempel 4

Oppgave. Skriv en regnefortelling til 18 : 4,5 = 4

Her kom det tydelig frem at mange elever ikke har forståelse for at divisjonsbegrepet er tosidig. De tenker divisjon som det å dele likt og rettferdig og sliter med å få til en regnefortelling som er logisk.
Svar av typen ***det er fire voksne og en liten gutt som skal dele 18 kaker*** ble gitt av 21 % i 7. klasse og 17 % i 9. klasse. En ***liten gutt*** byttes ut med for eksempel en hund, katt, osv. av noen elever i forsøk på å forklare divisoren 4,5.

Mye tyder på at en god del av elevene har liten erfaring med målingsdivisjon. For 7. klasse viste resultatet at det ikke var mer enn 12 % som behersker målingsdivisjon og for 9. klasse var rett svarprosent 26. Mange av elevene i grunnskolen har tydelig liten erfaring med målingsdivisjon og sliter med den misoppfatningen at divisjon er kun det å dele likt og rettferdig.

Tenkningen på å ***dele 4,5 ganger*** var noe som spesielt mange i 9. klasse uttrykte, 14 %. For 7. klasse var det bare 2 % som tenkte slik.

I 7. klasse var subtraksjonsfortelling en del utbredt. 10 % av elevene på dette klassetrinnet svarte ved å referere til subtraksjonstenkning, mens 6 % i 9. klasse hadde problemer med å skille divisjonstenkning fra subtraksjonstenkning.

De misoppfatningene som kom frem i KIM-prosjektet innen divisjon kan være noe av forklaringen på at mange elever i grunnskolen har problemer med å benytte regneoperasjonen divisjon riktig i praktiske sammenhenger. Mine erfaringer tilsier at denne regneoperasjonen er den vanskeligste for elevene i grunnskolen.

Diagnostisk undervisning

Diagnostisk undervisning er en arbeidsmåte inne matematikk som bygger på kunnskap om elevenes tenkning. Metoden tar sikte på å bygge opp solide matematiske begreper ut fra de forskningsresultater vi kjenner angående blant annet misoppfatninger elever kan ha innen de ulike matematiske emnene. I denne artikkelen er alle eksemplene hentet fra emnet *Tall og tallregning*. Når en benytter diagnostisk undervisning blir det helt sentralt at en stopper opp og diskuterer slik at en får frem refleksjon. Muntlig aktivitet blir viktig og krever mye av "undervisningstiden". Målet er å få til aktivitet som retter seg mot begrepsmessige diskusjoner.

Diagnostisk undervisning er ofte preget av at elevene møter mange tekstoppgaver. Disse oppgavene ses ofte på som viktige elementer i å utvikle solide matematiske begreper. Her må elevene selv velge riktige regneoperasjoner, noe som viser seg vanskelig for mange.

Det blir viktig at oppgaver og aktiviteter som brukes av lærer inneholder de sentrale ideene som et begrep bygger på. Lærerens stoffutvelgelse blir avgjørende for et godt resultat. I diagnostisk undervisning blir det viktig at stoffutvelgelse er slik at elevene får gjort de erfaringer som er nødvendig for å bygge opp det aktuelle begrepet.

Diagnostisk undervisning bygger på at det er mulig å identifisere tankene som elevene gjør seg. Her er det at oppgavene utviklet i KIM-prosjektet kan være god som redskap. Gjennom disse oppgavene møter elevene problemstillinger som er slik at hvis en elev har en bestemt misoppfatning så vil oppgaven synliggjøre denne misoppfatningen.

Innenfor diagnostisk undervisning tilrettelegger en av og til oppgaver/aktiviteter slik at eventuelle misoppfatninger eller svakt utviklede begreper blir fremhevet hos eleven på en slik måte at han/hun *selv ser* at tenkningen ikke holder. Dette kalles å skape en *kognitiv konflikt*. Eleven "møter sin egen feiltenkning i døra".
Som lærer håper en da å oppnå at eleven får et behov for å finne frem til riktig tenkning og stimulere til utforskning fordi det er sin egen feiltenkning eleven blir konfrontert med.

Eksempel 5

Oppgave. Et rektangel er 6 cm langt og 4 cm bredt. Det forstørres slik at det blir 10 cm langt. Hva blir den nye bredden?

Her viser det seg at mange elever tenker additivt og svarer 8 cm.

Da kan en legge til rette for en kognitiv konflikt ved at en gir følgende oppgave:

Oppgave. Et rektangel er 12 cm langt og 4 cm bredt. Det forminskes slik at det blir 8 cm langt. Hva blir den nye bredden?

Hvis de her bruker den samme additive/subtraktive tenkningen oppstår problemet. De aller fleste elever innser at forstørrelse/ forminskning ikke er slik at høyden her blir 0 cm.

Læreren har her lagt til rette for at eleven selv skal innse at tenkningen hans/hennes ikke er holdbar. Det aktiviserer forhåpentligvis mange elevers tenkning slik at de får behov for å finne ut hvorfor de har tenkt feil. En ønsker å stimulere tenkningen ved å gjøre dem nysgjerrige.

Arbeidsmåten diagnostisk undervisning har kognitiv konflikt som et viktig element for å få fokus på de sentrale ideer som et begrep bygger på.

Anne-Gunn Svorkmo og Astrid Bondø har begge 20 års erfaring fra grunnskolen. Anne-Gunn arbeider også 50 % som lærer ved Eberg skole og har ansvaret for Kengurukonkurransen i Norge. Astrid arbeider som prosjektmedarbeider i ulike kompetanse-hevingsprosjekter, i tillegg til at hun arbeider med Nasjonale Prøver. I tillegg har hun vært med på å utarbeide digitale prøver for Oslo kommune. Begge har vært med på prosjekter i Midtre og Indre Namdal, Sør-Helgeland og Vefsn som er deres hovedområder.

Rike og åpne oppgaver- når elevene tar over styringen

Har du opplevd at elevene ikke vil ha pause? At de sitter fordypet og konsentrert med en matematikkoppgave som de ikke vil gi slipp på? Hva er det med disse matematikkoppgavene som er slik at de skaper engasjement og vekker nysgjerrigheten hos elevene? Oppgaver som er så spennende og motiverende at elevene arbeider og regner, mer eller mindre av seg selv, fordi de bare MÅ undersøke og finne svar på nye spørsmål?

Vi har valgt å kalle disse oppgavene for "selvgående oppgaver", og slik vi ser det er de nært beslektet både med problemløsningsoppgaver, rike oppgaver og åpne oppgaver.
Åpne oppgaver er oppgaver hvor utgangspunktet eller målet for oppgaven ikke er eksakt gitt.
Rike oppgaver er problemløsningsoppgaver hvor det kreves både arbeid, tankevirksomhet og anstrengelser fra en person for å finne en løsning *(Hedrén, Taflin og Hagland, 2005)*.
Kantowski (1980) definerer problemløsningsoppgaver på følgende måte:
"A task is said to be a problem if it's solution requires that an individual combines previously known data in a way that is new to him".

Under presenterer vi noen oppgaver som vi mener kan være eksempler på selvgående oppgaver. Vi har prøvd ut alle oppgavene sammen med elever, og vi har erfart at mange av dem har fortsatt med oppgaven i friminuttet. De har stilt spørsmål og laget nye oppgaveformuleringer helt på egen hånd.

<u>Oppgave 1: Tallmønster</u>

a. Hva blir 1·1, 11·11, 111·111 osv.
b. Se etter system/mønster.
c. Fortsetter det evig? Hvorfor/hvorfor ikke?

Vi har opplevd at elever har vært ganske bestemt på og ment at mønsteret vil fortsette "hele tiden". Vi har oppfordret elevene til å lage en hypotese som de prøver ut. Mange mener at de har sjekket nok når de har funnet ett eller to eksempler. Elevene ble utfordret på å finne ut hva ni 1-ere multiplisert med ni 1-ere blir. Stemmer hypotesen? Sjekk om systemet fortsetter når ti 1-ere multipliseres med ti 1-ere?
I første omgang tenker ikke elevene på hva som må til for at mønsteret endres. Det skjer først når de har kommet dypere inn i problemstillingen. Da stiller de også nye spørsmål og lager nye oppgaver.

Spørsmål som elevene har stilt:

- Dannes det et nytt mønster fra ti 1-ere multiplisert med ti 1-ere og oppover til nitten 1-ere multiplisert med nitten 1-ere?
- Hva med 2•2? Se etter et mønster/system. Beskriv det. Lag hypotese. Sjekk om det stemmer.
- Hva med 3•3? Se etter et mønster/system. Beskriv det. Lag hypotese. Sjekk om det stemmer.

Under viser vi noen eksempler på løsninger/mønstre. Det er viktig å legge merke til at andre tallkombinasjoner har løsninger med andre former for mønstre.

1x1= 1
11x11= **12**1
111x111= 1**23**21
1111x1111= 12**34**321
11111x11111= 123**45**4321
111111x111111= 1234**56**54321
1111111x1111111=12345**67**654321
11111111x11111111= 123456**78**7654321
111111111x111111111=1234567**89**87654321

1111111111x1111111111= 1234567**9009**87654321
Hva skjer videre?

2x2=4
22x22=**48**4
222x222=4**92**84
2222x2222=49**37**284
22222x22222=493**81**7284
Hva skjer videre?

3x3= 9
33x33=1089
333x333= 110889
3333x3333=11108889

4x4= 16
44x44= 1936
444x444= 197136
4444x4444= 19749136
44444x44444= 1975269136

5x5= 25
55x55=3025
555x555= 308025
5555x5555=30858025

6x6= 36
66x66= 4356
666x666= 443556
6666x6666= 44435556
66666x66666= 4444355556

9x9= 81
99x99= 9801
999x999= 998001
9999x9999= 99980001

Vi kan lage matriser og studere systemet videre. Hva skjer og hvorfor blir det slik?

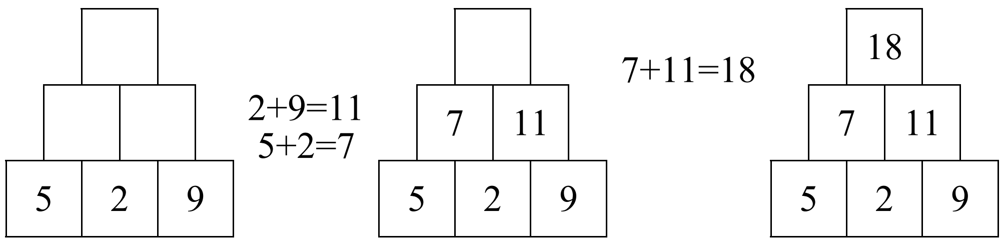
	1	**11**	**111**	**1111**	**11111**	**111111**	**1111111**
1	**1**	11	111	1111	11111	111111	1111111
11	11	**121**	1221	12221	122221	1222221	12222221
111	111	1221	**12321**	123321	1233321	12333321	123333321
1111	1111	12221	123321	**1234321**	12344321	123444321	1234444321
11111	11111	122221	1233321	12344321	**123454321**	1234554321	12345554321
111111	111111	1222221	12333321	123444321	1234554321	**12345654321**	123456654321
1111111	1111111	12222221	123333321	1234444321	12345554321	123456654321	**1234567654321**

	3	**33**	**333**	**3333**	**33333**	**333333**	**3333333**
3	**9**	99	999	9999	99999	999999	9999999
33	99	**1089**	10989	109989	1099989	10999989	109999989
333	999	10989	**110889**	1109889	11099889	110999889	1109999889
3333	9999	109989	1109889	**11108889**	111098889	1110998889	11109998889

Oppgave 2: Tallpyramiden

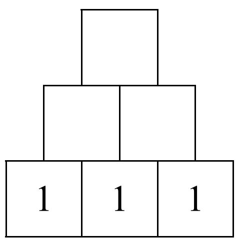
En tallpyramide fungerer slik at to tall som står ved siden av hverandre i samme etasje, legges sammen og danner tallet i ruta rett ovenfor i neste etasje (se eksempel 1).

Eksempel 1:

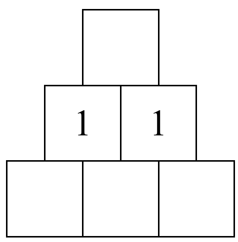


Pyramide 1: Hvilket tall vil da stå i ruta på den øverste etasjen? Finnes bare en løsning?

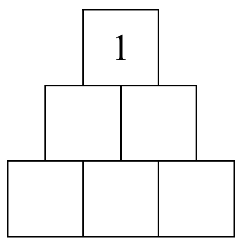
Pyramide 1



Pyramide 2



Pyramide 3



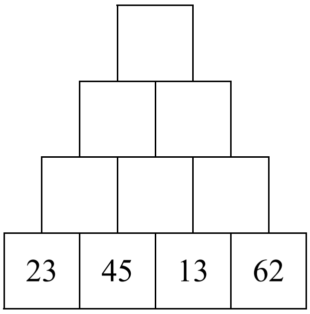
Pyramide 2: Hvilke tall kan stå i rutene i 1. etasje på pyramide 2? Finnes det flere løsninger? Prøv både med brøk, desimaltall og negative tall.

Pyramide 3: Hvilke tall kan stå i rutene i 1. etasje på pyramide 3? Finnes det flere løsninger? Prøv både med brøk, desimaltall og negative tall.

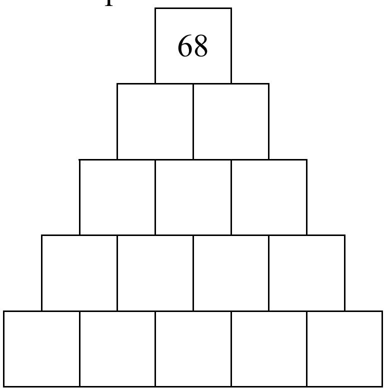
Tallpyramidene kan utvides med flere etasjer. Dersom det er fire ruter i nederste etasje og vi har fire gitte tall kan oppgaven være å finne tallet i toppen. Hvordan må disse tallene plasseres slik at tallet i toppen er størst mulig/minst mulig? (eksempel 2)

Andre ganger kan tallet i toppen være gitt, og oppgaven kan være å finne hvilke tall som passer i nederste etasje. Finnes det flere løsninger? Hvor mange løsninger finnes? Har antall løsninger noen sammenheng med antall etasjer? (eksempel 3)

Eksempel 2:



Eksempel 3:



Hva hvis vi multipliserer de to tallene som står siden av hverandre?
Hvilket tall vil da stå i ruta på den øverste etasjen?
Hva hvis vi bruker bokstaver og algebraiske uttrykk i stedet for tall?

Se andre eksempler på oppgaver med tallpyramider side 34 – 41 i Skolenes Matematikkdaghefte 2007 og Kurt Klunglands artikkel i Tangenten 4/2006.

<u>Oppgave 3: Når blir det slik?</u>

Skriv to tosifrede tall og multipliser dem.
Får du samme svar dersom du sifrene bytter plass?
$24 \cdot 63 = 42 \cdot 36$
Blir det i så fall alltid slik?
Finn lignende eksempler og prøv!
Lag en hypotese og sjekk om den stemmer. Hvorfor/hvorfor ikke?

En mulig forklaring:

Vi kaller sifrene a, b, c og d og sjekker når dette stemmer:
$$(10 \cdot a + b) \cdot (10 \cdot c + d) = (10 \cdot b + a) \cdot (10 \cdot d + c)$$
$$(100 \cdot a \cdot c + 10 \cdot a \cdot d + 10 \cdot b \cdot c + b \cdot d) = (100 \cdot b \cdot d + 10 \cdot b \cdot c + 10 \cdot a \cdot d + a \cdot c)$$
$$(100 \cdot a \cdot c + b \cdot d) = (100 \cdot b \cdot d + a \cdot c)$$
$$99 \cdot a \cdot c = 99 \cdot b \cdot d$$
$$a \cdot c = b \cdot d$$

Dette gjelder når produktet av enerne er lik produktet av tierne.
Vi sjekker eksemplet vårt: $24 \cdot 63$
Produktet av enerne er lik produktet av tierne: $2 \cdot 6 = 4 \cdot 3 = 12$

Oppgave 4: Myntoppgaver

Det finnes mange klassiske problemløsningsoppgaver med mynter.
Her er et par eksempel:

1. Vi leker butikk. Hva hvis vi hadde bare 3-kr og 5-kr? Det er ingen vekslingsmuligheter i butikken. Hvilke priser kan da finnes i butikken? Hva er den høyeste prisen, dvs. den høyeste summen, som ikke kan dannes ved hjelp av disse to gitte myntenhetene?
2. Hva hvis vi hadde bare 5-kr og 7-kr? Vi kan fremdeles ikke veksle. Hvilke priser finnes da i butikken? Hva er den høyeste prisen, dvs. den høyeste summen, som ikke kan dannes ved hjelp av disse to gitte myntenhetene?

Løsning på oppgave 1:
Varene i butikken kan ikke koste 1, 2, 4 og 7 kr fordi disse summene ikke kan dannes ved hjelp av 3-kroner og/eller 5-kroner. Alle priser høyere enn 7 kroner kan dannes ved hjelp av de to gitte myntene. Vi vet at summen 8 kan dannes med en 5-kr og en 3-kr, 9 kan dannes med tre 3-kr og 10 kan dannes vha. to 5-ere. Da vet vi at det er mulig å lage alle påfølgende tall fordi vi kan legge en 3-kr til 8, 9, og 10 slik at vi får 11, 12 og 13 osv.

I 1884 utledet James Joseph Sylvester følgende formler (Vi kaller mynt 1 for a_1 og mynt 2 for a_2):

Formel for den størst summen som ikke kan dannes med to myntenheter er $(a_1 \cdot a_2) - (a_1 + a_2)$, dvs. differansen mellom produktet og summen av de to myntenhetene.
I oppgave 1 fant vi at den største summen som ikke kan dannes vha. myntene 3-kr og 5- kr, var 7. Stemmer det med formelen? a_1 er her 3 og a_2 er 5.
$(3 \cdot 5) - (3 + 5) = 7$.

Formel for antall summer, dvs. priser i butikken, som ikke kan dannes er
$\frac{1}{2}(a_1 - 1)(a_2 - 1)$
Vi fant at det ikke er mulig å danne summene 1, 2, 4 og 7 i oppgave 1, dvs. til sammen fire summer. Det stemmer med den andre formelen til Sylvester fordi
$\frac{1}{2}(3 - 1)(5 - 1) = 4$

Disse formlene gjelder kun for to myntenheter og når det ikke er tillatt å veksle. Hva hvis det er tillatt å veksle i oppgavene overfor? Hvilke priser kan vi da ha i butikken?

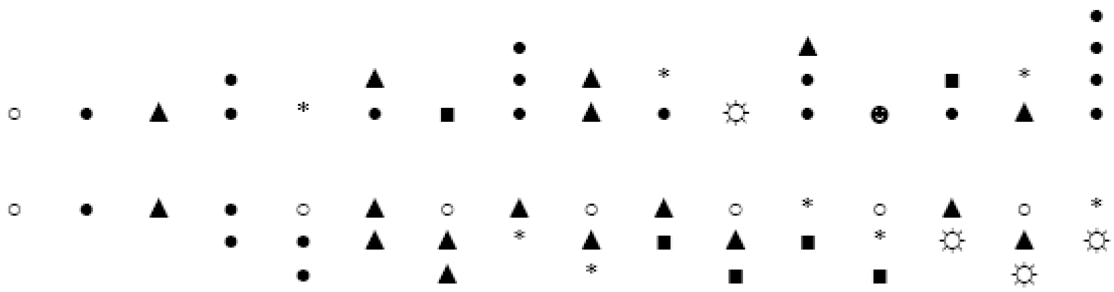
Carl Winsløw er professor i matematikkens didaktik ved Institut for Naturfagenes Didaktik, Københavns Universitet. En del af hans forskning drejer sig for tiden om japanske lektionsstudier i matematik og deres relation til designarbejde indenfor rammerne af teorien om didaktiske situationer, i samarbejde med T. Miyakawa (U. of Michigan). Efter sin ph.d. fra Tokyo U. (1993) har han flere gange besøgt Japan mhp. at studere japansk matematikundervisning. Hjemmeside: www.naturdidak.ku.dk/winslow

(Billedet er taget i Yonezawa i april 2006, 200 km nord for Tokyo)

Et mysterium om tal – og japanske lektionsstudier

1. Appetitvækker: Et mysterium om tal

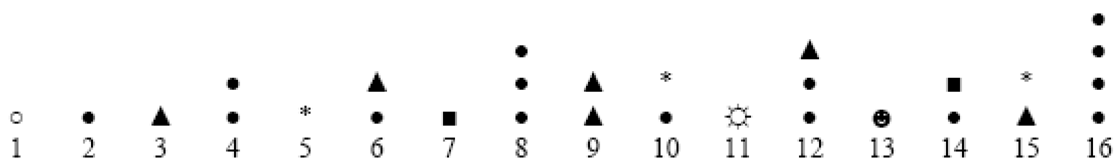
I de norske fjelde finder raske bjergbestigere en dag et forladt rumskib fra en fremmed planet. På rumskibets sider er indgraveret to mystiske budskaber, som ingen rigtig kan forstå. De ser ud som på figur 1.



Figur 1: Symbolstrenge fra det ydre rum.

Selvom det ser mystisk ud, virker det som der er en slags system i de to symbolrækker; fx indeholder den første række symbolet • i hver anden række. Kunne det have noget at gøre med tal?

Faktisk er det jo en næsten "instinktiv" reaktion hos os at nummerere ting, og det virker jo som om at der er tale om en række sammensatte tegn i hver række. Nummerer man den første række (som på figur 2), så er der måske flere ting der springer i øjnene, i det mindste hvis øjnene er lidt matematiktrænede.



Figur 2: Første symbolrække nummereret.

Fx kunne man lægge mærke til, at "søjlerne" med kun ét symbol er nummereret 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13; altså netop de tal, som ikke har ægte divisorer. Med andre ord, de er "primtal", bortset fra tallet 1, men det er mere en praktisk konvention at det normalt ikke regnes som primtal. Man kunne også lægge mærke til, at de øvrige søjler alle er sammensat af symbolerne fra disse specielle søjler; fx er søjle 4 sammensat af to gange • (symbolet som står alene i søjle 2).

Og som allerede nævnt genfinder vi symbolet • i hver anden søjle, svarende til de *lige tal* (på norsk: *partallene*). De lige tal er jo netop de tal, som 2 går op i; når der så i 4. søjle står der •• (på højkant), og i 8. søjle •••, så kunne det jo læses som hhv. 2·2 og 2·2·2. Hypotesen bekræftes af de øvrige søjler, fx finder vi i søjle 14 symbolerne for 2 og 7, som altså kan læses 2·7. Forstået som matematisk meddelelse, udsiger symbolrækken dermed, at tallene – i det mindste fra 1 til 16 – enten ingen ægte divisorer har, eller også kan skrives som produkt af de foregående tal (uden ægte divisorer). De ekstraterrestriske forfattere af meddelelsen er med stor sandsynlighed matematikere! – og de har formuleret deres version af flg. sætning, der udsiger noget helt grundlæggende om tallenes anatomi:

Dette nydelige talteoretiske resultat er meget vigtigt, og bruges i mange sammenhænge. Fx i forbindelse med *kodning*, der normalt bygger på, at det for store tal kan være særdeles vanskeligt at *finde* primtalsfaktorerne, selvom man altså ved, at de findes og er entydigt bestemt.

På samme måde kan man analysere den anden række af symboler, og nå frem til et andet resultat om primtal, der dog er lidt anderledes, eftersom intet bevis kendes (Goldbachs formodning). Det overlades til læseren at formulere resultatet (svarende til anden symbolrække) og undersøge den historiske baggrund for den jordiske udgave!

Aritmetikkens Fundamentalsætning**.** Ethvert naturligt tal kan på entydig måde skrives som et produkt af primtal. (Entydigheden gælder faktorerne i produktet, ikke deres orden).

2. En japansk superlektion

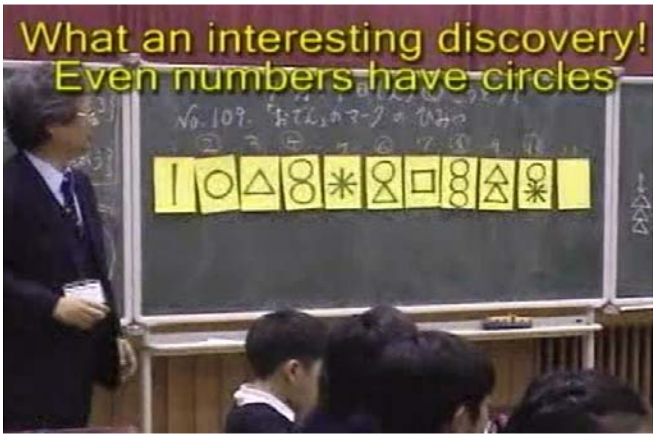
Man kan måske spørge, hvad interesse nogen kan have i at stille så mærkelig en opgave som den, vi har diskuteret ovenfor. Hvorfor "gemme" et matematisk resultat i mystiske symboler under påskud af, at de er afsat af rumvæsener? Hvorfor ikke gå lige til sætning og bevis (hvis beviset altså findes)? Disse spørgsmål er på en grundlæggende måde didaktiske, for de drejer sig om *hvordan* et stykke matematik præsenteres, og det må selvfølgelig afhænge af *hvem det præsenteres for*. At matematik selv på en fundamental måde er et didaktisk fag, kan man se allerede i tidlige lærerværker som "Euklids elementer" (der faktisk indeholder en teori om primtal): en "god" matematisk præsentation er en, der er udformet med stor sans for detaljen og klarheden, med henblik på at interessere og overbevise en bestemt målgruppe. Nu er der selvfølgelig fremstillinger af talteori, der som foreslået går direkte til sætningen og dens bevis – Euklid, eller moderne lærebøger i talteori, kunne være eksempler på en sådan tilgang. Men de henvender sig jo også til en særlig målgruppe: andre matematikere, eller matematikstuderende. Svaret på spørgsmålet om en "passende" tilgang kunne tage sig anderledes ud, hvis målgruppen fx var børn i 4. klasse, der for første gang skal præsenteres for ideen om "primtal" og "sammensatte tal".

Ideen til ovst. opgave – i det mindste den del, der vedrører den første symbolrække ("aritmetikkens fundamentalsætning", som vi lidt pompøst fortolkede den) – kommer fra en matematik-lektion konstrueret af et lærerteam under ledelse af den japanske matematiklærer Kozo Tsubota. Og lektionen er netop beregnet for børn i 4. klasse. I Tsubotas lektion præsenteres opgaven dog lidt anderledes: i første omgang er symbolerne ikke givet som en lang række, men de er tegnet hver for sig på store gule kort, der er fastgjort med magneter til en tavle, hvor de er anbragt tilfældigt mellem hinanden. Desuden er kun de første 10 symboler taget med; og derudover er der to gule kort, som der ikke er tegnet noget på (se figur 3).

Udfordringen for eleverne er nu – givet dette virvar af symboler – at finde ud af, hvad der skal stå på de to tomme kort. Det kan de selvfølgelig i første omgang kun gætte på; eleverne foreslår ivrigt

forskellige symbolkombinationer, der ligner de 10 givne, men er forskellige fra dem (disse tegnes på tavlen).
Det er en aktivitet, som eleverne i begyndelsen går ivrigt op i – men det bliver hurtigt utilfredsstillende, at der blandt de forskellige forslag ikke rigtig kan opnås enighed om noget der er ”rigtigt” eller blot ”mere rigtigt”. Læreren foreslår nu, at for at afgøre, hvad der skal stå på de to blanke kort, må man have et ”system” i de første 10 symbolkombinationer, og beder dem om at overveje dette. Nogle foreslår fx at ordne dem efter hvor mange enkeltsymboler der er på kortet; men det er stadig ikke rigtig nok til at finde ”systemet”. Læreren siger så: ”Nu vil jeg vise jer min ordning af symbolerne, så kan I se om I kan finde systemet”. Derefter ordner han symbolerne som vist i forrige afsnit, som en række bestående af de 10 symbolkombinationer, nummereret fra 1 til 10. Og så udspiller ”afsløringen” af systemet sig nogenlunde som i introduktionen (se figur 4). Herunder opstår den grundlæggende ide om primtal, nemlig de tal, som må skrives med et nyt symbol, fordi ingen af de foregående tal er divisorer. Og diskussionen af, hvordan de to blanke kort – ”11” og ”12” – kan skrives, er nu en god lejlighed til hhv. at fæstne denne ide (fordi der skal laves et nyt symbol til 11) og til at bruge princippet om faktorisering (12 = 2·2·3).

Figur 3: Første "møde" med symbolkombinationerne (fra CRICED, 2006)



Figur 4: Hovedfasen: der arbejdes med ”rækken” af symbolkombinationer (ibid.)

Et foreløbigt svar på, hvad ”interessen” i den mærkelige opgave med symbolkombinationerne er, kunne altså være at børn i 4. klasse – når den pakkes passende ind – rent empirisk finder en interesse i den, og derved får en mulighed for at nærme sig begreberne primtal og faktorisering, der her udgør ”nøglen” til at løse mysteriet. Det er vanskeligt at argumentere teoretisk for, at en sådan opgave – i en given indpakning – ”virker” for en given målgruppe (om end det undertiden er muligt at give relevante teoretiske argumenter, se fx Winsløw, 2007). Det er i høj grad et empirisk spørgsmål om en given målgruppe kan have udbytte af en opgave. Deltagerne i denne workshop fik lejlighed til at stifte bekendtskab med relevant empiri vedr. opgaven med de mystiske symboler (inkl. den netop beskrevne ”indpakning”), i form af klip fra en videooptagelse af lektionen (CRICED, 2006). Videoen dokumenterer, at en japansk 4. klasse faktisk arbejder med opgaven, og – gennem de nævnte skridt – løser den. Erfarne lærere vil også kunne forestille sig, at denne erfaring hos eleverne senere kan bruges i forbindelse med andre aktiviteter og opgaver vedr. primtal og faktorisering.

3. Didaktisk miljø og didaktisk situation

Vi har ovenfor beskrevet en ”opgave” i to forskellige ”indpakninger” (meddelelse på rumskib og mystiske symboler på gule kort, der efter et stykke tids udforskning af læreren anbringes i rækkefølge). Eksemplet kan bruges til at illustrere to afgørende typer af valg, som skal foretages i forbindelse med en hvilken som helst undervisning i matematik:

- der skal være en *aktivitet* (her, en opgave) for eleverne som har et matematisk indhold

- aktiviteten skal *organiseres* på en måde der gør den tilgængelig for eleverne og giver dem mulighed for at få det ønskede udbytte af den (læring i en eller anden forstand).

Vi bruger et par begreber fra teorien om didaktiske situationer (Brousseau, 1997, cf. også Winsløw, 2006, kap. 7) til at gøre diskussionen af disse to afgørende valg mere præcis: *didaktisk situation* og *didaktisk miljø.*

Aktiviteten består i dette tilfælde af at finde ud af meningen med den tidligere omtalte række af symboler, og det matematiske indhold drejer sig om primtal og deres rolle som byggestene for de naturlige tal. Det gælder om at *eleverne* udøver denne aktivitet, hvilket selvfølgelig ikke sker af sig selv. Der skal skabes en *didaktisk situation* som gør det muligt for dem ("didaktisk" henviser her til arrangørens intention om at belære den, der anbringes i situationen). Helt konkret skal de præsenteres for symbolerne og problemstillingen, måske vha. fysiske objekter (de gule kort) mv.; og det gælder om at indrette alle disse forhold omkring elevernes arbejde sådan, at det er udfordrende uden at være (eller virke) umuligt. Forholdene omkring elevernes arbejde – i den konkrete situation – kaldes det *didaktiske miljø*. Det er de omgivelser der skal give den matematiske aktivitet næring og livsbetingelser – samtidig med at der en vis modstand, der skal overvindes. Det er et kunstigt miljø, i den forstand at det er udtænkt og arrangeret af læreren mhp. at eleverne lærer noget matematik. Det er også ofte en pointe, at det, der skal læres, er "gemt" i det didaktiske miljø – og at situationen er lagt til rette, så det bliver udfordrende og lærerigt at "finde" den gemte viden.

I eksemplet udgør de mystiske symbolkombinationer kernen i det didaktiske miljø: det er i dem, at den tilsigtede viden er gemt, i den forstand at tolkningen af dem forudsætter et ræsonnement om primtal og faktorisering. Men symbolerne gør det ikke alene; også lærerens instruktioner udgør en væsentlig ramme om problemstillingen og dermed om elevernes aktivitet. Når disse instruktioner er givet, må læreren – i det mindste i kortere perioder – overlade eleverne til sig selv – og "spillet" i det didaktiske miljø. Des mere velindrettet det didaktiske miljø er i forhold til elevernes forudsætninger og den tilsigtede viden, des mere kan eleverne lære af dette spil – netop når læreren trækker sig tilbage. Symbolkombinationerne ser ganske rigtigt mystiske ud ved første øjekast, men i det mindste når de er arrangeret i rækkefølge, er det muligt at tænke sig frem til at de svarer til faktoriseringer af tal, og at faktorerne udgøres af netop de tal, der ikke selv kan faktoriseres. Faktisk er det måske en særskilt pointe at symbolerne *ikke* er dem, der almindeligvis bruges for tallene: et positionstalssystem som det, vi normalt anvender, er jo baseret på tallenes *additive struktur* (12=10+2), mens de foreslåede symbolkombinationer netop angiver tallene ud fra deres multiplikative struktur ($12 = 2 \cdot 2 \cdot 3$). Alternativet – at præsentere 'regnestykkerne' 1=1, 2=2, 3=3, $2 \cdot 2=4$, 5=5, $2 \cdot 3=6$ etc., ville givet ikke have samme effekt, om end der stadig kunne tænkes at foreligge et teoretisk fortolkningsarbejde. For børn i 4. klasse er de mystiske symboler utvivlsomt i sig selv en mulig kilde til fascination (med eller uden rumskib); og det er jo også dem, der fungerer som "skjulested" for det stykke matematik, som det er hensigten med miljøet at lade eleverne finde.

I en undervisningssituation er det endvidere karakteristisk at elevernes arbejde skal sættes i gang, reguleres undervejs (om nødvendigt) og afsluttes – normalt med læreren som ansvarlig i første og sidste led. Mere generelt skal lektionen *organiseres* omkring spillet i det didaktiske miljø, og der er her mange valgmuligheder. Skal problemstillingen præsenteres på en gang (som i "appetitvækkeren" til denne artikel) eller i flere tempi (som i Tsubotas lektion)? Under hvilke omstændigheder kan eller skal læreren gribe ind i elevernes arbejde i miljøet? Skal arbejdet med det didaktiske miljø være fælles for hele klassen, foregå i grupper eller – evt. i kortere perioder – individuelt? Hvorledes skal der afsluttes? Skal de faglige hensigter og pointer formuleres som konklusion, eller skal der lægges op til en fortsættelse senere? Man kan sige, at selvom vi har beskrevet det didaktiske miljø, som eleverne skal arbejde med, så mangler vi stadig en plan for iscenesættelsen – "drejebogen" – for den konkrete lektion. Og alle de beslutninger, dette indebærer, vil også kunne have stor betydning for om arbejdet i miljøet lykkes.

Den japanske lektion, vi nævnte, er opbygget med to hoveddele:
- en kortere ”introduktionsfase” hvor læreren introducerer problemstillingen (hvad skal der stå på de to blanke kort) og eleverne kommer med umiddelbare bud på ”lignende symbolkombinationer” ; dette didaktiske miljø har ikke tilstrækkelig modstand til at kunne differentiere mellem forskellige ”løsninger”, og det tjener da også mere til at gøre eleverne fortrolig med problemstillingen og miljøets materielle elementer.
- en længere ”udforskningsfase” i et mere velstruktureret didaktisk miljø, hvor eleverne får konkrete spørgsmål og i korte perioder overvejer dem individuelt, og hvor der som opsamling på hver af disse perioder af læreren udpeges elever, som forklarer deres bud på svarene.

Man lægger i øvrigt mærke til, at
- i opsamlingsfaserne er læreren i meget høj grad ordstyrer, men validerer ikke elevernes svar som ”rigtige” eller ”forkerte”, kun udtrykker han i nogle tilfælde at de er ”interessante”;
- lektionen slutter med at symbolkombinationerne for 11 og 12 findes; forkerte bud på det sidste (svarende fx til 2+2+2+2+2+2) elimineres af andre elever, ikke af læreren;
- læreren forsøger ikke at samle op på lektionen fx i form af mere generelle ideer såsom definitionen af primtal eller princippet om faktorisering i primtal; lektionen slutter slet og ret med at det oprindelige problem er løst af eleverne.

4. Drejebogen som kulturelt ”script”

At en lektion forløber med visse faser, der mere eller mindre synligt tjener til at muliggøre elevernes arbejde i et didaktisk miljø, er noget man især bliver opmærksom på ved observation af lektioner i en helt anden kontekst en ens egen. Et overraskende resultat at de såkaldte TIMSS-videostudier (se Stigler&Hiebert, 1999) er nemlig at der i en given skolekultur findes meget regelmæssige ”scripts” for matematiktimerne. Det betyder, at lektionsstrukturen varierer overraskende *lidt* indenfor en given skolekontekst, mens der derimod kan være meget store forskelle fra et kulturelt system (som det japanske) til et andet (som det norske):

> The scripts for teaching in each country appear to rest on a relatively small and tacit set of core beliefs about the nature of the subject, about how students learn, and about the role that a teacher should play in the classroom. These beliefs, often implicit, serve to maintain the stability of cultural systems over time. (Stigler & Hiebert, 1999, 87-88)

Opdagelsen og beskrivelsen af disse ”scripts” for matematiklektioner er blandt hovedresultaterne i TIMSS-videostudierne. Ideen er her at sammenligne videooptagelser fra forskellige lande af et stort antal tilfældigt udvalgte matematiklektioner på et givet klassetrin – både mht. lektionernes overordnede struktur og mere specifikke detaljer i deres forløb. Allerede de første TIMSS-videostudier fra 1995 viste meget slående forskelle mellem indhold og struktur i matematiklektionerne i Japan og i de to andre lande (USA og Tyskland). Et af de mere overordnede resultater er at matematiklektioner i Japan typisk har nogenlunde flg. struktur (”drejebog”):
- Læreren introducerer et åbent problem (på japansk, *hatsumon*)
- Eleverne arbejder med problemet, læreren observerer deres arbejde (*kikan-shido* – læreren ”lytter”)
- Eleverne præsenterer deres ideer eller løsninger, idet læreren giver dem ordet i en rækkefølge der er bestemt af hans observationer under *kikan-shido* [en fase der kaldes *takuto* efter tysk *Taktstock*, dirigentstav]
- Disse diskuteres på klassen og af læreren (*neriage*, en slags rationel forhandling)
- Læreren afrunder (*matome*)

I Tsubotas lektion finder vi klart disse faser, idet den første del (udforskning af de uordnede symbolkort) fungerer som introduktion til problemstillingen, og en vis fortroliggørelse med dens objekter. Og vi har allerede bemærket, at afrundingen (*matome*) ikke nødvendigvis betyder at der konkluderes andet eller mere end at "vi har arbejdet med et problem og fundet et eller flere svar".

De "drejebøger", som TIMSS-videostudierne har fundet i flere vestlige landes matematikundervisning, kan siges at være variationer over flg. struktur:

- Læreren minder om hvad klassen arbejdede med sidst
- Læreren introducerer en ny opgavetype og en teknik, der vises nogle eksempler
- Eleverne arbejder selv med flere eksempler, hvor de skal bruge den viste teknik; læreren går rundt og hjælper de, der har brug for det.

Der er – til dels som en konsekvens af denne struktur – betydelig mindre fokus på at eleverne selv udvikler metoder eller teknikker, og det fremgår også på andre måder af TIMSS-videostudierne, at en langt større andel af matematiktimerne i fx USA går med at eleverne træner brugen af "standardteknikker". Man skulle jo så egentlig tro, at elever med en sådan baggrund skulle klare sig relativt godt i internationale tests, der netop ofte har en tendens til at basere sig på korte skriftlige opgaver der kan løses ved at mobilisere en standardteknik. Men faktisk klarer japanske elever sig bedre i sådanne tests end eleverne i stort set samtlige vestlige lande (og det i såvel TIMSS-undersøgelserne som PISA-undersøgelserne).

Interessen for japansk matematikundervisning har da også været voksende i de vestlige lande, ganske særlig i de seneste 10 år. Det er ikke mindst fordi vestlige observatører – fx indenfor rammerne af TIMSS-video studierne – har opdaget, at tidligere tiders fordomme om en disciplinbaseret japansk terpekultur ikke svarer til, hvad man ser i virkelighedens japanske matematiktime. Tværtimod: japansk matematikundervisning er, i det mindste i barneskolen, præget af en betydelig kreativitet både hos lærere (i planlægningen af timerne) og hos eleverne (i deres arbejde matematiktimerne). De to ting hænger sammen, fordi matematiklærernes kreativitet især retter sig mod at maksimere elevernes matematiske kreativitet i timerne. For at forstå japansk matematikundervisning – med disse ret bemærkelsesværdige udtryk og resultater – er det altså i høj grad relevant at se på *de japanske matematiklæreres arbejdsformer og metoder.* Og her støder man så hurtigt på et højst overraskende fænomen, som også ligger bag Tsubotas lektion: de såkaldte *lektionsstudier* (på engelsk, *lesson studies*, og på japansk: 授業研究(*jugyou kenkyuu*). Det sidste afsnit i denne artikel er, som sidste halvdel af den tilsvarende workshop på novemberkonferencen, viet til en kort diskussion af dette fænomen, som også sætter de tidligere afsnit i et nyt lys.

5. Lektionsstudier – når undervisning bliver kollektiv

Et lektionsstudium handler kort sagt om at *planlægge en lektion med et bestemt fagligt mål* (som det gælder om at præcisere, men som normalt også refererer til om lektionens funktion i et større undervisningsforløb). Lektionsstudier udføres af *teams af* faglærere, typisk *over et par måneder*. Helt centralt i lektionsstudiet står *lektionsplanen*, som er en minutiøs beskrivelse af arbejdets resultater – herunder naturligvis "drejebogen" for lektionen. Det er også vigtigt, at lektionsstudier i princippet er offentlige, og resultaterne (lektionsplanen) i princippet kan bruges af andre lærere; samtidig er lektionsstudier baseret på, at lærerne *observerer hinandens undervisning* (under brug af den fælles lektion). Endelig er der tale om en meget udbredt praksisform i Japan; stort set alle grundskoler har regelmæssige lektionsstudier (Stigler & Hiebter, 110-111).

Det måske umiddelbart mest overraskende er nok, at man i et lektionsstudium arbejder i flere måneder på at udforme *en enkelt* lektion. Det er da en forberedelsesfaktor der vil noget! Men der er flere forklaringer på, at det ikke er så dumt endda:

- For det første kommer man virkelig i dybden med det faglige indhold ikke bare i den foreliggende lektion, men også i relation til andre dele af læreplanens matematikindhold – både forudsætninger for lektionen og de ting, den indvundne viden senere skal bruges til. At fokusere på en enkelt lektion er således også med til at styrke lærernes bevidsthed og viden om den faglige sammenhæng mellem lektioner.
- Fordybelsen i det faglige indhold sker *fra elevernes synspunkt* i den forstand, at det drejer sig om at optimere det *didaktiske miljø*, som elevernes møder indholdet i, og rammerne omkring dette miljø (situationens struktur/forløb).
- Den lektion, som er under udvikling, afprøves flere – ofte mange gange – i forskellige versioner, hvor et af lektionsstudiegruppens medlemmer underviser, og de andre observerer. På den måde bliver genstanden for observationen ikke den enkelte lærer, men den fælles lektion (herunder både situationens struktur og miljøets detaljer), som det gælder om at udvikle.
- På en skole, hvor der regelmæssigt afholdes lektionsstudier, vil man over tid få opbygget et "bibliotek" af lektionsplaner, og lektionsplaner publiceres i øvrigt både regionalt og (for særlig fremragende skolers vedkommende) nationalt. Dermed vil lektionsstudier typisk tage udgangspunkt i tidligere lektionsplaner – enten egne eller andres. Det medvirker til at skærpe sansen for detaljen i undervisningen, hvis kompleksitet ofte forsvinder i den mere almene "pædagogiske" lærerværelsessnak.

En anden meget vigtig pointe i lektionsstudiearbejde er at det foregår i matematiklærerteams, og derved indgår i lærerteamets kontinuerlige professionelle udvikling. Fokus er på udviklingen af teamets *undervisning* – ikke på udvikling af den enkelte lærer. Der er i den japanske undervisningskultur en fundamental tro på, at man kan udvikle *undervisningens* kvalitet gennem et forskningslignende arbejde med de enkelte lektioner (se fx Lewis, 2002). Undervisning bliver således ikke i første række lærerens private og individuelle ansvar. Den bagvedliggende forberedelse er kollektiv, og har flere forskningslignende træk (Miakawa & Winsløw, u. udg.).

Endelig spiller den systematiske, didaktisk fokuserede *observation af undervisning* en fundamental rolle i lektionsstudier. Ikke blot andre lærere fra skolen, men også lærere fra andre skoler og endog forældre eller interesserede fra udlandet kan observere undervisningen i en japansk skole – uden særlige formaliteter og uden at læreren føler sig forulempet af det. Erfaringen af, at man kan lære af at observere andre lærere – og af deres observationer – stammer tilbage fra Meiji-tiden i slutningen af den 19. århundrede (se fx Isoda et al., kap. 2). Også dette medvirker til at gøre undervisning til noget kollektivt, snarere end en privatsag.

Man kan læse mere om lektionsstudier i de referencer, der er nævnt nedenfor; den engelsksprogede litteratur om 'lesson study' er i dag ganske omfattende, især fordi lektionsstudier er blevet temmelig udbredt i specielt USA indenfor de seneste 7-8 år, naturligvis i mere eller mindre tillempede former. Også i svensk sammenhæng er der gjort forsøg med lesson study (se fx Akerlund, 2005).

Vi vil nu vende tilbage til eksemplet med talmysteriet for at se, hvad det har at gøre med lektionsstudier. Vi nævnte, at lektionen – i den version, som blev beskrevet som en "superlektion" – er udviklet af en lærer ved navn Kozo Tsubota (som optræder på figur 3 og 4). Manden er berømt blandt matematiklærere i Japan – for han er leder af et matematiklærerteam, der har udarbejdet adskillige nationalt publicerede lektionsplaner. Han har personligt fremvist disse undervisningsdesigns ved talrige regionale og nationale lærerkongresser. I Japan er det således almindeligt, at særlig fremragende lærerteams *publicerer* og *demonstrerer* deres lektioner offentligt og naturligvis frem for alt overfor andre lærere – og deres ledere kan faktisk høste betydelig professionel anerkendelse.

Videoen af lektionen, som blev fremvist i workshoppen (jf. figur 3 og 4) er optaget ved en lærerkongres i Tsukuba med flere hundrede deltagere. Det er således ikke "rigtig" undervisning – men det at lektionen fungerer med en lokal klasse, en for eleverne ukendt lærer og flere hundrede tilskuere, gør måske ikke demonstrationen mindre overbevisende.
På den anden side kan det ikke nægtes, at lektionsstudier og især denne offentlige "fremvisning" udfordrer vore sædvanlige forestillinger om hvad undervisning er: et naturligt fænomen i klasseværelset og skolekonteksten, som udenfor dette ingen regelmæssighed eller blot eksistens kan have? – eller et offentligt tilgængeligt designarbejde, som kan fremvises, studeres og udvikles systematisk på tværs af skoler? Det er selvfølgelig to ekstreme synspunkter, men jeg tør godt sige at jeg tror det sidste synspunkt har fremtiden for sig – både når det gælder den praktiske udvikling af undervisning, og når det gælder forskning i matematikkens didaktik. Lektionsstudier er en blandt flere praktiske måder at professionalisere undervisningsarbejdet på, og de gør det ikke mindst ved at give et fælles og offentligt rum til dette arbejde og den tilhørende professionelle viden.

Referencer.

Akerlund, S. (2005) Utveckla undervisning tillsammans. *Nämnaren* 3**,** 17-21.

Brousseau, G. (1997). *Theory of didactical situations in mathematics*. Kluwer: Dordrecht.

CRICED (2006) *Exploring Japanese mathematics lessons – prime and composite numbers.* Video. Centre for Research on Internation Cooperation in Educational Development, U. of Tsukuba.

Fernandez, C. (2005). Lesson Study: A means for elementary teachers to develop the knowledge of mathematics needed for reform-minded teaching? *Mathematical Thinking and Learning* 7 (4), 265-289.

Fernandez, C. & Yoshida, M. (2004). Lesson Study: A Japanese Approach to Improving Mathematics Teaching and Learning. Mahwah: Lawrence Erlbaum.

Isoda, M., Stephens, M., Ohara, Y., Miyakawa, T. (2007) *Japanese Lesson Study in Mathematics. Its impact, diversity and potential for educational improvement.* Singapore: World Scientific.

JSME, Japan Society for Mathematics Education (2000) *Mathematics teaching in Japan.* Tokyo : JSME.

Lewis, C. (1995) *Educating Hearts and Minds: Reflections on Japanese Preschool and Elementary Education.* Cambridge: Cambridge University Press.

Lewis, C (2002). *Lesson Study: A Handbook for Teacher-Led Improvement of Instruction.* Philadelphia: Research for Better Schools, 2002.

Lewis, C. (2002) Does Lesson Study Have a Future in the United States? *Nagoya Journal of education and Human Development* 2002 (1), 1-23.

Miyakawa, T. & Winsløw, C. (under udg.) Étude collective d'une leçon : un dispositif japonais pour la recherche en didactique des mathématiques. I : Bloch I. et Conne F. (eds.), *Actes de la XIVème Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques* (udkommer 2008 på *La Pensée Sauvage*, Grenoble).

Padilla, M. & Riley, J. (2003) *Guiding the new teacher: induction of first year teachers in Japan.* In Britton, E. et al. (éds) *Comprehensive teacher induction. Systems for early career learning.* Kluwer: Dordrecht.

Stigler, J.W., & Hiebert, J. (1999). *The teaching gap: Best ideas from the world's teachers for improving education in the classroom*. New York: Summit Books.

Winsløw, C. (2006). *Didaktiske elementer : en indføring i matematikkens og naturfagenes didaktik.* Frederiksberg: Biofolia.

Winsløw, C. (2007). Didactics of mathematics: an epistemological approach to mathematics education. *The Curriculum Journal* 18 no. 4 (2007), 523-536.

Ingvill Merete Stedøy-Johansen har bygd opp Matematikksenteret slik det er i dag. Hun ble oppnevnt som faglig leder for senteret i 2002. Ingvills interessefelt er først og fremst motivasjon og elevers lyst til å lære, samt lærerens viktige rolle som igangsetter og inspirator.
Hennes rolle ved senteret er både administrativ og operativ. Hun fungerer som veileder for master- og phD-studenter, leder prosjekter som skal bedre kvaliteten på matematikkundervisningen (fra barnehage til og med videregående skole og voksenopplæring), holder kurs og tar imot elever og lærere til matematikkaktiviteter ved senteret.

Fra tall og tallmønster til generalisering og algebra

Innledning

For mange matematikklærere er det en gåte at så mange elever synes algebra er uforståelig, ulogisk, og uten mening. Elever ser ut til å lage sine egne regler, der de forkorter i "øst og vest", og kommer fram til resultater som ikke gir mening. Hvordan kan dette skje? I det følgende, skal vi prøve å finne noen forklaringer på dette, og komme med forslag til måter å rette opp eventuelle mangler på forkunnskaper og forståelse som kan ha ført til en manglende evne til å se logikken i de algebraiske reglene.

En forklaring på at algebra oppfattes som uforståelig, kan være at elevene ikke ser de store linjene og den røde tråden fra den helt elementære innføringen av tallsystemet vårt fram til generalisering og bokstavregning. Kanskje det ikke er dyp nok forståelse for vårt geniale posisjonssystem. Kanskje det ikke er tydelig nok for elevene hva som er de underliggende strukturene og de store linjene gjennom tallregningen til de algebraiske regnereglene. Elevene er ikke nok trent til å "skrelle bort" det uvesentlige, og lete etter det som er felles og allmenngyldig, slik at de kan generalisere, eller gå fra det spesielle til det generelle.

Jeg har en hypotese: *Elevene synes bokstavregning er vaskelig fordi*

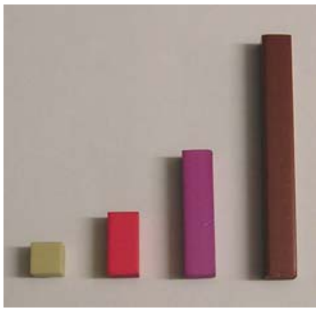
1. *de har ikke god nok tallforståelse*
2. *de har ikke forstått at bokstavregning er generalisering av tallregning*

Hvis dette er tilfelle, vil det også forklare hvorfor elevene ikke klarer å manipulere med formler. De pugger den samme formelen mange ganger, bare i ulike varianter (for eksempel $v=\frac{s}{t}, t=\frac{s}{v}, s=vt$).

Vi skal se på noen eksempler som kan være med på å belyse prinsippene i tallsystemet vårt, og vise noen aktiviteter og problemløsningsoppgaver som er avansert nok i videregående skole, samtidig som de er enkle nok til å fungere som tallbehandling for viderekomne. Disse aktivitetene vil bygge opp tallforståelse hos elevene, og kan under kyndig ledelse av en lærer, føre til at elevene blir bedre i stand til å se sammenhenger mellom tallregning og bokstavregning, eller algebra.

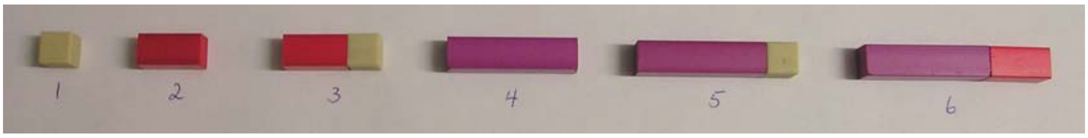
Posisjonssystemer

For lærere og foreldre kan det være vanskelig å forstå hvorfor elevene har problemer med å forstå logikken i 10-tallsystemet, og ha oversikt over sifferverdi og reell verdi. Mange elever har store problemer med å se at et tall kan skrives på formen: $\sum_{i=0}^{n} a_i 10^i$, der a_i er siffer nummer *i* når vi teller fra høyre. En måte å angripe dette på, for å vise det geniale prinsippet i posisjonssystemer, kan være å utfordre elevene på å forstå tall skrevet i andre grunntall enn 10. Da blir aktiviteten ikke oppfattet som stigmatiserende, og vi kan få fram de viktige prinsippene. Vi bruker såkalte Cuisnaire-staver til å konkretisere dette.



Aktivitet:

Stavene på figuren har lengde 1, 2, 4 og 8. Hvilke lengder kan vi bygge med dem? Hvilke tall kan vi representere på denne måten?



Når elevene har sett litt på dette, kommer de ganske raskt fram til at vi kan bygge alle naturlige tall fra 1 til 15.

Jeg spør hvilken stavlengde de ville ønske seg for å kunne skrive de neste tallene. Ganske raskt kommer svaret 16. Da ser elevene at de kan komme videre, helt til 31. Deretter ønsker de seg 32. Slik oppdager de at stavene må komme i lengder som er potenser av 2, slik:
$1 = 2^o, 2 = 2^1, 4 = 2^2, 8 = 2^3, 16 = 2^4, 32 = 2^5, osv$

Da kan vi markere tallene ved å si hvilke lengder som må brukes for å få fram de ulike tallene. Vi kan lage en tabell:

	$32 = 2^5$	$16 = 2^4$	$8 = 2^3$	$4 = 2^2$	$2 = 2^1$	$1 = 2^o$
1						1
2					1	0
3					1	1
4				1	0	0
5				1	0	1
6				1	1	0
7				1	1	1
8			1	0	0	0
9			1	0	0	1
10			1	0	1	0
11			1	0	1	1
12			1	1	0	0
13			1	1	0	1
14			1	1	1	0
15			1	1	1	1

16		1	0	0	0	0
17		1	0	0	0	1
18		1	0	0	1	0
19		1	0	0	1	1
20		1	0	1	0	0
21		1	0	1	0	1
22		1	0	1	1	0
23		1	0	1	1	1
24		1	1	0	0	0
25		1	1	0	0	1
osv						

Ved å skrive 0 der vi ikke trenger en stav (ett tall), kan vi klare oss uten tabellen, slik at tallene blir: 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, 1001, 1010, 1011, 1111, 10000, 10001 osv.

Vi har et posisjonssystem med to siffer, nemlig 0 og 1!
Be elevene om å skrive for eksempel 47 i dette tallsystemet, som kalles 2-tallsystemet.

Diskusjonen mellom elevene kan gå omtrent slik:
Den høyeste toerpotensen vi kan bruke, er 32, så det blir 1 på den plassen. Vi kan ikke bruke 16, for da blir tallet for stort. Vi må ha en 8-er. Da er vi oppe i 40. Pluss en 4-er, så er det 44, og en 2-er, gir 46, og en 1-er gir 17. Tallet blir
10111.
Vi kan skrive: $47_{10} = 10111_2$

Legg bort stavene med lengde 2, 4 og 8, og finn fram:
To staver med lengde 1, to staver med lengde 3 og to staver med lengde 9. Hvilke tall kan bygges med disse stavene? På samme måten som i forrige oppgave, ser vi at alle naturlige tall opp til 26 kan bygges:
1
1+1
3
3+1
3+1+1
3+3
3+3+1
3+3+1+1
9
9+1
9+1+1
9+3
9+3+1
9+3+1+1
9+3+3
9+3+3+1
9+3+3+1+1
9+9
Osv

Elevene innser at den neste staven vi trenger, er 27, og da kan vi bygge tallene videre til og med 80. Denne gangen klarer vi oss med inntil to kopier av potenser av 3, dvs $1=3^0, 3=3^1, 9=3^2, 27=3^3, 81=3^4, osv$. Videre trenger vi sifrene 0, 1 og 2 for å vise om vi har ingen, en eller to kopier av de ulike verdiene. På samme måte som med 2-tallsystemet, kan vi lage et 3-tallsystem:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20 blir til
1, 2, 10, 11, 12, 20, 21, 22, 100, 101, 102, 110, 111, 112, 120, 121, 122, 200, 201, 202

Be elevene skrive 47 i dette tallsystemet. *Da blir det en 27-er, pluss to 9-ere, da er vi oppe i 45, og så må vi ha to 1-ere. Tallet blir 1202.*
Vi kan skrive: $47_{10} = 1202_3$

Nå kan vi se at det er mulig å lage posisjonssystemer med alle mulige grunntall, og at vi trenger like mange siffer som grunntallets verdi. For å bruke et 10-tallsystem, trenger vi altså ti siffer, nemlig 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6,7, 8 og 9. Det er det vi bruker til vanlig!

Egyptisk multiplikasjon
Ulike kulturer har egne algoritmer for multiplikasjon av flersifrede tall. I det gamle Egypt hadde de sin egen måte å gjøre det på. Vi skal se på et eksempel. Utfordringen vi kan gi til elever, er:
- finn ut hvordan det gjøres, og prøv metoden på et annet eksempel
- forklar hvorfor det fungerer, dvs gir riktig svar.

47·31

1	**31**
2	**62**
4	**124**
8	**248**
~~**16**~~	~~**496**~~
32	**992**
	1457

Hvordan:
I kolonnen til venstre, skrives potenser av 2 i stigende rekkefølge. Vi stopper rett før verdien av tallet overstiger verdien på den første faktoren i produktet vi ser på. I kolonnen til høyre, starter vi med den andre faktoren i produktet, og dobler dette tallet for hver gang, helt til kolonnen stopper på samme nivå som kolonne 1. Tallene i kolonnen til venstre skal gi sum lik den første faktoren. Da må vi starte nederst og se hvilke tall som ikke skal være med. Stryk hele raden. Tallene som står igjen i høyre kolonne skal summeres, og summen er lik produktet av de to tallene vi startet med.

Hvorfor:
Summen i venstre kolonne, svarer til den første faktoren i produktet skrevet i totallsystemet. Ved siden av tallet i venstre kolonne, står dette tallet multiplisert med den andre faktoren i produktet, slik:
$47 \cdot 31 = (1+2+4+8+32) \cdot 31 = 31+62+124+248+992 = 1457$

Skrivemåter for tall og delbarhetsregler

Det kan være en fin utfordring for elevene i videregående skole å prøve å bevise de ulike delbarhetsreglene de en gang lærte i grunnskolen. Vi gir ett eksempel her.

Påstand: Hvis det tosifrede tallet du får ved å bruke sifferet på enerplassen og tierplassen til et tall er delelig med 4, så er tallet selv delelig med 4.

Testing på eksempler: Prøv med tre, fire og flersifrede tall, for eksempel 312:4=78, 4916:4=1229, 99987304:4=24996826. Det ser riktig ut!

Resonnement: Hvis vi deler opp tallene på en smart måte, for eksempel
312 = 300 + 12 = 3·100 + 12, ser vi at 4 går opp i 100, og 4 går opp i 12, så da går det opp i 312. Alle tall kan deles opp på denne måten (noe ganger 100 pluss et tosifret tall).

Bevis: Vi må skrive tallet på en bestemt måte for å vise dette. Ethvert tall kan skrives på sifferform:

$$n = a_p a_{p-1} ... a_2 a_1 a_0 = \sum_{i=0}^{p} a_i \cdot 10^i = \sum_{i=2}^{p} a_i \cdot 10^i + 10 \cdot a_1 + a_0 = (\sum_{i=2}^{p} a_i \cdot 10^{i-2}) \cdot 100 + 10 \cdot a_1 + a_0$$

Da er

$$n : 4 = ((\sum_{i=2}^{p} a_i \cdot 10^{i-2}) \cdot 100 + 10 \cdot a_1 + a_0) : 4 =$$

$$(\sum_{i=2}^{p} a_i \cdot 10^{i-2}) \cdot 100 : 4 + (10 \cdot a_1 + a_0) : 4 = (\sum_{i=2}^{p} a_i \cdot 10^{i-2}) \cdot 25 + (10 \cdot a_1 + a_0) : 4$$

Hvis $(10 \cdot a_1 + a_0) : 4$ er et helt tall, det vil si at tallet $a_1 a_0$ er delelig med 4, så går divisjonen opp.

Kommentar: Symbolbruken i beviset er vanskelig å følge for mange elever, til og med i videregående. Allikevel er det viktig at lærerne kjenner til dette. For å gjøre det mer tilgjengelig for elevene, kan en bruke talleksemplene i testingen som eksempler:
312= 3·100+1·10+2
4916=4·1000+9·100+1·10+6=(40+9)·100+1·10+2
99987304=9·10000000+9·1000000+9·100000+8·10000+7·1000+3·100+0·10+4
=(9·100000+9·10000+9·1000+8·100+7·10+3) ·100+4

Slik at
312:4=(3·100+1·10+2):4=3·25+12
4916:4=((40+9)·100+1·10+2):4=49·25+12:4=49·25+3
99987304=((9·100000+9·10000+9·1000+8·100+7·10+3) ·100+4):4=
(9·100000+9·10000+9·1000+8·100+7·10+3) ·25+4:4=999873·25+1

Tallbehandling for viderekomne – et myntproblem

Jeg har 15 norske mynter i lomma.
Verdien er 100 kroner.
Kan du si hvilke mynter jeg har?

Løsningsforslag:
De fleste vil gå løs på problemet med prøving og feiling. Det kan allikevel være nyttig å tenke litt over hvilke muligheter som finnes.

Vi vet at vi har fem ulike mynter i Norge. Hvis vi sier at vi har *a* mynter med verdi 0,50kr, *b* med verdi 1 kr, *c* med verdi 5 kr, *d* med verdi 10 kr og *e* med verdi 20 kr, kan vi sette opp noen betingelser som må være oppfylt for å ha 100 kr med 15 mynter.

$0,5a+b+5c+10d+20e=100$

$a+b+c+d+e=15$

$a, b, c, d, e \in N$

$e<5$, ellers blir beløpet for stort

$d<10$, ellers blir beløpet for stort

$0,5a+b=5$ eller $b=10$, ellers blir det for mange mynter

Hvis $0,5a+b=5$ så er c et oddetall

Hvis en har funnet en løsning, kan det være fint å se om den kan ”transformeres” til en ny løsning. To tikroner kan bli til en tjuekrone, samtidig som en tredje tikroning kan bli til to femkroninger. Da beholdes antall mynter og verdien beholdes. Nedenfor viser vi en fullstendig tabell over de femten løsningene som finnes.

20kr	10kr	5kr	1kr	0,50kr
4	1	0	10	0
0	9	1	5	0
1	6	3	5	0
2	3	5	5	0
3	0	7	5	0
1	7	1	4	2
2	5	1	3	4
2	4	3	4	2
3	3	1	2	6
4	0	3	2	6
4	1	1	1	8
3	2	3	3	4
3	1	5	4	2
0	5	10	0	0
1	2	12	0	0

Problemet med de 1000 dørene

Følgende problemløsningsoppgave, gir fin tallforståelse når elevene skal prøve å forstå løsningen:

På en skole er det 1000 elever og 1000 elevskap. En morgen kommer elevene en etter en til skapene. Elev nummer 1 åpner alle skapene. Elev nummer to starter med skap nr 2, går til annethvert skap, og låser dem. Elev nr tre starter med skap nr 3, går til tredjehvert skap og åpner de skapene som var låst, og låser hvert skap som var åpent. Slik fortsetter det med elev nr fire, fem, …, elev nr *n* går til skap nr *n* og *n*-te hvert skap etter det, åpner de som var låst, og låser de som var åpne, helt til siste elev, som er elev nr 1000. Hvilke skapnummer er åpne og hvilke er lukket når alle er ferdige?

Løsningsforslag

Til å begynne med, kan det være lurt å se hva som skjer, gjette, og etter hvert prøve å finne en forklaring. Vi lager en skisse av de 100 første skapene, og gjennomfører prosedyren, skriver Å for åpne og L for låse. Det ser slik ut:

Å 1	ÅL 2	ÅL 3	ÅLÅ 4	ÅL 5	ÅLÅL 6	ÅL 7	ÅLÅL 8	ÅLÅ 9	ÅLÅL 10
ÅL 11	ÅLÅ LÅL 12	ÅL 13	ÅLÅL 14	ÅLÅL 15	ÅLÅLÅ 16	ÅL 17	ÅLÅLÅL 18	ÅL 19	ÅLÅL ÅL 20
ÅLÅL 21	ÅLÅL 22	ÅL 23	ÅLÅLÅL ÅL 24	ÅLÅ 25	ÅLÅL 26	ÅLÅL 27	ÅLÅLÅL 28	ÅL 29	ÅLÅLÅL 30
ÅL 31	ÅLÅL ÅL 32	ÅLÅL 33	ÅLÅL 34	ÅLÅL 35	ÅLÅLÅ LÅ 36	ÅL 37	ÅLÅL 38	ÅL 39	ÅLÅLÅL 40
ÅL 41	ÅLÅL ÅLÅL 42	ÅL 43	ÅLÅLÅL 44	ÅLÅLÅL 45	ÅLÅL 46	ÅL 47	ÅLÅLÅL ÅLÅL 48	ÅLÅ 49	ÅLÅLÅL 50
ÅLÅL 51	ÅLÅL 52	ÅL 53	ÅLÅLÅL ÅL 54	ÅLÅL 55	ÅLÅLÅ LÅL 56	ÅLÅL 57	ÅLÅL 58	ÅL 59	ÅLÅLÅL ÅLÅLÅL 60
ÅL 61	ÅLÅL 62	ÅLÅLÅL 63	ÅLÅLÅLÅ 64	ÅLÅL 65	ÅLÅLÅ LÅL 66	ÅL 67	ÅLÅLÅL 68	ÅLÅL 69	ÅLÅLÅL ÅL 70
ÅL 71	ÅLÅL ÅLÅL ÅLÅL 72	ÅL 73	ÅLÅL 74	ÅLÅLÅL 75	ÅLÅLÅL 76	ÅLÅL 77	ÅLÅL 78	ÅL 79	ÅLÅLÅL ÅLÅL 80
ÅLÅLÅ 81	ÅLÅL 82	ÅL 83	ÅLÅLÅL ÅLÅLÅL 84	ÅLÅL 85	ÅLÅL 86	ÅL 87	ÅLÅLÅL ÅL 88	ÅL 89	ÅLÅLÅL ÅLÅLÅL 90
ÅL 91	ÅLÅLÅL 92	ÅLÅL 93	ÅLÅL 94	ÅLÅL 95	ÅLÅLÅ LÅLÅL ÅL 96	ÅL 97	ÅLÅLÅL 98	ÅLÅLÅL 99	ÅLÅLÅL ÅLÅ 100

Forklaring: Det handler om faktorisering, og antall faktorer. Hvis vi analyserer hvilke elever som har vært innom de ulike skapene, innser vi at:

- nr 1 har vært innom alle skap
- nr *n* har vært innom skap nr *n* og alle skap med et nummer der *n* er en faktor.

Det betyr at antall elever som har vært innom, er det samme som antall faktorer i tallet. De tallene med et partalls antall faktorer, er de tallene som representerer lukkede dører. De tallene med et oddetalls antall faktorer, er de åpne dørene.
Vi ser av oversikten at det er kvadrattallene som har et odde antall faktorer. Hvorfor er det sånn? Alle faktorer kommer i par. Hvis *p* er en faktor i tallet *n*, så er $\frac{n}{p}$ en faktor i *n*. De tilfellene som gir et odde antall faktorer, er de tallene der en faktor er dobbel. Det vil si at det finnes en faktor p_d som er sånn at $\frac{n}{p_d} = p_d$. Det vil si at $d_d^2 = n$. Men da er *n* et kvadrattall.

Avslutning

Jeg minner om min hypotese, som var:
Elevene synes bokstavregning er vaskelig fordi

1. *de har ikke god nok tallforståelse*
2. *de har ikke forstått at bokstavregning er generalisering av tallregning*

Gjennom arbeid med slike eksempler som vi har sett på i denne artikkelen, vil elevene videreutvikle og forbedre sin egen tallforståelse. Etter min mening bør vi heller ikke være så redde for å innføre hensiktsmessig matematisk notasjon. Da vil elevene se eksempler på hvordan vi kan skrive tallmessige sammenhenger på en kompakt og generell måte. Selv om de kanskje ikke er i stand til å bruke notasjonen selv, vil de i alle fall kunne se meningen med det, gjøre seg noen erfaringer, og sakte men sikkert finne det både naturlig, hensiktsmessig og logisk. Vi må tørre å utfordre elevene, og vi må tørre å ta sjanser!

Tirsdag kl 08.30 – 10.45

Erfaringer fra klasserommet:

Lærere og Matematikksenterets ressurspersoner presenterer ideer/erfaringer

Navn	Tittel
Therese Hagfors	Fra perlekjede til tallinje
Elisabeth Moe Omland	Mappeoppgaver i matte. Oppgaveeksempler og vurdering.
Dag-Ivar Bådsvik	Get Smart og Algebra
Berit Aadne	Kvadratmønster i hundrekartet
Gerd Nilsen	Alle Teller
Tone Skori	Brøk
Torleif Skipar	Plump- på en ny måte
Lisbet Karlsen	Algebra i Besøkssenteret
Susanne Stengrundet og Gerd Bones	Vi bygger bokstavuttrykk med terninger
Marion H. Sødal og Tine Foss Pedersen	Tenkeskjemaet
Brynhild Nystedt	Fra aritmetikk til algebra. Fra det spesielle til det generelle.
Geir Kristoffersen	Lek og spill med desimaltall
Svein Heggem	Lommeregnerbowling og andre aktiviteter for bedre tallforståelse
Tommy Nordby	Finn målet som matcher
Hanne Fostvedt og Annette Christensen	Lek med algebra – en vei til forståelse
Marianne Herland og Anne Kari Sælensminde	Dagens tall på 4. trinn
Birgitte Hangeland	Newtonrom i Harstad
Erik Torp Nilssen	Troverdige misoppfatninger
Hugo Christensen	Matematikken, fysikken og konstruksjonen i et orienteringsflagg
Hanne M. Dalby og Ann-Christin Arnås	Binært trylleri
Anita Røste	Algebrakappløp og stigespill
Oddveig Øgaard	Arbeid med mønster og symmetri i barnehagen

Plenum 3, tirsdag kl 11.00 – 12.00

Mike Naylor, Associate Professor of Mathematics Education, WWU
Mike teaches mathematics and math education at Western Washington University in Bellingham, Washington, USA, and is a guest professor at NSMO. Formerly a circus clown, he now uses his skills to get people excited about math. Mike is an international speaker and is the math columnist for Teaching K-8 magazine. His interests include geometry, music, juggling, mathematical art and creative writing.
Email: mike@abacaba.org

Abacaba! Amazing Number Connections Abacaba-Dabacaba!

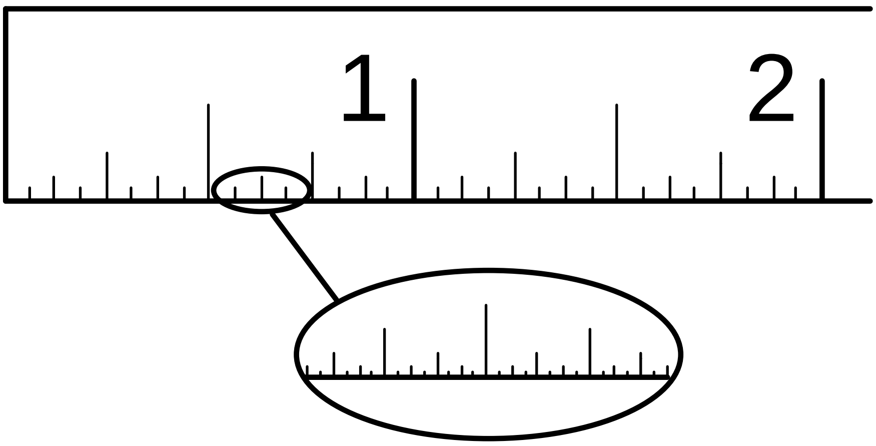
by Michael Naylor
Western Washington University
Bellingham, WA 98225-9063
abacaba@gmail.org
www.abacaba.org

The Abacaba structure shows up in an amazing variety of places. This article explores 10 surprising ideas which all share this pattern, a path that will take us through geometry, number systems, art, music, poetry, higher dimensions, and more!

Did I say 10 places? Actually, this one goes to 11.

1. Ruler

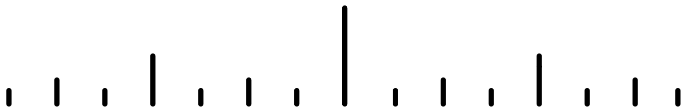
Take a look at the marks on an English ruler in the space of one inch. There's a big mark dividing the inch in half, two shorter marks dividing those halves in half, and so on. It's easy to imagine you could keep dividing the ruler again and again infinitely. If you did, you'd have a very interesting geometric object called a fractal.



If the shortest marks are length 1, the next length 2, and so on, the pattern of the marks is 1213121412131215... This pattern shows up in all kinds of weird places; let's give it a name.

2. The Name

Instead of using numbers to describe the length of branches or marks on the ruler, let's call the shortest lengths "a", the next longest "b," then "c," and so on. The pattern then becomes:



a b a c a b a d a b a c a b a

. . . or "Abacaba-Dabacaba!" This word sounds very much like the magician's phrase "abracadabra," and indeed there are seemingly magical properties about this pattern.

To understand the pattern a little better and see how to continue it, let's see how this pattern grows. Start with an "a."

1. **a**

To grow the pattern, add the next letter in the alphabet and then repeat everything that has gone before (which is just the letter "a" in this case.) The next step, then, is "aba."

2. **aba**

Continue by adding the next letter, "c," and repeating the "aba."

3. **abacaba**

The fourth step adds the letter "d" and repeats the pattern: abacabadabacaba! The next few steps are shown:

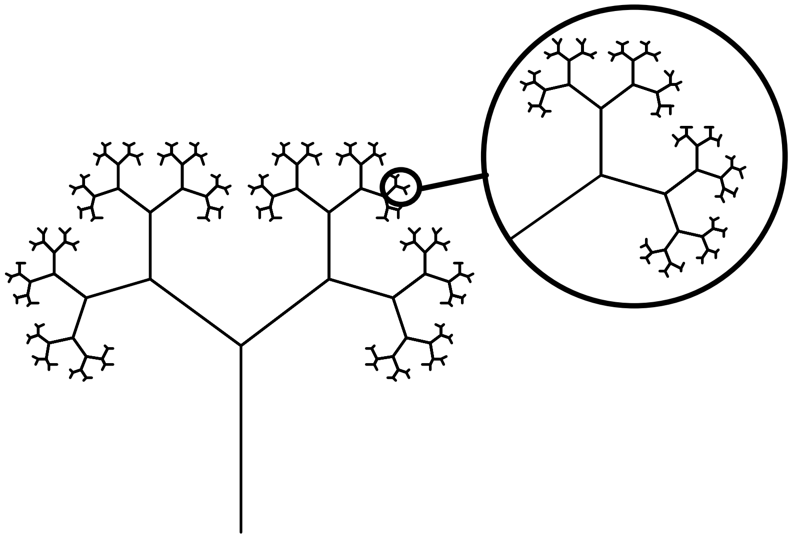
4. **abacabadabacaba**
5. **abacabadabacabaeabacabadabacaba**
6. **abacabadabacabaeabacabadabacaba-fabacabadabacabaeabacabadabacaba**

It's fun to see how much you can say aloud. How long would it take to say the word all the way to "z"?

This word is the basis for genie names in *Maggie and the Abacaba Genies* (see www.abacabax.com). In the story, Maggie must call forth genies by saying these names, all the way to z!

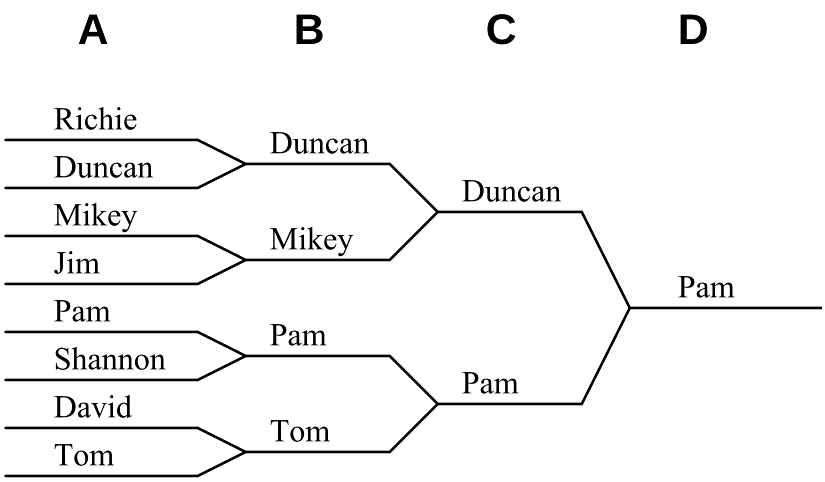
3. The Tree

Another way to represent an Abacaba patterns is with a binary branching tree. In this pattern, one object divides into two, then each of those divides into two, and so on, like the branches on this tree:



It is not hard to imagine that the branching and doubling could be continued infinitely, and if we could only magnify our view enough times, we would see the same patterns continuing forever and ever...

This same pattern is followed (in reverse) in a play-off schedule where teams or players are paired off with the winner of each round progressing to the next while the loser is eliminated:



If we move from the top to the bottom of the playoff tree, we'll notice that the name closest to the top of the chart appears in column A, the next highest name is in column B, then column A, then C, then back to A, and so on. The pattern is abacaba-dabacaba.

4. Fractals

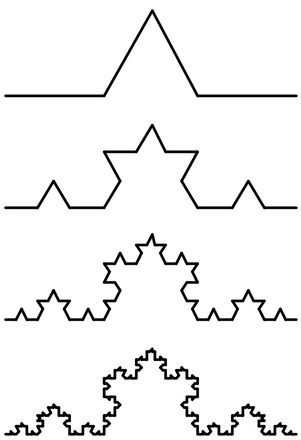
Abacabadabacaba is a fractal pattern – and it shows up in many other fractal patterns. Fractals, like the ruler and the tree, have parts that are similar to the whole – if you zoom in and look closer, you see the patterns over and over. Here are three more famous fractals.

The **Koch Curve** is formed by replacing the center third of a line segment with two edges of an equilateral triangle.

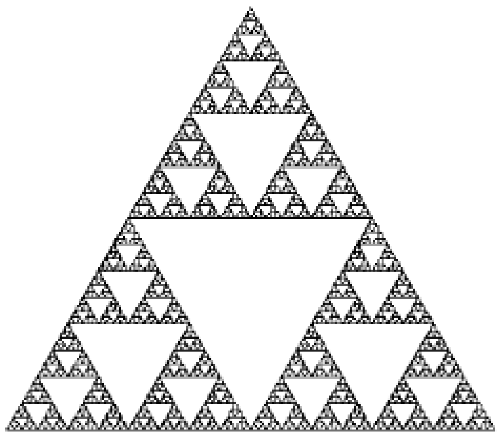
The **Sierpinski Triangle** (or Gasket) is formed by removing the center of a triangle and repeating

Cantor Dust is made by successively removing the center third of a line segment.

Can you find abacabadabacaba in each of these?



Koch Curve



Sierpinski Triangle

Cantor Dust

5. Number Systems

000000
000001
000010
000011
000100
000101
000110
000111
001000
001001
001010
001011
001100
001101
001110
001111
010000

The binary number system is the simplest and most significant of all positional number systems.

In binary, only two digits are used, zeroes and ones. The value of a written number is determined by the arrangement of zeros and ones, with the value of each place being a power of 2 rather than a power of 10 as in our familiar system. The number 19, for example, would be written as follows:

19 (base 10) **=**	**0**	**1**	**0**	**0**	**1**	**1**	digits of binary #
	32	*16*	*8*	*4*	*2*	*1*	value of each digit
	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0	power of 2

$$19 = 2^4 + 2^1 + 2^0$$

The count from 0 onwards binary begins: 0, 1, 10, 11, 100, 101, 110, 111, 1000, …

The abacabadabacaba pattern is repeated at infinite levels in this simple counting pattern. The start of one such pattern is shown to the left. Can you find others?

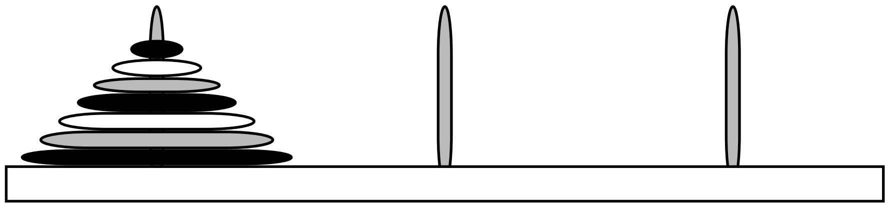
6. Philosophy and Poetry

It's fun to think about how every decision we make leads us in a new direction, as if our lives are an infinite fractal tree. Here's a poem that reflects those decisions... it has the structure *abacabadabacaba*.

And keep my conscience clear and bright.
I'll do what I know is right
Next time, who knows? I just might!
"I shouldn't do it," so I thought.
I guess I'm doomed to live this way.
Now the chance has slipped away
Maybe on some other day!
Should I do it? Should I not?
It wasn't worth it, I would say.
Now I'm full of guilty thoughts
But that's a tiny price to pay!
I went and did it anyway.
Tomorrow I will stay away.
I'll just hope I don't get caught
They didn't catch me yesterday!

"Decision Tree" (Naylor, M. *College Math Journal*, 32, 3, May 2001.)

7. Puzzles and Legends

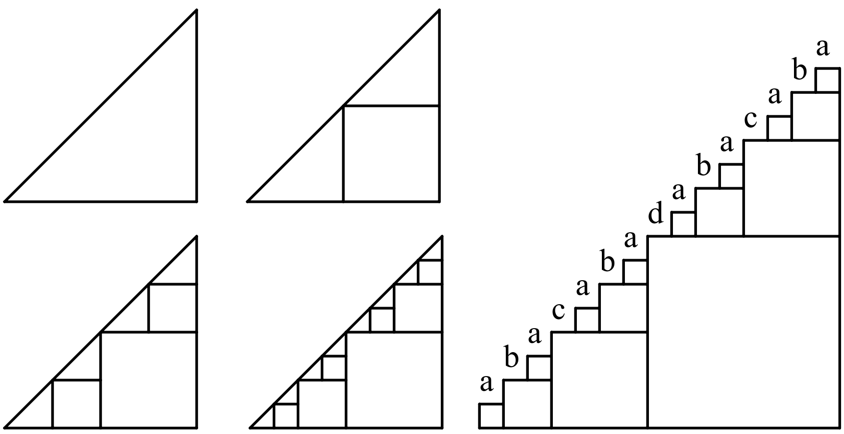


A popular puzzle called “The Towers of Hanoi” asks players to move a stack of disks one at a time from one of three pegs to another peg. Only the top disc of a tower may be moved, and one may never place a larger disc on top of a smaller disc. The object is to transfer the entire tower to a different peg in the fewest number of moves.

A version of this game using cards is at the end of this article. The key to solving this puzzle lies in the abacaba pattern.

There is a legend of the Temple of Abacabax, where monks move golden disks on diamond spindles. When they have moved all 26, the universe will come to an end. Should we worry?

The Temple of Abacabax is high atop of tower of stone blocks. The blocks are arranged as such: Draw half a square, cut along the diagonal to form a right isosceles triangle, and then draw the largest square possible inside of it. Continue by placing the largest square possible inside of all the right triangles created, and repeat. When you decide to stop, you will have made a staircase of blocks similar to those at the temple of Abacabax. As you climb these stairs, the size of the blocks you step on makes the abacabadabacaba pattern. In the staircase at the actual temple, this process is carried out 26 times, the central block corresponding to the letter ‘z.’

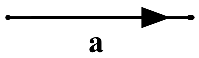


At the end of this article you’ll also find a template to make a pop-up version of this staircase.

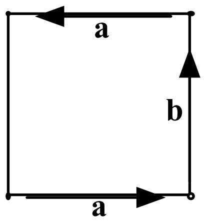
8. Hyperspace

Navigating higher dimensions? Don't get lost! Call the *left-right* direction "**a**," the *up-down* direction "**b**," and the *forward-back* direction "**c**."

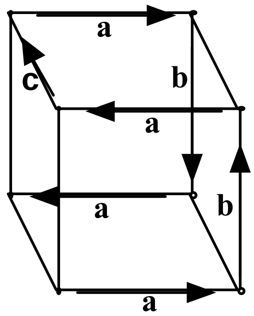
Moving **a** will get you from one point to another – you travel a line segment.



Moving **aba** will move you around the corners of a square.

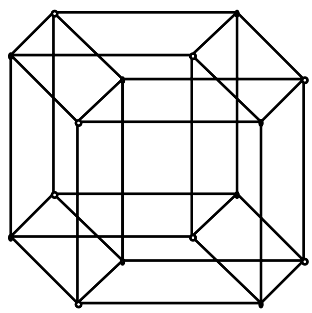


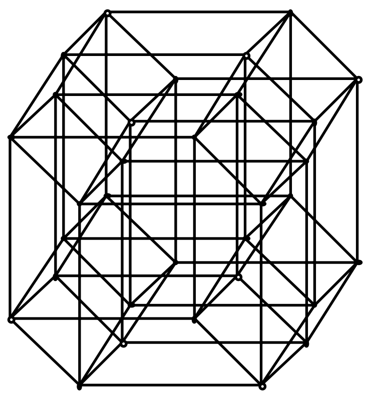
Try moving **abacaba** on the cube - did you visit all of its vertices?



Let's add another direction, the *here-there* direction, and call it **d**. To travel to all of the vertices of this four dimensional hypercube, just remember the magic word: Abacabadabacaba!

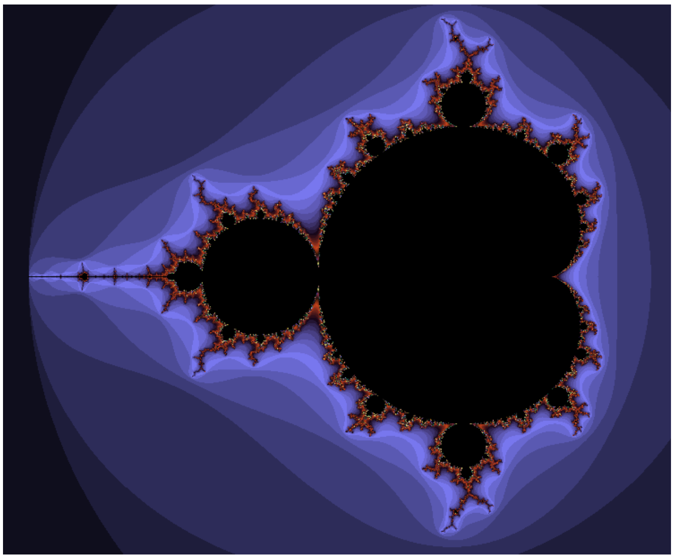
Here's a 4D and a 5D hypercube. Are you up to the challenge?



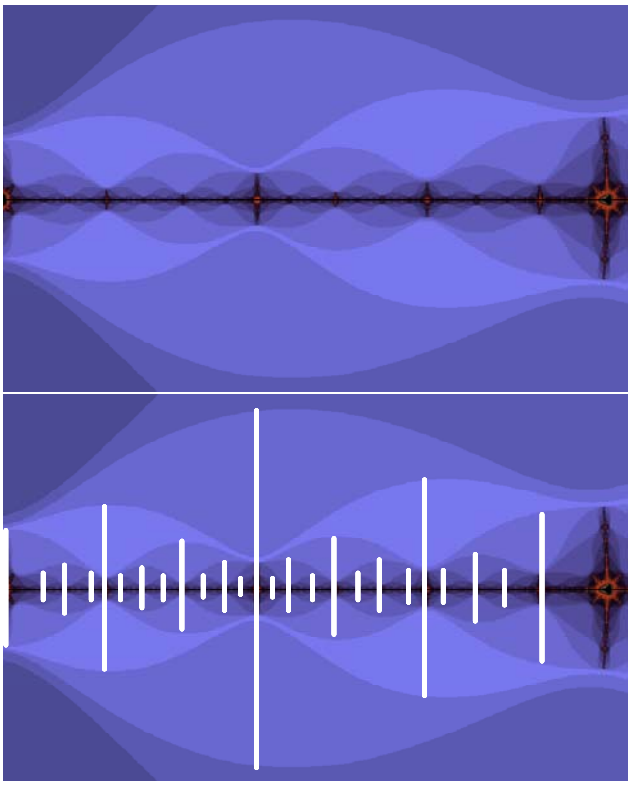


9. The Complex Plane

Abacaba-Dabacaba is written all over the Mandelbrot set. The M-Set is a famous fractal with infinite variety and complexity, generated by repeating very simple rules. Many free computer programs are available to explore this fantastic structures. (These were made with the freeware program *Xaos*).

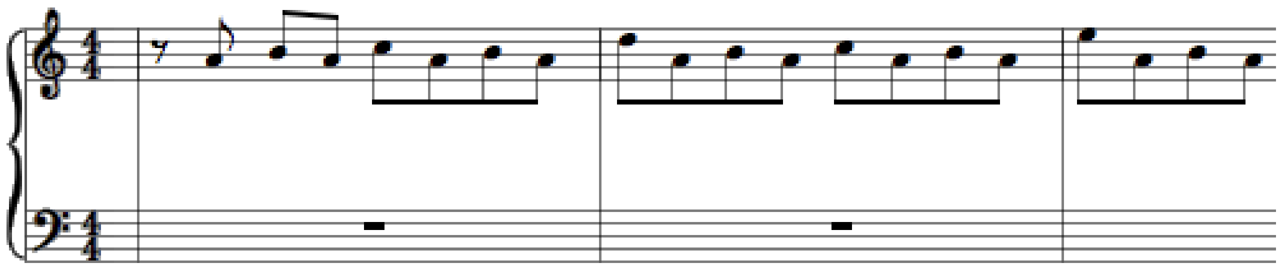


Zooming in on the "nose" to the far left reveals one abacaba pattern as shown here – there are many more you can find.



10. Music

Abacabadabacaba sounds like it could represent a series of notes. Indeed, if abacabadabacaba is played on piano, the result is beautiful and haunting. Download a copy from **abacaba.org**. There is also a fully orchestrated version available for free download.



11. www.Abacaba.org

More Abacaba available online for FREE

Read *Maggie and the Abacaba Genies*

Download Classroom Activities, Worksheets, and Blackline Masters

Download Abacaba Music

Parallellsesjon 3, tirsdag kl 13.00 – 15.00

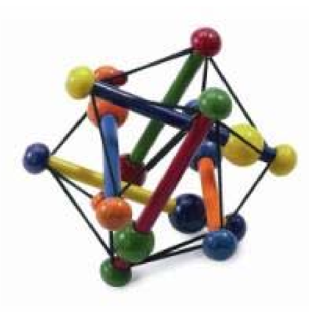
Ingvill Merete Stedøy-Johansen har bygd opp Matematikksenteret slik det er i dag. Hun ble oppnevnt som faglig leder for senteret i 2002. Ingvills interessefelt er først og fremst motivasjon og elevers lyst til å lære, samt lærerens viktige rolle som igangsetter og inspirator.
Hennes rolle ved senteret er både administrativ og operativ. Hun fungerer som veileder for master- og phD-studenter, leder prosjekter som skal bedre kvaliteten på matematikkundervisningen (fra barnehage til og med videregående skole og voksenopplæring), holder kurs og tar imot elever og lærere til matematikkaktiviteter ved senteret.

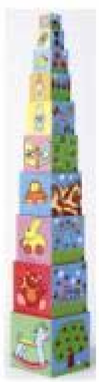
Små barns matematikklæring- fra et matematikerperspektiv

Innledning
Små barns tilnærming til nye ting, deriblant matematiske utfordringer, er på mange måter veldig lik en forskers tilnærming. Du må være uredd, vågal og nysgjerrig for å gjøre det bra som forsker. Det er små barn!
De er nysgjerrige
De stiller masse spørsmål
De er ikke redde for å prøve og feile
De tror de kan finne ut av det meste (strutter av selvtillit)
De er ikke redde for å gjøre noe dumt (for ingenting er dumt når du utforsker nye ting!)
De har sjelden noen begrensninger

Friedrich Fröbel (1782–1852), "skaperen" av barnehagen mente at leken ikke skulle kastes på barna. Den skulle komme naturlig.
Fröbel laget derfor mange forskjellige leker som han tilbød barna i barnehagen. Alle barn er forskjellige og leken må falle naturlig for hvert enkelt individ. I følge Fröbel er leken det som får læringa i gang. Han var veldig bevisst på at læringa skulle være gøy.

Leker som stimulerer til matematisk utvikling og tenking
Lekers form, størrelse, farger og funksjon, vil være avgjørende for at vi skal kunne karakterisere dem som matematisk stimulerende. Nedenfor finner dere eksempler på slike leker.





Lekene ovenfor gir barn erfaringer og opplevelser som de tar med seg inn i skolematematikken. Lekene kan dessuten med fordel brukes og analyseres av større skolebarn. De kan forstås på en annen måte når en dyktig matematikklærer stiller gode spørsmål og gir utfordringer knyttet til lekene. Dere finner flere eksempler på www.matematikksenteret.no under Novemberkonferansen 2007.

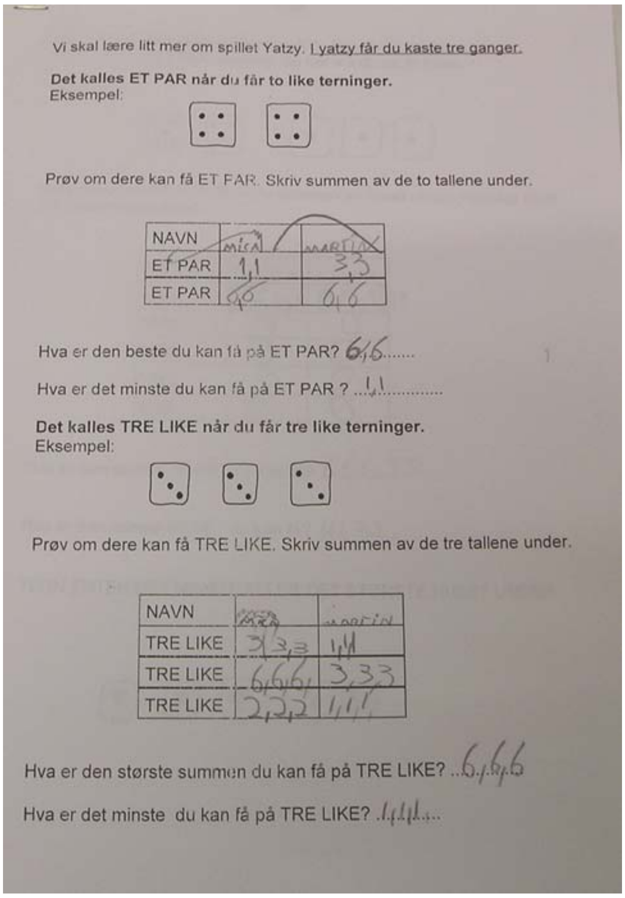
Telling

Barn elsker å telle, og de må gjøre det ofte!
Hvorfor er det viktig å stimulere barns telling?

- Telling er en av de beste måter å hjelpe barn til å utvikle tallforståelse og viktige tallmessige mønster og sammenhenger.
- Erfaringer med telling gir et godt grunnlag for senere addisjon, subtraksjon, multiplikasjon og divisjon

Eksempler på aktiviteter barna kan gjøre overalt og i mange situasjoner:
Gjett hvor mange …? Sortering, gruppering, telling med 1, 2, 5 og 10 om gangen.

Mange voksne spiller yatzy med barna, og det er fint. Det blir enda bedre hvis de voksne stiller noen spørsmål som får barna til å tenke og reflektere over spillet og tallene som framkommer på terningene. Nedenfor er eksempler på slike spørsmål og svar:



Vi skal lære litt mer om spillet Yatzy. I yatzy får du kaste tre ganger.

Det kalles ET PAR når du får to like terninger.
Eksempel:

Prøv om dere kan få ET PAR. Skriv summen av de to tallene under.

NAVN	mica	martin
ET PAR	1,1	3,3
ET PAR	6,6	6,6

Hva er den beste du kan få på ET PAR? 6,6

Hva er det minste du kan få på ET PAR ? 1,1

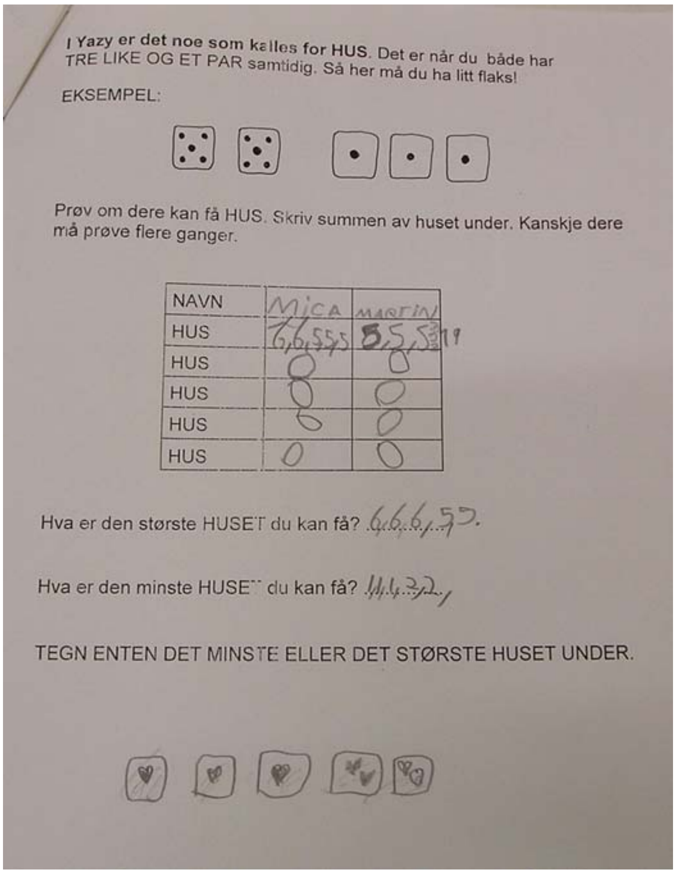
Det kalles TRE LIKE når du får tre like terninger.
Eksempel:

Prøv om dere kan få TRE LIKE. Skriv summen av de tre tallene under.

NAVN	mica	martin
TRE LIKE	3,3,3	1,1
TRE LIKE	6,6,6	3,3,3
TRE LIKE	2,2,2	1,1,1

Hva er den største summen du kan få på TRE LIKE? 6,6,6

Hva er det minste du kan få på TRE LIKE? 1,1,1



I Yazy er det noe som kalles for HUS. Det er når du både har TRE LIKE OG ET PAR samtidig. Så her må du ha litt flaks!

EKSEMPEL:

Prøv om dere kan få HUS. Skriv summen av huset under. Kanskje dere må prøve flere ganger.

NAVN	MICA	MARTIN
HUS	6,6,5,5,5	5,5,5,1,1
HUS	0	0
HUS	0	0
HUS	0	0
HUS	0	0

Hva er den største HUSET du kan få? 6,6,6,5,5

Hva er den minste HUSET du kan få? 1,1,1,2,2

TEGN ENTEN DET MINSTE ELLER DET STØRSTE HUSET UNDER.

Barna liker å bli kjent med store tall også. For barnehagebarn er 100 et veldig stort tall. La dem få leke med 100! De erfaringene de gjør, vil være til stor nytte når det gjelder å bygge opp tallforståelse. Gjennom ulike aktiviteter, kan barna oppleve og erfare hvordan ti tiere blir til 100. Ti barn med 10 fingre hver. Tell med 10 om gangen til 100. 10-20-30-40-50-60-70-80-90-100 fingre i været!

Vi kan telle penger på samme måte. Hvor mange tiere må vi ha for å ha 100 kroner? Selv om vi nettopp har talt 100 fingre ved å telle ti tiere, er det ikke opplagt at barna ser likheten og sammenhengen.

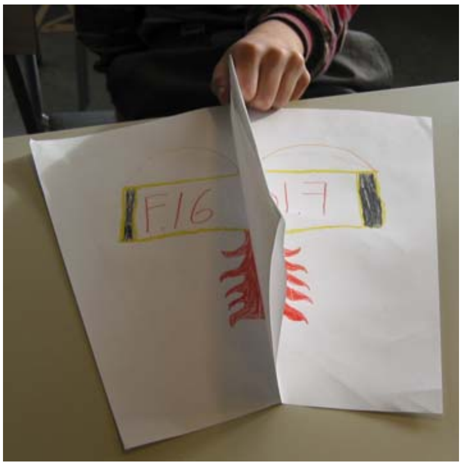
Hvordan skal vi lage et matematisk 100-perlekjede? Kan vi bruke noe av det vi har lært tidligere til å finne ut av det? Barna ser etter hvert at de også her kan telle ti tiere. Vi deler ut 10 små ark, sånn at de kan legge 10 perler på hvert ark før de begynner å tre.

Etterpå kan barna gå hjem og stolt vise fram sine matematiske hundreperlekjeder!

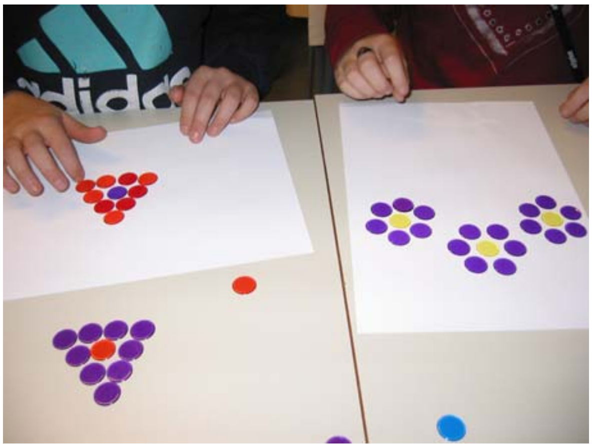
For meg som matematiker er dette en første systematisk tilnærming til vårt posisjonssystem. Det er ikke å forvente at barna skal *forstå* posisjonssystemet etter dette. Vi har heller ikke sett på skrivemåten for disse tallene. Men barna har opplevd noe, fått neon erfaringer, og kanskje begynt å fundere over struktur og mønster i tallene våre. Vi teller til 10, ved å si 10 tall, og vi kan telle til 100 ved å si 10 tiere. Dette er erfaringer og opplevelser som vil være med barna videre, og som kan utnyttes når de skal arbeide mer systematisk med tallsystemet vårt i skolesammenheng.

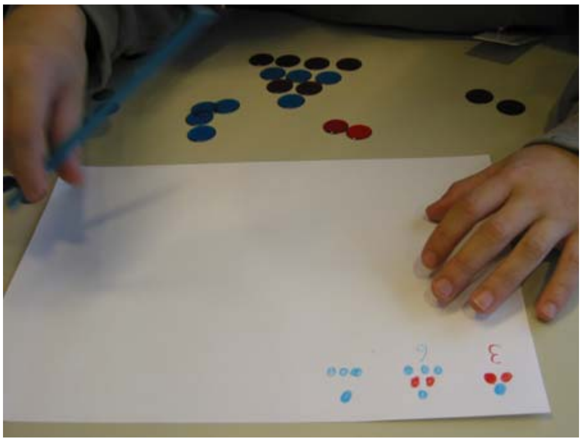
Symmetri og mønster

Små barn liker system. De oppfatter symmetri som pent, og de bygger ofte symmetrisk med farger og former i forbindelse med klosselek. I barnehagen kan vi med fordel stimulere barna til å bygge og tegne symmetriske mønster. Veldig mange matematiske fenomener opptrer symmetrisk, så dette er et viktig og riktig fokus ut fra et matematikkfaglig perspektiv. La barna bygge, tegne, fortelle og forklare.

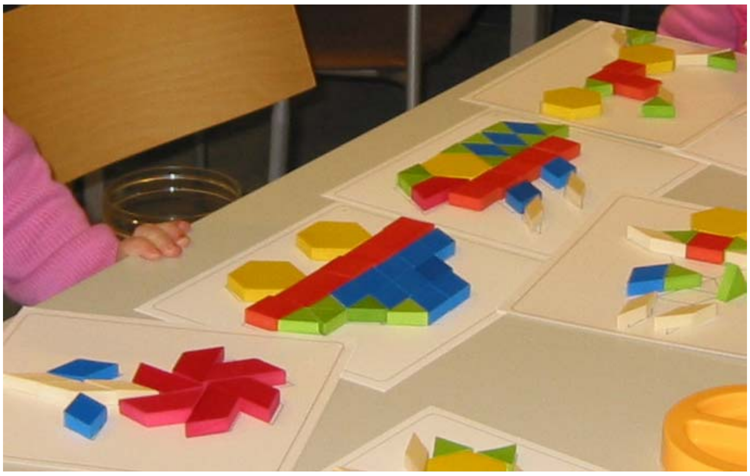


Martin er i ferd med å bygge en drage med symmetrisk mønster. Til og med F16 har blitt riktig speilet!





Bearbeiding og dokumentasjon gjør knapper om til matematikk.



Mosaikkbrikker er flotte å bygge med, enten som puslespill som skal passe i en ramme, eller bygge mønster etter fri fantasi.

Den røde tråden

Med den nye Rammeplanen for barnehagen, med Antall-rom-form som et viktig tema, og Kunnskapsløftet for skolen, har vi fått planer med helhet og sammenheng fra barnehage til og med videregående skole. Emnene har fått samme navn hele veien i skolen, begrepene og språket er gjenkjennbart fra det ene planen til den andre, og ikke minst er det naturlig progresjon i "overgangene" barnehage – småtrinn – mellomtrinn – ungdomstrinn – videregående.

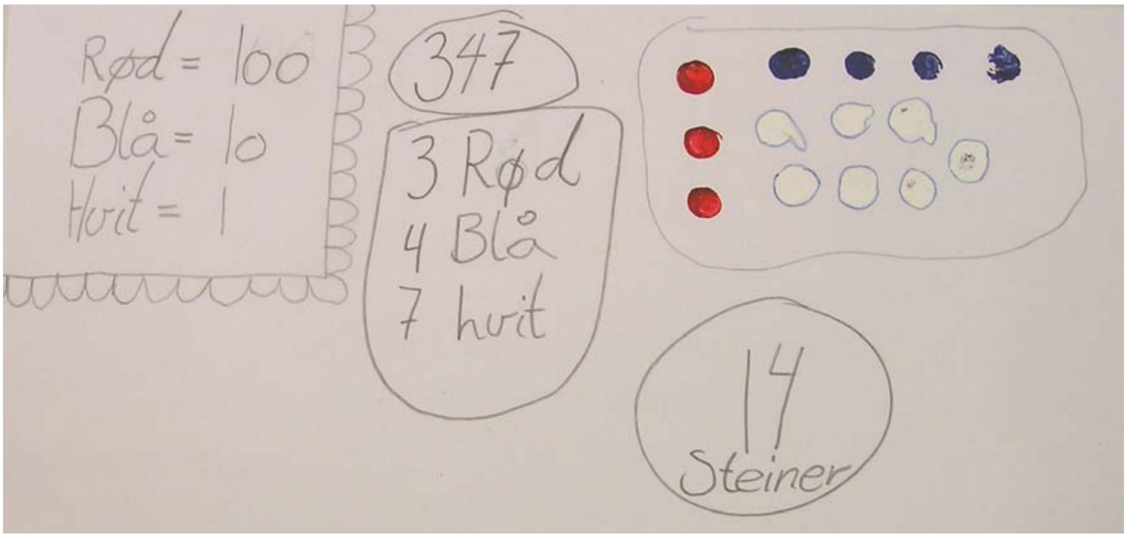
Dette gir enestående muligheter, samtidig som det er store utfordringer knyttet til det. Det krever at barnehagepersonalet og lærere snakker sammen, planlegger sammen og orienterer hverandre om hvilke erfaringer elevene har med seg fra barnehagen til skolen. Hvis skolematematikken skal gi godt utbytte for barna, må det kobles direkte opp mot aktiviteter, kunnskaper og erfaringer de har fått med seg i barnehagen. Nedenfor er eksempel på progresjon innenfor området Tall og algebra fra barnehagen til videregående:

Sortering og telling
Gjenkjenning av små mengder
Tallene fra 1 til 20
Posisjonssystemet og flersifrede tall
Addisjon – subtraksjon av naturlige tall
Multiplikasjon – divisjon av naturlige tall
Brøk som begrep
Regning med brøk, faktorisering, fellesnevner, …
Desimaltall – summer av spesielle brøker
Regning med desimaltall – brøker med enkle nevnere
Prosent – del av en hel, forholdstall
Praktiske oppgaver – forløper til likninger
Likninger
Bokstavregning (algebra) og formelregning
Algebraiske bevis

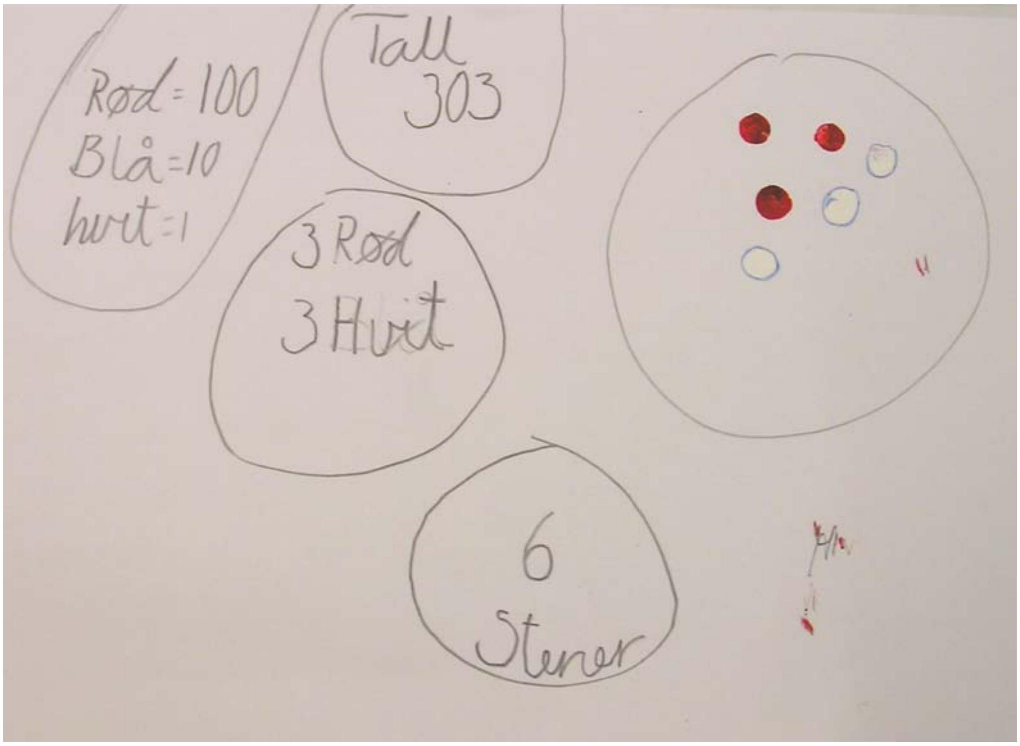
Gruppeoppgave
Deltakerne på verkstedet fikk følgende gruppeoppgave:

Dere har fått utdelt noen elevarbeider, og ser noen på skjerm.
Hvilke matematiske erfaringer kan barna få ved å gjøre disse aktivitetene?
Hvilke begreper kan disse aktivitetene støtte opp om?
I hvilken grad er lærerens kompetanse og bevissthet viktig for at slike aktiviteter skal bli meningsfulle og gi maksimalt "utbytte"?

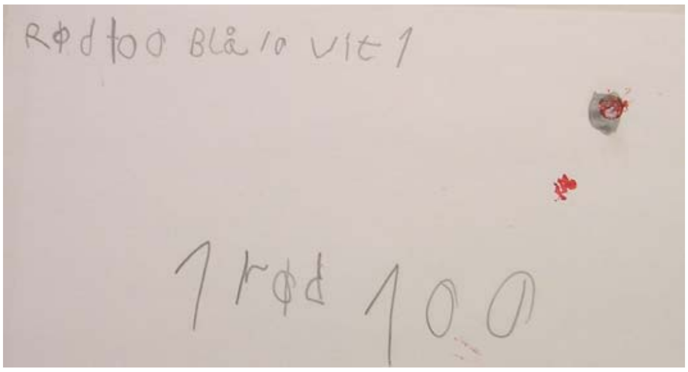
Eksempel 1
Elevene har fått i oppdrag å lage fangst til fiskedammen vi skal ha på matematikktivoli. De skal sette malingsflekker på små steiner, slik at fangsten blir verdt det tallet de har bestemt seg for på forhånd. Rød flekk betyr 100, blå betyr 10 og hvit betyr 1. Elevene skal planlegge hvordan de skal farge steinene, og beregne hvor mange steiner de trenger.



Eleveksempel 1

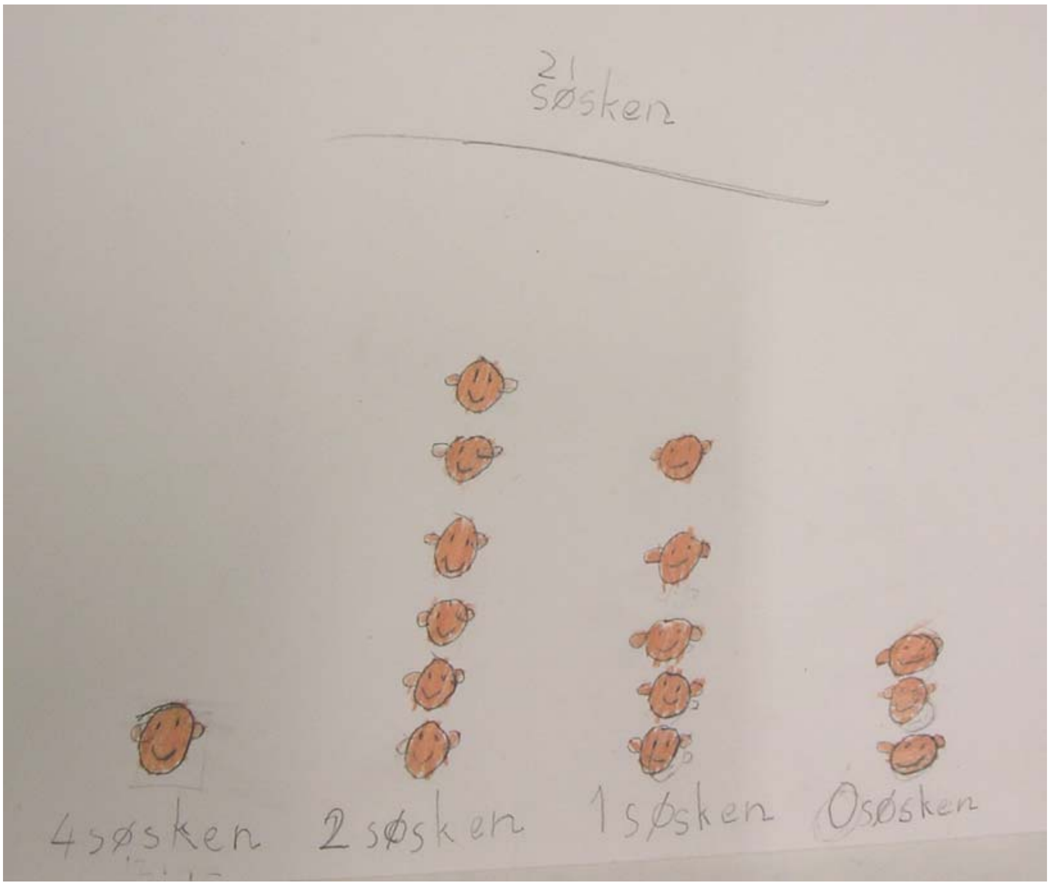


Eleveksempel 2

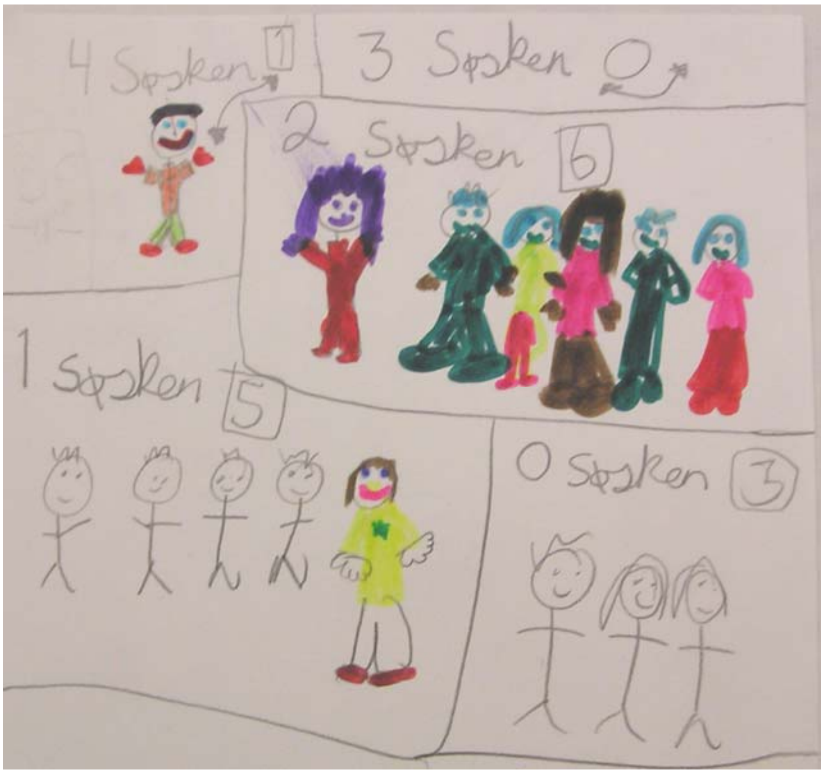


Eleveksempel 3

Eksempel 2
Vi hadde en undersøkelse om hvor mange søsken de ulike elevene hadde i klassen. Først stilte de seg opp ved siden av hverandre, sånn at alle enebarna sto ytterst til venstre, deretter kom de med en søsken, så de med to osv.
Så ble vi enige om at de skulle stille seg på rekker, slik at det ble en rekke for enebarna, en for de med ett søsken, osv. Vi laget et levende søylediagram!
Etterpå skulle elevene tegne en oversikt over hvor mange som hadde 0, 1, 2 osv søsken i klassen.



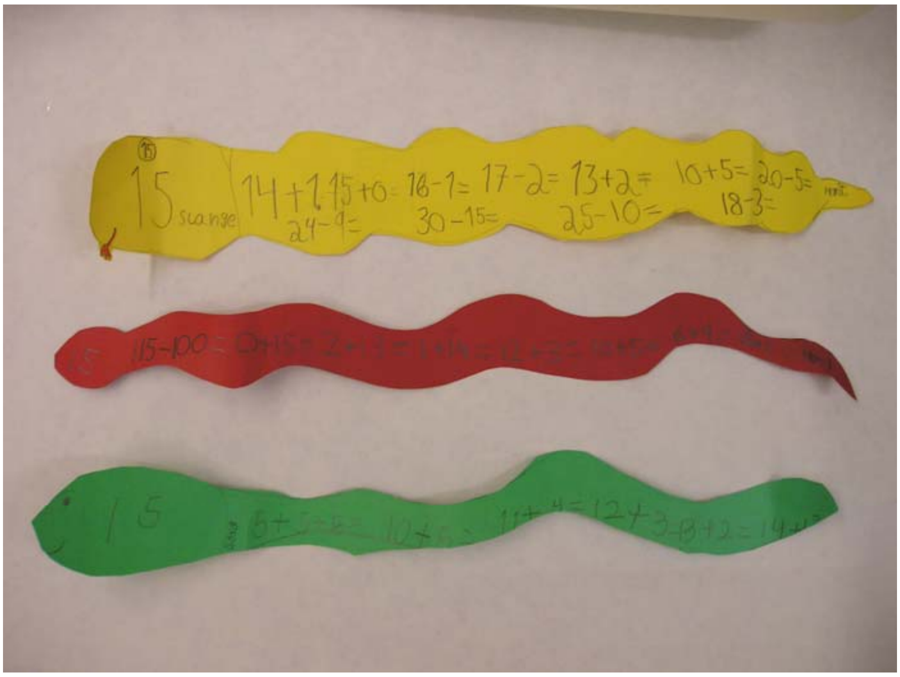
Eleveksempel 4



Eleveksempel 5

Eleveksempel 6

Eksempel 3
Elevene skal lage regneslager. Slangen har et tall på hodet, og elevene skal skrive regnestykker langs kroppen til slangen, slik at svaret på regnestykket er det tallet som står på hodet til slangen.



Eleveksempel 7

Diskusjonaoppgave
Hvordan kan og bør barnehage og skole legge til rette for å stimulere barns matematiske utvikling?

Finnes det noen ideell måte en kan utfordre små barn fra 0 til 5 år på, slik at de har et best mulig utgangspunkt for matematikklæring når de begynner på skolen?

Hva er det viktigste barna bør lære i grunnskolens 1. til 4. trinn? Er læreplanen god nok?

Hvordan kan vi legge til rette slik at alle barn lærer hele tiden, og ikke stagnerer i sin utvikling? (Det finnes noen underytere i norsk skole …)

Avslutning
Jeg vil avslutte med noen tankevekkende sitater fra min egen sønn, Daniel:

- Mamma, er 70 mer eller mindre enn 50?

Daniel 3 år

Situasjonen var at vi satt i bilen på vei til barnehagen. Jeg svarte at 70 er mer enn 50, hvorpå Daniel ivrig utbrøt: ”Å! Da kan vi kjøre fortere nå!”. Han hadde sett to veiskilt, et med 50 på, og et med 70 på.

- Mamma, jeg vet at 6 + 7 = 13

Daniel, 4 år

Jeg spurte Daniel hvordan han fant ut det. Han forklarte at 6 + 6 = 12, det vet jo alle! Og så må det bli en mer, og det er 13. For å sjekke om dette var en strategi han brukte, fulgte jeg opp med å spørre om han kunne si meg hvor mye 5 + 6 er. Gutten tenkte lenge og vel, og jeg trodde at han nok ikke var så flink allikevel. Men etter en stund kom det, 11! Jeg spurte hvordan han tenkte, og han forklarte: ”Jeg tenkte sånn som i sta. 5 + 5 = 10, så måtte det bli en til. men da hadde jeg glemt hva det tallet heter!”

- Mamma, hva er det største tallet som finnes?

Daniel, 5 år

Jeg ble glad og overrasket over spørsmålet, og spurte tilbake: ”Hva er det største tallet du vet om da?” Han tente nok at det var tusen millioner. Jeg sa at jeg visste om et som var enda større, og det ville han selvsagt vite. Tusenmillionerogen, sa jeg. Daniel tenkte. Så sa han: ”Samme hvilket tall jeg sier, så kan du si et som er en mer, da!”. Jeg tenkte med meg selv at nå har Daniel forstått at det finnes ikke noe største tall. Han hadde begynt å tenke over uendelighetsbegrepet.

- Mamma, i dag har vi lært om tallet 4 på skolen!

Daniel 6 ½ år

Dette var svaret jeg fikk da han kom hjem etter er par uker i første klasse på skolen. Hvilket møte hadde gutten min fått med skolematematikken? Tenk for en ressurs Daniel ville vært i klassen, bare læreren hadde latt han slippe til! Og det var helt sikkert flere Danieler i klassen hans. I dag er Daniel 14 år og synes alt på skolen er kjedelig. Også matematikk.

Hva gjør vi med barna? Bremser den norske skolen de mest talentfulle barna? Jeg tror vi har mange underytere i norsk skole, og jeg tror vi mister mange talenter. Barn kan mye mer enn vi ofte tror. Min påstand er at barna er i stand til å tenke abstrakt på et tidligere tidspunkt enn det kan se ut som.

Ingvills 10 bud til barnehageansatte:

- Du skal ikke undervurdere barna
- Du skal ikke tro de ikke vil
- Du skal ikke tro de synes det er kjedelig
- Du skal ta ALLE barna på alvor
- Du skal lytte til det de sier
- Du skal være interessert i hva de har å bidra med
- Du skal ha høye forventninger til ALLE barna
- Du skal ikke holde dem tilbake
- Du skal oppmuntre dem til å undre seg
- Du skal la dem få bruke den tiden de trenger

ALLE BARNEHAGEBARN HAR LYST TIL Å LÆRE!!!

- Ikke ta fra dem lysten …

Geir Botten er førstelektor i matematikk ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, der han arbeider med lærerutdanning. Han har mange års erfaring som lærer på alle trinn i grunnskolen og videregående skole. Han har skrevet lærebøker og fagbøker, blant annet boka "Meningsfylt matematikk – nærhet og engasjement i læringen"

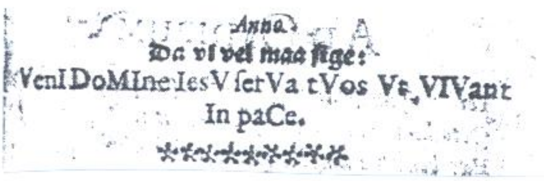
Min lidle Norske Regnebog - noen dypdykk i ei matematikkbok fra 1645

Den første lærebok i matematikk her i landet, i alle fall større og enhetlige lærebok, er skrevet av Tyge Hansøn i Trondheim i 1645 og trykket i København. Boka heter "Arithmetica Danica", men i forordet til boka omtaler Hansøn boka som "denne min lidle Norske Regnebog".

Hansøn begrunner hvorfor han har skrevet boka slik: "Så all den stund jeg har befunnet meg i Trundhiemb, der min oppgave har vært å undervise ungdommen i regnekunsten, og det her er stor mangel på nyttelige og brukelige regnebøker, har jeg satt meg fore å sammenskrive og beregne denne lidle Norske Regnebog (og innrette den så langt som mulig mot denne tids brukte Mynt). En annen årsak til at jeg skriver denne regneboka, er at i de regnebøker som her hos oss har vært i bruk, finnes bare hele oppskrifter (muligens er det gjort i en god mening), så er likevel sådanne bøker på ingen måte tjenelige for ungdommen. Derfor bruker jeg dem ikke for mine skolebarn, men har brukt denne lille regnebok: hvilken på eksempler og ikke bare regler og fasitsvar er framstilt."

Dekorasjonen på framsida av boka

På tittelbladet er en del av teksten på latin, blant annet dette korte utdraget.



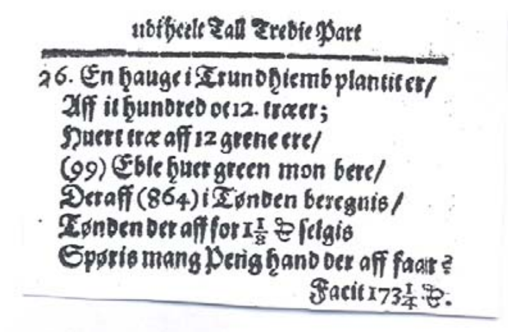
Anno
Da vi vel maa sige:
VenI DoMIne IesV ferVa tVos Vt VIVant
In paCe.

Det er interessant å legge merke til vekslingen mellom store og små bokstaver. Ser vi på de store bokstavene i disse to linjene, er de alle symboler for romertall, og dersom vi setter de etter hverandre etter størrelsen på romertall, blir det:

M, D, C, V, V, V, V, V, V, V, I, I, I, I, I

som symboliserer 1640, muligens årstallet da boka ble skrevet ferdig. Men så ble den først trykket og utgitt i 1645. Den innledende teksten "Anno – Da vi vel må sige:" tyder også på at vi har med et årstall å gjøre.

Både i forordet og andre steder i boka omtaler forfatteren boka som simpel og enfoldig. Det må nok bero på datidens måte å uttrykke seg på. Boka framstår som en omfattende og til dels vanskelig lærebok med mange oppgaver som elever i grunnskolen i dag ville ha store problemer med å løse. En del oppgaver er skrevet på vers, i barokk stil med flere, i alle fall for oss i dag, humoristiske innslag. Forfatteren henvender seg ofte til leseren for formanende ord eller oppmuntrende bemerkninger. De mange oppgavene i praktisk regning gir innblikk i livet på 1600-tallet, selv om mange av oppgavene nok ikke beskriver livet slik det i virkeligheten var. Et eksempel på slike oppgaver er denne som handler om epletrær i en hage i Trondheim:



udfheelt Tall Tredie Part

26. En hauge i Trundhiemb plantit er/
Aff it hundred oc 12. træer;
Huert træ aff 12 grene ere/
(99) Eble huer green mon bere/
Deraff (864) i Tønden beregnis/
Tønden der aff for $1\frac{1}{8}$ selgis
Spøris mang Peng hand der aff faar?
Facit $173\frac{1}{4}$.

Med dagens bokstaver:

En hauge i Trundhiemb plantit er /
Aff it hundred oc 12. træer;
Huert træ aff 12 grene ere /
(99) Æble huer green mon bere /
Deraff (864) i Tønden beregnis /
Tønden der aff for $1\frac{1}{8}$ Marck selgis
Spøris mang Peng hand der aff faar?

Fasiten på denne oppgaven oppgis til $173\frac{1}{4}$ Marck

I en gjendiktning kan denne oppgaven for eksempel bli slik:

I en hage i Trondheim er
det plantet et hundre og tolv trær
På alle trærne sine 12 store grene
er det 99 epler så grønne og pene
Det legges 864 i hver eneste tønne
$1\ ^1/_8$ mark for en tønne med epler så grønne
Spørsmål: Hvor mange penger får epledyrkeren?

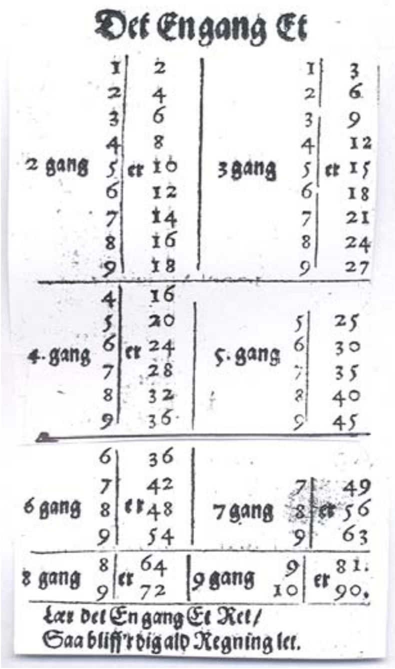
Vi kan vel vanskelig se for oss at datidens eplehager besto av trær med akkurat like mange grener på hvert tre, og at det igjen var akkurat like mange epler (99 stykker) på hver eneste gren. Men som regneoppgave er denne grei å forstå, og det blir fin trening både i multiplikasjon og divisjon for den som skal løse oppgaven.

Multiplikasjon og gangetabellen

I den første delen av boka, under overskriften "Til det fjerde" presenteres multiplikasjonstabellen, satt opp på en noe annen måte enn vi er vant med fra dagens skole. En bruker ikke betegnelsen multiplikasjonstabell, men omtaler den som "En gang Et". Presentasjonen starter med et lite vers, i datidens språkdrakt til venstre, og en noe modernisert versjon til høyre:

Uden en gang et / merk nu det /	Å lære seg gangen – merk deg det
Ingen kand lære at Regne ret	Ingen kan lære å regne rett
Uden ad / ded der for lær /	Utenat derfor gangen lær
Samt andit som for nøden er.	Samt annet som for nøden er.

Deretter kommer selve multiplikasjonstabellen, presentert slik:



Det Engang Et

2 gang	1		2	3 gang	1		3
	2		4		2		6
	3		6		3		9
	4		8		4		12
	5	er	10		5	er	15
	6		12		6		18
	7		14		7		21
	8		16		8		24
	9		18		9		27
4. gang	4		16	5. gang			
	5		20		5		25
	6	er	24		6		30
	7		28		7		35
	8		32		8		40
	9		36		9		45
6 gang	6		36	7 gang			
	7		42		7		49
	8	er	48		8	er	56
	9		54		9		63
8 gang	8	er	64	9 gang	9	er	81.
	9		72		10		90.

Lær Det Engang Et Ret/
Saa bliff'r dig ald Regning let.

Som vi ser, avsluttes tabellen med et lite huskevers, eller en påminning til elevene. I dagens språkdrakt ville dette for eksempel kunne skrives:

Lær deg gangetabellen og lær den rett
For da blir all regning enkel og lett

Om rotutdragning og hyldning av Kong Christian den fjerde

Når forfatteren viser algoritmen for å trekke ut kvadratrot, presenterer han samtidig en hyldning av kong Christian den fjerde. Når kvadratrot blir presentert, skjer det slik (med en noe modifisert rettskriving av meg):

Den fjerde Lærdom
Om Kvardatrot at uddrage
En kort Undervisning

For det første er det at erakte de 9 Kvadratrøtter hver med sitt Kvadrat; hvilken også er / uden til at lære / nemlig disse undertegnede:

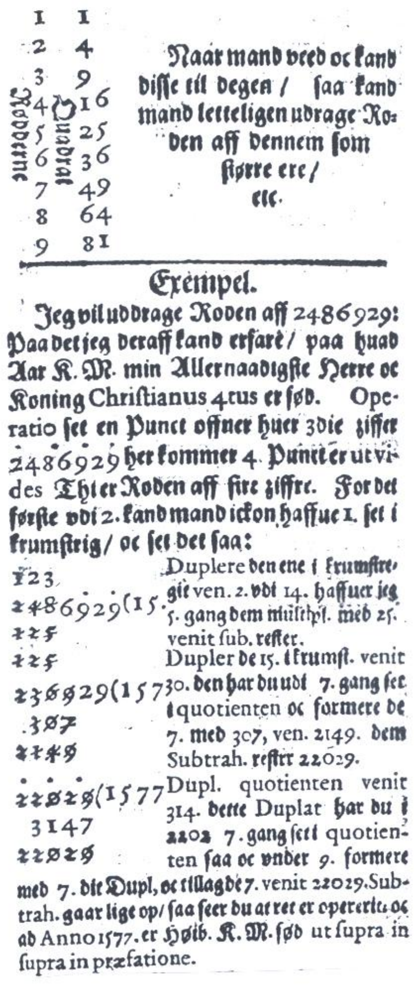
Etter å ha presentert "rødderne og Quadratene" som vist til høyre under, går forfatteren direkte over til dette eksempelet:

Jeg vil trekke ut roten av 2486929: På grunnlaget av det kan jeg få erfare på hvilket år K.M (Kongelige Majestet) min Allernådigste Herre og Konge Christianus 4tus er født. For å regne ut det, sett en prikk over hvert 3dje siffer $\dot{2}48\dot{6}92\dot{9}$. Her blir det 4 prikker. Derfor vil roten ha fire siffer. Som det første kan man bare ha 1. Bruk parentes der svaret framkommer og fortsett slik:

Fordoble den ene i parentesen til 2. Ta så 5 og multipliser med 25. og regn ut resten du da får (248 – 125). Fordoble så 15 (etter parentesen) og få 30. Så bruker du 7 og ganger 7 med 307, og får 2149. Det tallet subtraherer du og får resten 22029.

Fordoble så 157 til 314. Dette Duplikatet har du i 2202. På duplikatet føyer du til et 7-tall (til 3147) og setter 7-tallet under 9-tallet. Multipliserer duplikatet med 7 og legg til de 7 og få svaret 22029. Subtraksjonen går opp, så du ser at du har gjort rett og året er 1577 da Hans Høybårne. Kongelige Majestet er født.

Ut supra in supra in præfatione.


1 1
2 4
3 9
4 16
5 25
6 36
7 49
8 64
9 81

Rødderne Quadrat

Naar mand veed oc kand disse til degen / saa kand mand letteligen udrage Roden aff dennem som større ere / etc.

Exempel.

Jeg vil uddrage Roden aff 2486929: Paa det jeg deraff kand erfare / paa huad Aar K. M. min Allernaadigste Herre oc Koning Christianus 4tus er fød. Operatio set en Punct offuer huer 3die ziffer 2486929 her kommer 4. Puncter ut vides Thi er Roden aff fire ziffre. For det første vdi 2. kand mand ickon haffue 1. set i krumstrig / oc set det saa:

123	Duplere den ene i krumstregit ven. 2. vdi 14. haffuer jeg 5. gang dem multipl. med 25. venit sub. rester.
2486929(15	
225	
225	Dupler de 15. i krumst. venit 30. den har du udi 7. gang set i quotienten oc formere de 7. med 307, ven. 2149. dem Subtrah. rester 22029.
236929(157	
307	
2149	
22029(1577	Dupl. quotienten venit 314. dette Duplat har du i 2202 7. gang set i quotienten saa oc vnder 9. formere
3147	
22029	

med 7. dit Dupl, oc tillagde 7. venit 22029. Subtrah. gaar lige op / saa seer du at ret er opereret oc ad Anno 1577. er Høib. K. M. fød ut supra in supra in præfatione.

Det å kunne trekke ut kvadratrot og kubikkrot var kunnskap som tydeligvis nyttig allerede lenge før 1600-tallet. I Hauks bok[5] fra tidlig på 1300-tallet opererte forfatteren med sju regnearter (Bekken: 1995): fordobling (tvefaldan), halvering (helmingaskifti), addisjon (viðrlagning), subtraksjon (afdráttr), multiplikasjon (margfaldan), divisjon (setta skifting) og rotutdragning (taka rot undan). Allerede her omfattet rotutdragning både kvadratrot og kubikkrot. Også i Hanssøns bok er algoritmen for kubikkrot presentert, og det finnes noen oppgaver som handler om uttrekking av kubikkrøtter.

[5] Hauks bok er skrevet av *Haukr Erlendsson (d. 1334).* Den matematiske delen av Hauks bok kalles *Algorismus* og utgjør ca. 6-7 A4-sider. Dette er den eldste regnebok med "våre" tall på et nordisk språk.

Algoritmen for å trekke ut kvadratrot

I dagens språkdrakt vil algoritmen for kvadratutdraging kunne se slik ut, belyst gjennom eksemplet med kvadratet av det årstallet da Christian den fjerde ble født:

Vi skal finne $\sqrt{2486929}$.

Vi grupperer tallet under rottegnet i "hundregrupper", slik: 2 48 69 29

1. Det største tallet som har et kvadrattall mindre enn eller lik 2 er 1. Det "første" siffer i svaret blir derfor 1.

2 48 69 29	1	
1		
148		2

2. Vi multipliserer "svaret 1" med 2 og får 2. Så leter vi etter tall fra 20 til 29 som multiplisert med sifferet på enerplassen i det samme tallet kommer nærmest opp til 148. Vi ser at $25 \cdot 5 = 125$, mens $26 \cdot 6 = 156$. Det neste sifferet i svaret blir derfor 5, og vi kan fortsette:

2 48 69 29	15	
1		
148		25
125		
23 69		

3. Vi multipliserer igjen "svaret 15" med 2 og får 30. Så leter vi etter tall fra 300 til 309 som multiplisert med tallet på enerplassen i det samme tallet kommer nærmest opp til 2369. Vi ser at $307 \cdot 7 = 2149$ og $308 \cdot 8 = 2464$. Det neste sifferet i svaret blir derfor 7, og vi kan fortsette:

2 48 69 29	157	
1		
148		25
125		
23 69	307	
21 49		
2 20 29		

4. Vi multipliserer igjen "svaret 157" med 2 og får 314. Så leter vi etter tall fra 3140 til 3149 som multiplisert med tallet på enerplassen i det samme tallet kommer nærmest opp til 22029. Vi ser at $3147 \cdot 7 = 22029$. Det betyr at dette går akkurat opp

2 48 69 29		1577	
1			
148			25
125			
23 69		307	
21 49			
2 20 29	3147		
2 20 29			

Det betyr at $\sqrt{2486929} = 1577$.

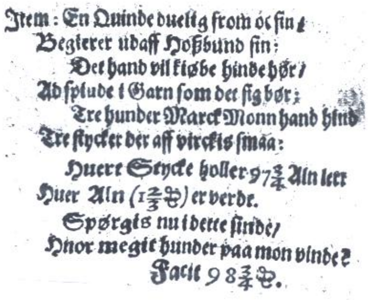
Om kvinner og matematikk

Litt over fire sider i Aritmetica Danica retter seg direkte mot kvinnelige elever. Det må ha vært uvanlig, sannsynligvis enestående på 1600-tallet. Den første elevprotokollen som er bevart fra Trondheim katedralskole er fra 1652. Verken den eller andre oversikter viser navn på kvinnelige elever, i alle fall ikke i latinskolen. Sannsynligvis har Hanssøn hatt undervisning for kvinnelige elever hjemme i de borgerlige hjem i Trondheim. Det kan tenkes at de også kan ha vært elever i den danske skolen som fantes i byen på den tiden, men så langt ser det ikke ut til å finnes noen dokumentasjon på det

De fire sidene starter helt plutselig og umotivert med et vers, på fire linjer, i original versjon til venstre og en gjendiktning til høyre:

Efftir ad	Utenat
Dydige piger som duelig er /	Dydige piker som dyktige er,
Stor løst til Konsten haffue:	vil lære den nyttige regnekunst.
Naar jeg vist disse exempler /	De eksempler jeg viser her,
Set til forærings Skaffue:	vil være kvinner til storligen gunst

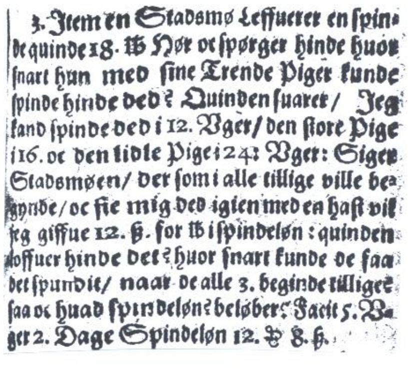
En av oppgavene her er formet som et dikt eller vers, i originalversjon til venstre og en noe modernisert språkdrakt til høyre:



Item: En Quinde duelig from oc fin /
Begierer udaff Hoßbund sin:
Det hand vil kiøbe hinde hør /
Ad spinde i Garn som det sig bør;
Tre hunder Marck Monn hand hind
Tre stycker der aff vircktis smaa:
Huert Stycke holler $97\frac{3}{4}$ Aln lett
Huer Aln ($1\frac{2}{3}$ M.) er verde.
Spørgis nu i dette sinde/
Hvor megit hunder paa mon vinde?
Facit $98\frac{3}{4}$ M.

Item: En kvinne duelig from og fin
Begjærer utav husbonden sin
Det han vil kjøpe henne er hør[6]
Til at spinne i garn som det seg bør
Tre hunder Mark lar han henne få
Tre stykker derav spinnes må
Hvert stykke er 97 $^3/_4$ alen langt
Hver alen garn er 1 $^2/_3$ mark verdt
Spørgis nu i dette sinde
Hvor megit kan man derpå vinde?
Fasit: 98 $^3/_4$ mark

I den tredje oppgaven finner vi en slags dialog mellom to personer, en stadsmø[7] og en spinnekvinne. Oppgaven er slik:



3. Item en Stadsmø Leffuerer en spinde quinde 18. ℔ Hør oc spørger hinde huor snart hun med sine Trende Piger kunde spinde hinde ded? Quinden suarer / Jeg kand spinde ded i 12. Uger / den store Pige i 16. oc den lidle Pige i 24. Uger: Siger Stadsmøen / der som i alle tillige ville begynde / oc fie mig ded igien med en hast vil jeg giffue 12. ß. for ℔ i spindeløn: quinden loffuer hinde det? huor snart kunde de faa det spundit / naar de alle 3. begynde tillige? faa oc huad spindeløn beløber? Facit 5. Uger 2. Dage Spindeløn 12. M. 8. ß.

Item: En stadsmø leverer en spinnekvinne 18 pund hør og spør henne hvor snart hun sammen med sine to piger kan spinne henne garn av det? Kvinnen svarer / Jeg kan spinne det på 12 uker, den største pigen på 16 og den lidle pigen på 24 uker. Siger så stadsmøen / dersom i alle ville begynde / og si meg siden det haster, vil jeg gi 12 skilling i spinnelønn for hvert pund. Kvinnen godtar tilbudet. Hvor snart kunne de få det spunnet når alle tre spant samtidig, og hva ble spinnelønnen deres?

Facit 5 uker og 2 dager Spinnelønn 12 Mark 8 skilling

[6] Hør er det samme som lin.

[7] Stadsmø var på den tiden en stilling som kammerjomfru i byfogdens familie. Tittelen kjenner vi blant annet fra Ludvig Holbergs bok Peder Paars. Hovedpersonen, Peder Paars, er en aktet kremmer i den gamle byen Kallundborg. Ledsaget av sin svenn og skriver Peder Ruus begir han seg ut på det farefulle hav for at drage til Aarhus, hvor hans elskede festemø har en stilling som «stadsmø» — kammerjomfru — i byfogdens familie.

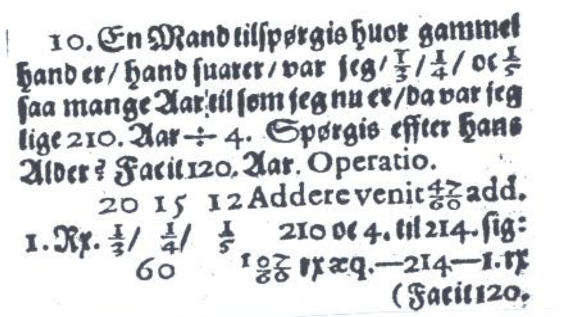
Utregningen står ikke i boka, men i dag, med vår måte å regne på, kan vi regne ut tida de trenger, slik når vi setter tida lik x:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{12} + \frac{1}{16} + \frac{1}{24}$$

Løser vi denne likninga, finner vi at x = 5 $^1/_3$, som med datidens 6 dagers arbeidsuke tilsvarer 5 uker og 2 dager. I svaret for prisen ser det ut til å være en regne- eller skrivefeil. Lønna for arbeidet vil være 216 skilling (1 mark = 16 skilling) som tilsvarer 13 mark og 8 skilling (ikke 12 mark og 8 skilling som det står i fasiten til oppgaven).

Virkelighetsnær og virkelighetsfjern matematikk

Tema for svært mange av eksemplene og oppgavene i boka er virkelighetsnære. Men samtidig er opplysningene i oppgavene eller fasitsvaret som oppgis i mange tilfelle hinsides virkeligheten. Det betyr at hensikten med oppgavene i mange tilfeller er å lære seg regneteknikker, ikke å gjengi eller forsøke å forstå virkeligheten. Når en oppgave handler om å regne ut alderen på en person, og fasitsvaret blir 120 år, betyr nok ikke det at det var vanlig at folk ble 120 år på 1600-tallet.



10. En Mand tilspørgis huor gammel hand er / hand suarer / var jeg / $\frac{1}{3}$ / $\frac{1}{4}$ / oc $\frac{1}{5}$ saa mange Aar til som jeg nu er / da var jeg lige 210. Aar ÷ 4. Spørgis effter hans Alder? Facit 120. Aar. Operatio.
20 15 12 Addere venit $\frac{47}{60}$ add.
1. Rx. $\frac{1}{3}$ / $\frac{1}{4}$ / $\frac{1}{5}$ 210 oc 4. til 214. sig:
60 $\frac{107}{60}$ rx æq.—214—1. rx
(Facit 120.

Denne oppgaven er slik:

En mann tilspørges hvor gammel han er. Han svarer: ”Var jeg i tillegg til det jeg er nå $^1/_3$, $^1/_4$ og $^1/_5$ så mange år som jeg er nå, da hadde jeg vært 210 for 4 år siden.” Det spørres da etter hans alder?

Fasit 120 år

Utregningsmåten forklares slik:

20 15 12 (Dette er hva du må multiplisere hver av de tre brøkene med, slik at du får fellesnevneren 60).

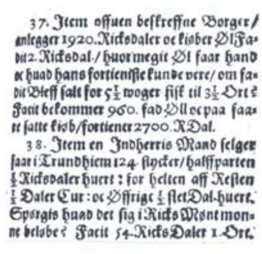
Adder brøkene til brøken $\frac{47}{60}$. Adder 1, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ og $\frac{1}{5}$, og tilsvarende 210 og 4 til 214.

Si $\frac{107}{60}$ tilsvarer 214. Hva tilsvarer da 1? Fasit 120. (Regnemåten her blir $\frac{214 \cdot 60}{107}$).

Som vi ser, legges det stor vekt på utregning og tenkemåte for å komme fram til svaret 120 år. Men det finnes ingen refleksjon eller kommentar til gyldigheten eller relevansen svaret har i forhold til hvor gammel en mann kunne bli i virkeligheten.

Den første av oppgavene til høyre handler om kjøp og salg av øl. Et fat øl koster 2 riksdaler, og borgeren som kjøper og selger 960 fat tjener 2700 riksdaler på handelen.

Den andre handler om en innherredsmann som selger 124 får i Trondheim. Her oppgis prisen per sau til å være ½ daler for halvparten og noe annerledes for resten. For 124 sauer får innherredsmannen litt over 54 riksdaler.



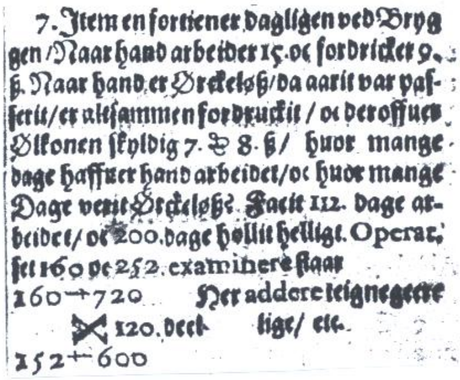
37. Item offuen beskreffne Borger / anlegger 1920. Rixdaler oc kiøber Øl Fadet 2. Rixdal. / huor megit Øl faar hand oc huad hans fortienste kunde vere / om fadit Bleff salt for 5½ woger fisk til 3½ Ort? Facit bekommer 960. fad Øll oc paa same fatte kiøb / fortiener 2700. R.Dal.

38. Item en Indherris Mand selger faar i Trundhiem 124. stycker / halffparten ½ Rixdaler huert: for helten aff Resten ½ Daler Cur: oc Offrige ½ slet Dal. huert. Spørgis huad det sig i Rixs Mønt monne beløbe? Facit 54. Rixs Daler 1. Ort.

Om disse to oppgavene gjengir verdien på øl og på sau slik de virkelig var på denne tida, kan en stille spørsmål ved. Vi kan i alle fall undre oss.

Det finnes eksempel fra boka på prisen på en hest blir angitt til 16 riksdaler. Det kan tyde på at tallene i den andre oppgaven er realistiske. Kanskje prisen og fortjenesten på øl blir presentert gjennom så store tall for å skremme folk fra å drikke for mye.

Den siste oppgaven jeg tar med her, kan kanskje være med på å underbygge en slik oppfatning. Oppgaven er slik:


7. Item en fortiener dagligen ved Bryg-
gen / Naar hand arbeider 15. oc fordricker 9.
ß. Naar hand er Ørckeløß / da aarit var pas-
serit / er altsammen fordruckit / oc deroffuer
Ølkonen skyldig 7. ₰ 8. ß / huor mange
dage haffuer hand arbeidet / oc huor mange
Dage verit Ørckeløß? Facit 112. dage ar-
beidet / oc 200. dage hollit helligt. Operat.
set 160 oc 252. examinere saa
160 — 720 Her addere leignegere
120. deel- lige / etc.
252 — 600

En fortjener daglig ved bryggen når han arbeider, 15 skilling og fordrikker 9 når han er ørkesløs. Da året var passert er alt sammen fordrukket og dertil skyldig ølkonen 7 mark og 8 skilling. Hvor mange dager har han arbeidet og hvor mange har han vært ørkesløs?

Fasit 112 dager arbeidet, 200 dager holdt hellig.

I oppgaven er det underforstått at det blir 52 ganger 6 arbeidsdager i et år, og at det er 16 skilling i 1 mark. Slike opplysninger blir heller ikke gitt i andre oppgaver. Det spesielle ved oppgaven er emnet den tar opp (arbeid kontra øldrikking) og hva den oppfatter som det å holde hellig. Når vi i dag leser denne oppgaven, kan det se ut som at det å være ørkesløs og drikke øl, nesten ensbetydende med å holde dagen hellig. Om det å holde helg ble oppfattet som det samme som det å ikke arbeide, eller om det som står her er en form for ironi, er det vanskelig for oss å vite.

Om bokas bruk og utbredelse

I min bok Meningsfylt matematikk fra 1999 har jeg gitt en helt kort omtale av Hanssøns bok (Botten 1999: 50ff). Jeg ble første gang kjent med boka gjennom Viggo Bruns ”Regnekunsten i det gamle Norge”, fra 1961. Her har han en presentasjon av boka (Brun 1961: 51ff) der han også plasserer boka inn i et lærebokhistorisk perspektiv. Den første svenske læreboka skrevet på morsmålet, ser ut til å være et håndskrift av Hans Larsson Rizanesander fra 1601, mens den første trykte læreboka er Aurelius’ räknelära fra 1614. Denne er gitt ut i ny utgave av Foreningen for svensk undervisningshistorie, med en innledning av Bengt Johansson, i 1995.

Hanssøn har sikkert kjent til både disse bøkene og tilsvarende bøker fra Danmark, for eksempel Hans Langs ”Ny Regnekontis Bog” fra 1576, og kanskje også tyske og hollandske bøker fra den tiden. I forordet argumenterer han også klart for hvorfor han ikke bruker lærebøker som ellers var tilgjengelige på denne tiden. Det er likevel klart at mange av eksemplene og oppgavene eller ideer til eksempler og oppgaver, har han hentet fra ulike kilder

I Ribsskog (1941: 21f) er bruken av Hanssøns bok helt kort omtalt. Han skriver:

> Også i Norge prøvde flere i denne tida å skrive reknebøker for den lågere skolen, men ingen greidde å slå gjennom. Regnemester ved St. Jørgens hus i Trondheim, Tyge Hanssøn, var en av de heldigste. Han utga i 1648 ei reknebok som blei atskillig brukt, til den i 1680 blei avløyst av Søren Matthiesens bøker.

Bortsett fra denne korte omtalen, er det vanskelig å finne noen kilder som antyder hvor lenge og i hvilket omfang boka ble brukt. Ribsskog dokumenterer heller ikke noe sted hvor han har sine opplysninger fra, men siden ikke engang årstallet da boka ble utgitt er gjengitt riktig, har han nok ikke gått til primærkilden når han har studert boka.

Referanseliste:

Bekken, O. 1995: *Algorismus i Hauks bok* I Nordisk matematikkdidaktikk nr 1, 1995

Botten, G. 1999: *Meningsfylt matematikk – nærhet og engasjement i læringen*. Bergen: Caspar forlag

Brun, V. 1961: *Regnekunsten i det gamle Norge*. Drøbak: Universitetsforlaget

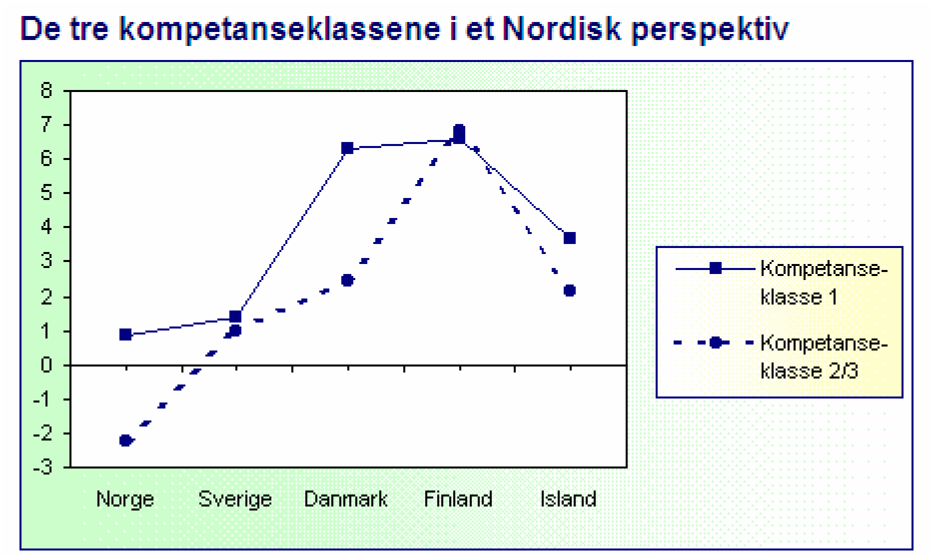
Ribsskog, O. K. 1941: *Litt omkring rekneopplæringa*. Oslo: Gyldendal Norsk Forlag

Svein Torkildsen, ansatt ved Matematikksenteret
Har siden første del av 90-tallet samarbeidet jevnlig med Universitetet i Agder, spesielt med prosjekter rettet mot bruk av digitale verktøyprogram i matematikk. Har i samme tidsrom holdt en rekke kurs og foredrag om matematikk-undervisning både nasjonalt og internasjonalt.
Fikk Bernt Michael Holmboes minnepris i 2005.

Arbeider som organisasjonssektrær i LAMIS og med større etterutdanningsprosjekter for Matematikksenteret.

Trenger vi standard algoritmer?

PISA-undersøkelsen 2003. Matematikk.



I **kompetanseklasse 1** stilles det krav til faktakunnskaper, gjenkjenning av matematiske objekter og utføring av rutinemessige prosedyrer og standardalgoritmer.

I **kompetanseklasse 2** skal elevene kunne se sammenhenger mellom ulike områder av matematikken. De skal kunne bruke ulike representasjoner, se sammenhenger mellom definisjoner, bevis eksempler og påstander, samt bruke et formelt språk.

I **kompetanseklasse 3** stilles det krav om at elevene skal identifisere matematikken som finnes i de ulike kontekstene og bruke matematikken til å løse problemer. Disse prosessene inneholder kritisk tenking, analyse og refleksjon. [1]

I Pisa-undersøkelsene er standardalgoritmer plassert i kompetanseklasse 1, og vi ser av diagrammet at norske elever ligger litt over OECD-gjennomsnittet, men på bunn blant de nordiske landene i denne kompetanseklassen, sammen med Sverige. Selv om det ser ut til å være større grunn til å sette søkelyset på det som hører inn under kompetanseklassene 2 og 3, kan det kanskje være en årsak-virkning-sammenheng mellom klasse 1 og 2/3 som likevel gjør det interessant å dvele litt ved kompetanseklasse 1. Kan det være slik at måten vi arbeider med standardalgoritmene på hindrer elevene i å utvikle de kompetanser som plasseres under klasse 2 og 3?

Standardalgoritmer
Hva menes forresten med standardalgoritmene? Selv om begrepet også kan brukes i en videre betydning, skal vi på dette verkstedet konsentrere oss om de regneforskriftene vi kan lage for de fire regneartene. I den forbindelse hører vi gjerne brukt uttrykk som ”standardalgoritmen for multiplikasjon”, ”standardalgoritmen for divisjon” osv. Bruken av bestemt form entall antyder at dette en rimelig fast størrelse som det er utbredt enighet om.

Deltakerne på verkstedet ble utfordret på å si sin mening om hva som er standardalgoritmen for multiplikasjon. I valget mellom **A** og **B**, var **A** enstemmig vinner.

A

	1	2					
		3	4				
		2	4	7	*	3	7
	1	7	2	9			
	7	4	1				
	9	1	3	9			

B

	3	4			
1	2				
2	4	7	*	3	7
		7	4	1	
		1	7	2	9
		9	1	3	9

Omtrent ¾ av de ca 200 deltakerne brukte algoritmen som den står. Resten setter en 0 til slutt i linja med 741.

Et stort antall operasjoner
Deltakerne ble utfordret å telle gjennom antall operasjoner som skal utføres før produktet er på plass. Antallet varierte stort – alt etter hvordan en operasjon ble definert. Med utgangspunkt i et eksempel fra Breiteig/Venheim [2] kan vi registrere følgende tankeoperasjoner for å gjennomføre multiplikasjonen 377 · 94:

		3	7	7	*	9	4
	1	5	0	8			
3	3	9	3				
3	5	4	3	8			

1. Først skal vi multiplisere 4 · 377
2. Vi tenker 377 som 300 + 70 + 7
3. Vi regner ut 4 · 7 og får 28
4. Her skriver vi 8 på enerplassen og
5. noterer tierne som minnetall
6. Deretter multipliserer vi 4 · 7 tiere som blir 28 tiere,
7. adderer minnetierne og får 30 tiere.
8. Nå skriver vi 0 tiere på tierplassen
9. og noterer hundrerne som minnetall.
10. Til slutt multipliserer vi 4 · 3 hundrere som blir 12 hundrere,
11. adderer minne-hundrerne og får 15 hundrere.
12. Vi skriver 5 på hundrerplassen og 1 på tusenerplassen.
13. Deretter kommer 90 · 377.
14. Vi regner i stedet ut 9 · 377.
15. og multipliserer så med 10 ved at vi forskyver svaret 3393 en plass mot venstre under 1508

Operasjonene 2–12 gjentas slik at vi minst har 26 tankeoperasjoner før vi adderer:

27. 8 føres ned – eller 8 + 0 = 0
28. Vi skriver 8 på enerplassen
29. 0 tiere + 3 tiere = 3 tiere
30. Vi skriver 3 på tierplassen
31. 5 hundrere + 9 hunderere = 14 hundrere.
32. Vi skriver 4 på hundrerplassen og
33. setter 1 i minne på tusener-plassen
34. 1 tusener + 3 tusenere = 4 tusener.
35. Vi legger til 1 tusener i minne og får 5 tusenere.
36. Vi skriver 5 på tusenerplassen.
37. De 3 titusenerne skriver vi på plassen for titusenerne.

Vi må også regne med at en rekke elever ikke tar hver enkelt av de enkle multiplikasjonene i en operasjon, men spalter dem opp i flere. Det samme kan skje med addisjonene.

Breiteig/Venheim oppsummerer slik: Dette er en ganske raffinert regnemetode. Den gir elevene store utfordringer. Vi skal neppe vente at mange elevere lærer metoden på en annen måte enn som en rent mekanisk prosedyre – om forklaringen er aldri så god – hvis de ikke får være med på en mer omfattende prosess enn bare å bli presentert for metoden. [2]

Det er ikke vanskelig å være enig i den konklusjonen, og erfaring viser også tydelig at det skal mye øving til før algoritmen "sitter". Like vel opplever mange at elevene igjen blir usikre når de har arbeidet med lang divisjon. Da melder det seg spørsmål som: Skal vi begynne fra venstre eller høyre. Skal linjene med tall under selve oppgaven skrå møt høyre eller venstre? Det er en del av den figurative kunnskapens vesen: Den har ikke rot i matematiske ideer, men memorerer ut fra de visuelle uttrykkene til det de arbeider med. Spørsmålet blir om det er mulig å la elevene bli med på en prosess. Hva skal den i så fall bestå i og hvordan skal vi legge til rette for at elevene kan bli med på den?

Prosesser og problemløsing

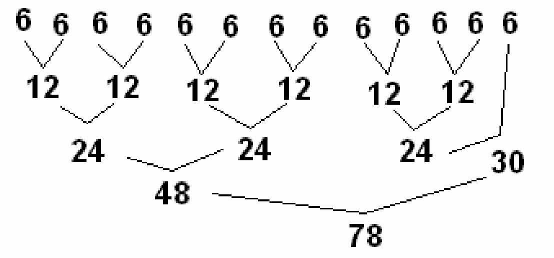
Mange tenker på problemløsingsom spesielt vankelige oppgaver – gjerne tekstoppgaver. Men problemløsing er et relativt begrep, og vi kan snakke om problemløsing i mange sammenhenger. Det sentrale her er at problemløsing i seg selv er en prosess som Polya [3] har beskrevet i fire faser:

1. Forstå problemet
2. Legge en plan
3. Gjennomføre planen
4. Se tilbake – vurdere løsningen

Denne prosessen kan brukes på alle områder der elever skal utvide sin kunnskap. Problemløsing blir på den måten et alternativ til å forklare matematikken for elevene før de får oppgaver å øve seg på. En klasse som hadde arbeidet med den lille multiplikasjonstabellen skulle utvide kunnskapen slik at de kunne gjennomføre multiplikasjoner med en faktor større enn 10. ved skolen var det et bygg med 13 vinduer. Hvert av vinduene hadde 6 ruter. Elevene betraktet bygget før de gikk inn og fikk i oppgave å finne ut hvor mange ruter som måtte til om alle skulle skiftes. Her trekker jeg fram tre ulike strategier elevene benyttet:

Noen elever tegnet 13 vinduer med 6 ruter i hver og de kom til 78 ved å telle. Denne strategien ble først trukket fram i oppsummeringen etterpå.

En elev slapp deretter til med sin metode:



Da skjedde det som ofte skjer i slike prosesser. En elev forkynner: Slik tenkte ikke jeg! Læreren hadde observert denne elevens metode og ventet bevisst med denne elevens forklaring til slutt: Jeg tenkte at hvis det var ti vinduer hadde det vært 60 ruter. Men så er det tre vinduer til, og det er 18 ruter i de vinduene. Da blir det 78 til sammen. I elevens arbeidsbok hadde tanken fått dette skriftlige uttrykket:

10 * 6 = 60   3 * 6 = 18

60 + 18 = 78

Elevene har forstått problemet, lagt hver sin plan og kommet fram til et resultat. På dette nivået må nok helst læreren lede elevene til ev vurdering av svaret. Prosessen klassen har vært gjennom gir grunnlag for kommunikasjon av matematiske ideer, og resonnementet til eleven som avsluttet oppsummeringen passer som hånd i hanske til den standardalgoritmen vi har referert innledningsvis. Men det er et stort sprang fra dette resonnementet til standardalgoritmens skriftlige uttrykk:

1
13 * 6
78

Når vi anvender problemløsing som metode i sammenhenger som dette, står vi overfor en ny utfordring: Hvordan kan vi skrive det vi har tenkt? Elevens tredelte oppsett kan vi samle i en algoritme som gir god oversikt:

	13 * 6
10 * 6 =	60
3 * 6 =	18
	78

Merk her at læreren ikke har presentert et oppsett for elevene. Han har utfordret dem på å tenke og ledet klassen i en sammenlikning av ulike måter å tenke på. De fleste elevene syntes den tredje eleven hadde en lur måte å tenke på, og de kunne derfor være med på prosessen videre. Forutsetningen for bruke denne algoritmen er at elevene kjenner posisjonssystemet og kan multiplisere tall med dekadiske enheter. Det rasjonaliserer utregningene.

Utvidelse og nye utfordringer

Vi kan kalle dette en åpen algoritme fordi den synliggjør mer av prosessen. Algoritmen lar seg også lett utvide til multiplikasjon med større tall:

				247 * 37
200	*	30	=	6000
200	*	7	=	1400
40	*	30	=	1200
40	*	7	=	280
7	*	30	=	210
7	*	7	=	49
				9139

Elever som har god oversikt på de trinnene metoden bygger på, kan forenkle den i retning av det vi innledningsvis kalte standardalgoritmen. Men det bør neppe være et mål for alle elevene i en klasse. Som et ledd i arbeidet med forståelse, kan elevene få andre oppsett å sammenlikne med:

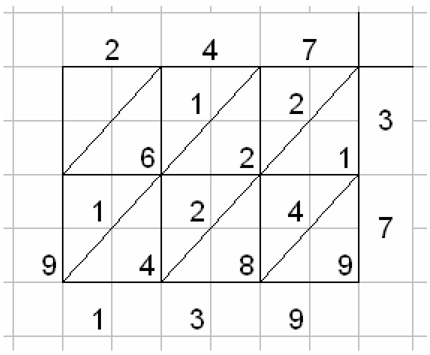
	200	40	7	
30	6000	1200	210	7410
7	1400	280	49	1729
				9139

Hva er likt, og hva er forskjellig i disse to algoritmene? Slike spørsmål kan få elevene til å trenge enda grundigere inn i den tenkingen som ligger bak algoritmen.

Inspirasjon fra historien?

Bjørn Smestad mener at matematikkhistorien kan vise elevene et mangfold av algoritmer, og slik bedre forståelsen av deres egne algoritmer. [4]

Gittermetoden kan være en god algoritme å studere:



Elevene kan studere mønsteret, se etter kjente sammenhenger og se hvordan disse er organisert. Det er dermed ikke sagt at elevene skal arbeide med alle disse metodene samtidig – neppe innen samme skoleår heller. Når elevene skal lære en algoritme er det viktig er å ta utgangspunkt i elevenes egne metoder og bygge algoritmene på dem. Da vil en i regelen allerede i utgangspunktet ha flere metoder, noen mer effektive enn andre. Når elevene kommer videre i opplæringen kan de får slike oppgaver i tillegg til øvings- eller drilloppgaver. De får da både arbeide med forståelse og ferdighet.

Den russiske bondemetoden og metoder basert på totallsystemet kan være andre algoritmer som kan utfordre enkelte elevers forståelse.

Fortellingen om en divisjon
Av 24 elever på 7. trinn hadde 12 gitt opp å lære en algoritme for lang divisjon. De svarte kontant NEI på om kunne det. Tidligere erfaringer med temaet hadde overbevist dem om at det var en umulig oppgave for dem. Læreren organiserte de 12 elevene i tre firergrupper. Hver gruppe fikk et beløp på 2–3000 kr i lekepenger og ble bedt om å dele det på 6 personer. De kunne veksle penger om de hadde behov for det.

Elevene startet straks delingen. Penger ble lagt i seks tydelig atskilte hauger, litt om gangen. Litt ute i prosessen ble de spurt om hvordan de arbeidet. Elevene kunne fortelle at de hadde startet med å gi alle seks 100 eller 200 kr hver. De tre gruppene hadde ikke gjort det likt. Det var mye penger igjen, så de hadde fortsatt å veksle og dele ut. Da spørsmålet kom var de på ”myntnivå”, og elevenes fortelling var lett å kontrollere. Pengene lå jo i en stabel i den rekkefølgen de var delt ut. Elevene fikk flere oppgaver, og noen ganger fikk de delt ut alle pengene, andre ganger ble det en rest på noen kroner. Læreren kunne registrere at elevene kunne dele, men elevene var ikke enige. Selv når læreren påpekte at de fikk en divisjon å utføre og at de kunne finne fram til svaret, godtok de ikke det som en divisjon. Etter litt diskusjon måtte de da strekke det til at de på en måte hadde dividert når de fikk en oppgave og kunne si hva svaret på oppgaven ble.

Problemet var naturlig nok at de ikke kunne skrive divisjonen som et regnestykke i boka. Men elevene hadde en strategi, og neste ledd i utviklingen ble da å hjelpe dem til å noter det de gjorde etter hvert. Elevene fikk 2380 kr som skulle deles på 7. De skrev divisjonen vi skulle utføre i boka si:

2	3	8	0	:	7	=

Elevene var raske med å del ut 200 kr til hver av de sju. Det var tid for å stoppe opp og spørre oss selv:

Hvor mye har hver nå fått?
Hvor mye har vi delt ut til sammen?
Hvor mye er det igjen?

Elevene hadde ingen problemer med å svare på slike spørsmål. Pengene lå jo foran dem, så de kunne se hva de hadde gjort og de kunne enkelt kontrollere om det de kom fram til stemte. Det var tid for å skrive:

	2	3	8	0	:	7	=				
-	1	4	0	0				2	0	0	til hver
		9	8	0	igjen						

Dette passet fint til pengene som lå på bordet foran dem. Elevene så straks at de kunne gi enda 100 kr til hver, og dette var snart gjort. Ny stopp for å samtale og skrive:

	2	3	8	0	:	7	=				
-	1	4	0	0				2	0	0	til hver
		9	8	0	igjen						
-		7	0	0				1	0	0	til hver
		2	8	0	igjen						

Og slik fortsatt prosessen til divisjonen var fullført:

	2	3	8	0	:	7	=				
-	1	4	0	0				2	0	0	til hver
		9	8	0	igjen						
-		7	0	0				1	0	0	til hver
		2	8	0	igjen						
-		1	4	0					2	0	til hver
		1	4	0	igjen						
-		1	4	0					2	0	til hver
				0	rest						

Det var bare å regne sammen hvor my som var delt ut til hver, og vi kunne skrive 340 etter likhetstegnet. Etter et par timer med oppgaver løst på denne måten, ville elevene prøve å utføre divisjonen uten penger. Åtte av de 12 elevene fortsatt med det. Fire elever fortsatte med penger som støtte en stund til.

Matematikk – et språk
Elevene hadde i løpet av disse timene gått gjennom en prosess i tre faser:

1. Elevene utførte en **handling** – de delte penger i like store hauger.
2. De **snakket** om hva de gjorde og kommuniserte det til læreren.
3. De **skrev** hva de gjorde etter hvert som handlingen skred fram.

Dette er da en vanlig prosess i all språklæring. En gjør noe eller ser noe, setter ord på det, snakker om det. Til slutt lar en det få et skriftlig uttrykk. Etter hvert som vi utvikler oss tenker vi gjerne på en annen måte, og da ordlegger vi oss også annerledes. Slik også med den fortellingen elevene hadde om delingen.

Etter hvert som de får flere erfaringer vil de for eksempel se hvor mange hundrere det er mulig å dele ut. I eksemplet over ville de da straks dele ut 300 til hver. Divisjonen blir gjennomført i færre ledd. Algoritmen er da i prinsippet da lik den tradisjonelle divisjonsalgoritmen. De som har oversikt nok på prosessene, kan da ta i bruk den algoritmen med forståelse.

Vanlige innvendinger
En vanlig innvending mot denne måten å arbeide på er at elevene blir forvirret når vi viser dem flere måter å løse en oppgavetype på. Men det er ikke det som foregår! Det er elevenes tanker som tar forskjellige retninger, og vi prøver å ta elevenes tanker på alvor. Vi bygger på deres tanker, deres måter å se problemene på, deres strategier for å løse dem.

Da er tiden inne for å gi mitt svar på spørsmålet. Vi trenger algoritmer, men vi trenger ikke EN ALGORITME som alle elvene skal benytte. Vi trenger elever som har et forhold til det holder på med. Vi trenger elever som FORSTÅR matematikk.

Igjen hører jeg en vanlig innvending: Men alle elever kan ikke alltid forstå alt. Og: Det er også en måte å lære på om en bare lærer seg å gjøre det en skal uten å forstå hvorfor. Det kan seinere en gang gå opp for oss hvorfor vi kan gjøre det vi gjør.

Nei, alle kan ikke alltid forstå alt. Ja, det er mulig å lære ved først å gjøre og så forstå. Men når en begir seg inn i det landskapet, skal en være klar over at det er begrenset hva den enkelte klarer å huske. Når hukommelsen blir overbelastet, blir det til slutt et eneste surr for elevene. De kan ikke lenger det de kunne før. Læreren må derfor være selektiv og velge få og sentrale områder der eleven skal få ”gjøre uten å forstå”. Om vår hovedmetode er: ”Jeg viser deg hva du skal gjøre – og så ser vi om du ikke forstår det etter hvert" – vil jeg betegne det som en svært defensiv innstilling fra lærerens side. Det bør snarere være unntaket enn regel at vi har den innfallsvinkelen.

Botten [5] henviser til Magne når han trekker fram forhold som kan føre til matematikkvansker. To forhold nevnes her:

- Elevens forestilling om hva matematikk er og hvordan matematikk læres, kan være den direkte eller indirekte årsaken til at en mislykkes i innlæringen. At matematikk kan læres mekanisk uten forståelse, er en slik forestilling.
- Ensidige undervisningsmetoder med stor vekt på formidling fra lærer til elev kan frata eleven eierforholdet til kunnskap og derved redusere muligheten for læring.

Hvordan bli gode problemløsere?

Svaret er enkelt: ved å løse problemer! Problemløsing bør integreres i undervisningen i alle emner som en metode i arbeidet med nytt lærestoff. Problemløsing bør ikke være an aktivitet begrenset til avgrensede perioder med spesielle problemløsingsoppgaver, grubliser eller hva en nå ønsker å kalle det. Jeg har gitt eksempler på hvordan problemløsing på en enkel måte kan være en del av arbeidet med standardalgoritmer. Denne måten å tenke på kan beskrives som læring *via* problemløsing. Det er noe annet enn å lære *for* eller *om* problemløsing. Jeg slår altså et slag for mer læring *via* problemløsing.

Utgangspunktet for verkstedet var et spørsmål knyttet til resultatene fra PISA-undersøkelsen: Kan det være slik at måten vi arbeider med standardalgoritmene på hindrer elevene i å utvikle de kompetanser som plasseres under klasse 2 og 3? Det blir gjennom flere år på barnetrinnet brukt mye tid på ferdighetstrening i de fire regneartene med større tall. Hvis dette arbeidet i all hovedsak dreier seg om å huske hva vi skal gjøre, vil tanken være låst når vi kommer til problemløsingen. Elevene sitter hele tiden med spørsmålet: Hvordan skal jeg gjøre dette? Matematikk er blitt en reproduksjon av spesielle algoritmer. Og det er nettopp det problemløsing IKKE er.

Referanser

[1] *http://www.pisa.no/kort2000_mat.html#kompetanse*
[2] Breiteig/Venheim: Matematikk for lærere I, TANO, 1998
[3] Polya: How to solve it, Princetoon Paperbacks, 1973
[4] Smestad: Matematikkhistorie I grunnskolens lærebøker, HIF-rapport 2002:1
[5] Botten: Meningsfylt matematikk, Caspar forlag, 1999

Kristian Ranestad,
Professor i matematikk ved Universitetet i Oslo.
Mine forskningsinteresser ligger i algebra og geometri.
Styremedlem i LAMIS. Leder for læreplangruppa for programfaget matematikk i vgs under kunnskapsløftet.

Leder av Faglig råd for Matematikksenteret.

Tall og koder

(Finnes også i LAMIS' sommerkursrapport for 2002)

Koder har vært brukt i kommunikasjon gjennom alle tider. I vår tid danner koder grunnlaget for all elektronisk kommunikasjon, siden all informasjon sendes som en sekvens av 0-er og 1-ere. Av hensyn til sikkerhet og hemmelighold brukes forskjellige type koder, såkalte krypteringskoder og feilrettingskoder. I alle disse kodene spiller tall og algebra en helt avgjørende rolle. I verkstedet gikk vi gjennom og arbeidet med grunnleggende prinsipper for bruk av tall i disse kodene. Spesielt brukte vi kongruens- eller moduloregning til å lage og analysere slike koder.

Kongruens- eller moduloregning

Addisjons- og multiplikasjonstabellene modulo 2 og 3 er

+	0	1
0	0	1
1	1	0

X	0	1
0	0	0
1	0	1

og

+	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

X	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

mens multiplikasjonstabellen modulo 7 er

X	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	1	3	5
3	3	6	2	5	1	4
4	4	1	5	2	6	3
5	5	3	1	6	4	2
6	6	5	4	3	2	1

Kryptering

For å sende en hemmelig melding koder vi den først med tall. Hver bokstav i alfabetet kodes med et tosifret tall etter oppskriften (kodenøkkelen):

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V	W	X	Y	Z
11	12	13	14	15	16	21	22	23	24	25	26	31	32	33	34	35	36	41	42	43	44	45	46	51	52

Æ Ø Å

53 54 55 66

Et mellom rom i meldingen kodes til 66.

Den kodete meldingen krypteres så, siffer for siffer, ved multiplikasjon med et fast tall (krypteringsnøkkelen). Den krypterte meldingen dekrypteres av mottaker ved å gå omvendt vei tilbake til den opprinnelige meldingen. Dette kan han gjøre når han har krypteringsnøkkelen og kodenøkkelen.

Hele prosessen fra avsender til mottaker kan vi sette opp i et skjema:

MELDING:

I LOVE U

KODET MELDING:

2366263344156643

KRYPTERINGSNØKKEL(HEMMELIG):

(multiplikasjon av hvert siffer med) 5 (modulo 7)

KRYPTERT MELDING:

3122321165422 61

DEKRYPTERINGSNØKKEL:
(multiplikasjon med) 3 (modulo 7)

DEKRYPTERT MELDING:
2366263344156643

DEKODET MELDING:

I LOVE U

Kodenøkkelen er normalt antatt å være alminnelig kjent av ulike grunner. Det samme gjelder krypteringsalgortimen (multiplikasjon modulo 7). Dermed ligger all hemmeligheten i krypteringsnøkkelen. Den som ikke kjenner den må prøve seg fram for å finne den rette nøkkelen.

Oppgave. To og to, lag hver sin kryperte melding som i eksempelet med "I LOVE U" som den andre så løser ved å prøve ulike dekrypteringsnøkler.

Feilrettingskoder

Meldinger blir ofte forstyrret eller ødelagt før de kommer fram. Med godt valg av kode kan få feil i meldingen oppdages og til og med rettes opp, uten at en trenger å ta kontakt med avsender. Moduloregning kan brukes til å lage enkle feilrettingskoder. ISBN og fødselsnummer er bygget opp med regning modulo 11.

I et eksempel skal vi vise hvordan moduloregning brukes til dette. De meldingene som sendes er firesifrede tall $x_1x_2x_3x_4$ i 3-tallssystemet, det vil si at sifrene x_i er 0,1 eller 2. Sifrene i meldingen oppfyller dessuten to likninger:

$$2x_1+x_2+x_3=0 \text{ (mudulo 3)}$$
$$2x_1+2x_2+x_4=0 \text{ (modulo 3)}$$

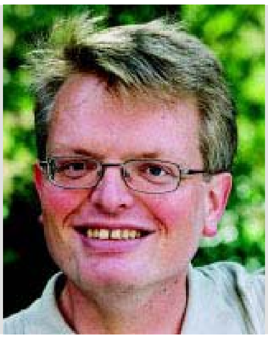
Anta at meldingen mottas med høyst ett galt siffer. Vis ved eksempler hvordan du kan finne tilbake til den sendte meldingen.

Oppgave: Skriv opp et vilkårlig firesifret tall i 3-tallssystemet og finn hvilket tall (hvilken melding) som var sendt, dersom dette er det mottatte.

Eksempel: Tallet 1221 i 3-tallsystemet oppfyller ikke kravet siden den andre likningen ikke går opp. Dersom en endrer siste siffer til 0 får en 1220 som er en gyldig melding (oppfyller begge ligningene). Den sendte meldingen må være denne dersom bare en feil er oppstått. Hvorfor?

Ekstraoppgave: Skriv opp alle gyldige meldinger. (Alle firesifrede tall I 3-tallssystemet som oppfyller do to likningene).

Plenum 4, tirsdag kl 15.15 – 16.00



Eirik Newth er cand. scient med hovedfag i teoretisk astrofysikk. Siden 1990 har han arbeidet på heltid som forfatter og formidler av naturvitenskap for et bredt publikum. Eirik Newth har skrevet mer enn 1600 blogginnlegg og 350 artikler samt utgitt 19 bøker, som tilsammen er utkommet på 17 språk. Han er programleder for radioprogrammet Superstreng på Kanal24, og brukes ofte som kommentator i radio og TV i spørsmål som angår fremtidsforskning, populærvitenskap og formidlings- og publiseringsspørsmål.

(Bilde og tekst er hentet fra hans hjemmeside, http://newth.net/eirik/

Elvis-smørbrødet, T-skjorteteorien og galaktisk for begynnere - tre ting du ikke visste at du ville vite om matte

Eirik Newth holdt et gnistrende foredrag der han tok utgangspunkt i å beregne hvor mange kalorier det må ha vært i det såkalte Elvis-smørbrødet. Han viste med mange morsomme eksempler hvordan vi kan se verdens små og store tall med et matematisk blikk.

Matematikkorientering langs Nidelvens bredder
25. november 2007

Marinen – Fylkeshuset – Nidarosdomen - Gamle Bybro – Brubakken – Sentralbygg II – Realfagbygget

Novemberkonferansen 2007

Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Oppgave 1

Robåt over elva

Sted: Marinen

Utstyr: Lommeregner

En robåt starter ved elvebredden på den andre siden av elva med retning 90 grader på bredden. Den holder jevn fart på 2 m/sek rett fram.
Vannet i elva renner med en fart på 0,2 m/sek.

Gjør overslag og beregninger for å finne ut hvor mye lenger ned i elva båten vil nå bredden på denne siden?

Beregninger og svar:

Oppgave 2

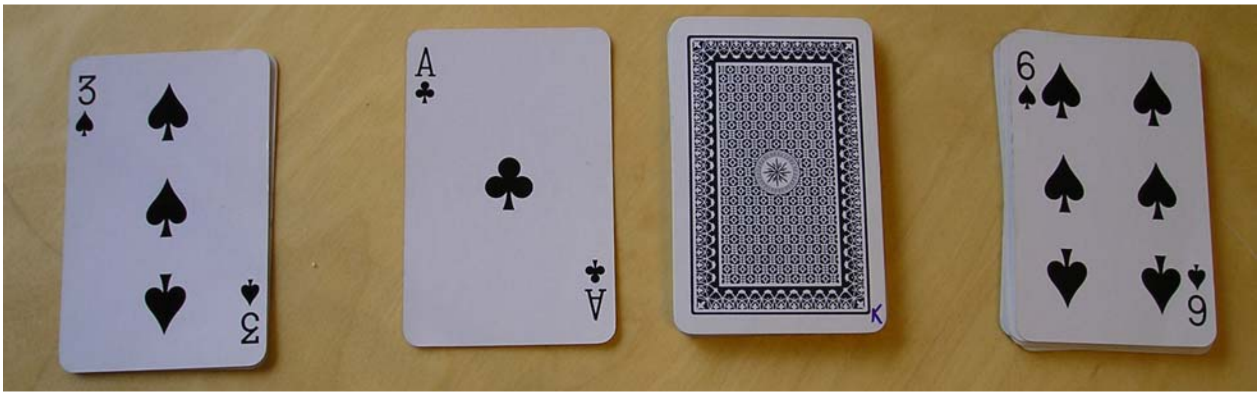
Problemløsning (og pølsespising) i Fylkeshuset

Sted: Fylkeshuset, Erling Skakkes gate 14

Utstyr: Kortstokk

a) Triks med kortstokken

Dere får utdelt en kortstokk. Ta ut eventuelle jokere, og stokk kortene godt. Så skal kortene legges ut i bunker. Si "10" når dere legger ut det første kortet, "9" når du legger ut det andre, "8" med det tredje kortet, osv. Sagt på en annen måte, dere teller nedover fra 10 til 1 mens dere legger ut kortene.
Alle billedkortene har verdi 10.
Første gang dere legger ut et kort som har samme verdi som tallet dere sier høyt(for eksempel hvis det kommer opp en 3-er når du sier 3), så skal dere slutte å legge kort i den bunken, og starte på en ny bunke og si 10 – 9 – 8 – osv. Hvis dere kommer til 1 uten å treffe en eneste gang, skal dere "drepe" den bunken ved å legge et kort med baksida opp på toppen av bunken. Fortsett til dere har 4 bunker.
Nå skal du summere tallene på de øverste kortene fra hver bunke. De døde bunkene teller 0. Tell opp like mange kort fra kortene dere har igjen på handa som det tallet dere fikk som sum.



Summen er 3 + 1 + 6 = 10. Tell opp 10 kort fra hånda og legg på bordet. Hvor mange kort er det på hånda nå?

Gjør trikset igjen minst to ganger.

Gi en matematisk forklaring på hva som skjer.

b) Den magiske tverrsummen

Alle på gruppa skriver ned telefonnummeret sitt. Multipliser det med 8. Skriv deretter ned følgende tre tall:

1. telefonnummeret
2. 8
3. produktet av telefonnummeret med 8.

Summere alle sifrene i de tre tallene. Summer sifrene i svaret til dere kommer til et ensifret tall. Hvilket tall blir det?

FORKLARINGER/BEVIS:

Oppgave 3

Geometriske former i Nidarosdomen

Sted: Nidarosdomen

Hvilke geometriske former finner dere i kirkebygningen? Lag skisser og skriv på navn. Prøv å finne en forklaring på hvorfor nettopp disse formene er brukt (hva de symboliserer).

FORMENE VI HAR FUNNET, og hvorfor vi tror nettopp disse er brukt:

Oppgave 4

Julelys på Gamle Bybro

Sted: Gamle Bybro

Utstyr: Lommeregner

Tenk dere at Gamle Bybro skal pyntes med julelys. Lysene skal dekke de doble gjerdene på begge sider av brua, søylene og oversiden og undersiden av ”taket” på Lykkens portal.

Lysene tennes 1. søndag i advent kl 12 og slukkes 13. dag jul klokken 18.

På bildet nedenfor ser dere hva slags lys dere skal bruke, og nedenfor finner dere noen tekniske data om lysene.

```
Tekniske data:
230 V/ 50 Hz - 10 W
Ledning: 30 meter
```

Gjennomsnittsprisen på strøm levert av Trondheim Energiverk er 36,50 øre/kWh siste 12 mnd.

Hva vil dere anslå strømutgiftene til å bli for at julelysa skal lyse dag og natt i denne perioden?

Oppgave 5

Sykkelheisen Trampe

Sted: Brubakken ved Gamle Bybro

Utstyr: Lommeregner
Tau
Målbånd

Sykkelheisen bringer deg fra foten av Brubakken og nesten opp til Kristiansten festning. Du sitter på sykkelen med høyre fot plassert på heisen som skyver deg opp den 130 meter lange bakken i en fart på 2 m/s. Høydeforskjellen er 24 meter.

a) Hvor bratt er sykkelheisen på det bratteste, og hvor bratt er sykkelheisen på det slakeste? (oppgi svarene som forholdstall og eventuelt helningsvinkel)

Sykkelheisen tar 5 syklister av gangen.

b) Beregn kapasiteten til sykkelheisen (oppgitt i antall personer pr time).

Oppgave 6

Det magiske tårn

Sted: Utenfor Sentralbygg II (høyblokka nærmest Hovedbygningen) på Gløshaugen

Det «Magiske tårn» som står oppført utenfor Matematikkbygningen på Gløshaugen ble reist i forbindelse med Verdens matematikkår 2000. Kunstner Paul Brand, professor ved Institutt for byggekunst, form og farge, NTNU, står bak en rekke større skulpturer, relieff og andre utsmykkingsoppgaver i Norge.

Paul Brand har arbeidet mye med ulike matematiske tema i sine verk, spesielt har magiske kvadrater spilt en rolle. Det enkleste magiske kvadrat er et tre ganger tre rutenett:

a) Plasser alle de naturlige tallene fra 1 til 9 i rutene, slik at summen i hver rekke, både horisontalt og vertikalt er den samme, og også lik summen langs de to diagonalene.

b) Finner dere mening i denne forklaringen ut fra den løsningen dere fant på det magiske kvadratet?

I tårnet finner vi fire søylegrupper som hver består av ni søyler, altså 36 søyler i alt, med varierende høyde. De ni søylene som utgjør en gruppe kan tenkes plassert over rutene av et (usynlig) magisk kvadrat av typen vist ovenfor (evt. en rotert eller speilet versjon). Tallene i ruten angir høyden på hver søyle, slik at vi får i alt 9 «etasjer». Øverst er søylene i de fire gruppene forbundet med «etasjevekslere» etter et mønster som ved første blikk ikke synes særlig opplagt. Ved nærmere ettersyn vil man oppdage at de fire midt-søylene er forbundet med hverandre, og har etasjehøyde «5». De gjenværende 32 søylene er forbundet med hverandre i grupper på 8, slik at ved to omganger med etasjevekslere er man tilbake til utgangspunktet. Summerer man etasjehøydene i hver slik omgang på 8, finner man at den er lik 40 for alle sammen.

Oppgave 7

Gardiner i Sentralbygg I og Sentralbygg II

Sted: Utenfor Sentralbygg I og Sentralbygg II (høyblokkene) på Gløshaugen

Utstyr: Lommeregner

De to høye blokkene dere ser foran dere er Sentralbygg I og Sentralbygg II.

a) Bruk nødvendige estimat til å gi et overslag over hvor mange meter stoff det vil gå med til å sy gardiner til alle vinduene fra og med 3. etasje og helt til toppen i Sentralbygg I og Sentralbygg II?
b) Omtrent hvor mye vil det koste å skifte gardiner i begge blokkene?

Oppgave 8

Hvor langt? Hvor mange meter stigning totalt?

Sted: Utenfor Realfagsbygget

Utstyr: Eget hode☺

a) Hvor lang er løypa vi har gått fra start til mål i Matematikkorienteringa?
b) Hvor mange høydemeter er den totale stigningen på hele orienteringsrunden?

Løsningsforslag

(Kan og bør diskuteres! Her er lagt inn mange forutsetninger.)

Oppgave 1
Strømmen i elva er 0,2 m/sek
Båten har farten 2 m/sek

$$\frac{x}{220} = \frac{0,2}{2}$$

$$x = \frac{44}{2} = 22$$

22 meter lenger ned på motsatt side av elva

Oppgave 2

a)
Kall tallene øverst i hver av de 4 bunkene for henholdsvis *a, b, c* og *d.*
Da er det 11 - *a,* 11 – *b,* 11 – *c,* 11 – *d* kort i hver bunke. (Hvis for eksempel den første bunken er død, er $a = 0$)
Du skal deretter telle opp $a + b + c + d$ kort fra handa. Siden det er 52 kort til sammen i bunken, er det
$52 - (11 - a) - (11 - b) - (11 - c) - (11 - d) - (a + b + c + d) = 52 - 44 = 8$
Igjen i handa.

b) Den magiske tverrsummen

Oppgave 3
Geometriske former

Oppgave 4

Antall timer fra 2. desember – 13.dag jul:

2. desember kl 12-24:	12
29 dager fra 3.des – 31. des: 29 x 24 =	696
5 dager fra 1.jan – 5. januar: 5 x 24 =	120
18 timer 13.dag jul:	<u>18</u>
	846

(0,365 kr/kWh · 846 h · 20 · 10W) : 1000 = 61,758 kr

Oppgave 5

Sykkelheisen Trampe ble installert i Brubakken på Bakklandet i august 1993. Den er foreløpig den eneste sykkelheisen
i hele verden og har fått stor nasjonal og internasjonal oppmerksomhet. Sykkelheisen er godkjent for ubemannet drift av Det Norske Veritas.

Sykkelheisen har en lengde på 130m og en høydeforskjell på 24m. Stigningen varierer fra 1:11 til 1:5. Hastigheten er på 2m/s og har en kapasitet på 288 syklister pr time med maks 5 syklister samtidig.

Et telleverk i sykkelheisen registrerer antall turer og viser et gjennomsnitt på ca 20000 turer pr år. Sesongen for sykkelheisen strekker seg fra april til oktober. Heisen blir stengt når det er snø og is i kjørebanen. Åpningstiden er 0700 – 2200 alle dager.

Oppgave 6

8	1	6
3	5	7
4	9	2

Oppgave 7

4,6 meter · 44 · 29 = 5869,6 meter

Taffel-matematikk

Novemberkonferansen 2007

Full innsats!!

Taffel-matematikk

1. Trekanter

I en pose er det pinner som er buntet sammen tre og tre. Lengdene til alle pinnene er et helt antall centimeter. Summen av lengden av pinnene i hver bunt er 12 cm, og alle mulige kombinasjoner av slike treerbunter finnes i posen. Alle buntene er forskjellige. Dere trekker en tilfeldig bunt fra posen.

Hvor stor er sannsynligheten for å trekke en bunt med pinner som kan danne en trekant?

2. Kantinelunsj

Halvparten av elevene som spiste lunsj i kantina hadde med niste og kjøpte ingenting. ¾ av den andre halvparten av elevene kjøpte frukt. Halvparten av elevene som kjøpte frukt, kjøpte epler og fjerdeparten kjøpte pærer. De siste 15 elevene kjøpte bananer.
Hvor mange elever spiste lunsj i kantina?

3. Tennisballer

Lene og Hans har noen tennisballer hver.
Hvis Lene gir Hans 8 av sine tennisballer, så har de like mange.
Hvis Hans gir Lene 8 av sine tennisballer, har Lene 3 ganger så mange tennisballer som Hans.
Hvor mange tennisballer har Lene?

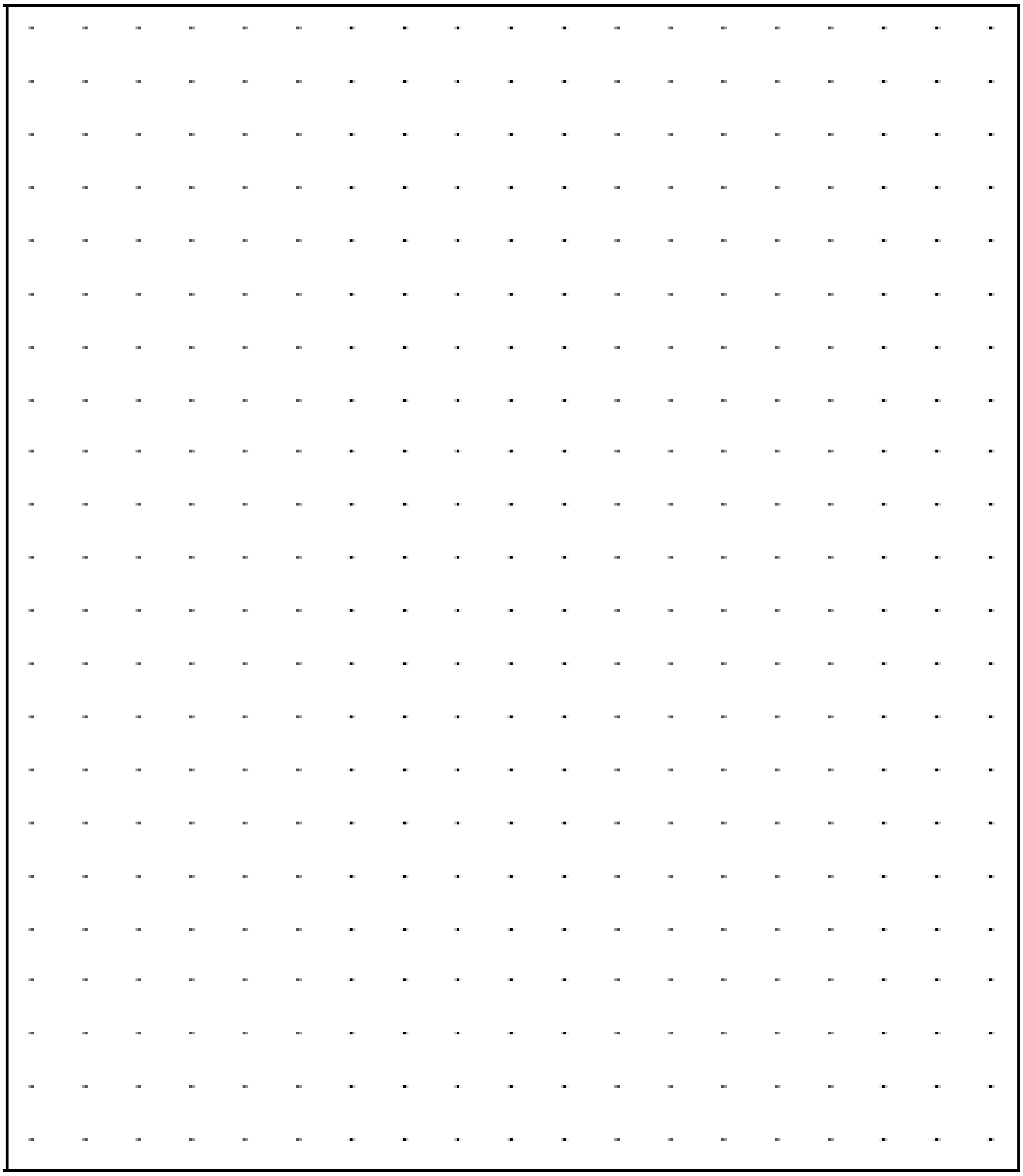
4. Fire firetall

Dere skal lage så mange regnestykker som mulig. Det første skal gi svaret 1, det andre 2, det tredje 3 osv, så langt dere kommer.
Hvert regnestykke skal bestå av fire firetall og en eller flere av tegnene +, -, · eller :
Det er lov til å bruke parenteser, kvadratrøtter og brøkstreker, og hvert av tegnene +, -, · eller : kan brukes flere ganger. Det er ikke nødvendig å bruke alle tegnene i hvert regnestykke. Hvis dere bruker potenser, må både grunntall og eksponent bestå av firetall, og det skal brukes nøyaktig fire firetall.
Det er ikke lov å sette sammen firetallene til 44, 444 eller 4444.

5. Kvadrater

Nedenfor er det et prikkark. Der skal dere tegne kvadrater i forskjellige størrelser. Størrelsen er angitt som et helt tall. Dette tallet angir arealet. Hjørnene skal ligge i en prikk.
Arealet oppgis uten benevning, og vi setter arealet av det minste kvadratet som kan tegnes med alle hjørner i en prikk, lik 1 arealenhet.

Tegn kvadrater på nøyaktig 2, 5, 8, 9, 10, 13, 16, 17 og 18 arealenheter.



6. Pinneareal

Dere får utdelt 12 fyrstikker.
Man kan lage mangekanter med 12 fyrstikker slik at arealet er et helt tall på mange ulike måter.
En arealenhet er lik arealet av et kvadrat med side lik en fyrstikklengde.

Bruk de 12 fyrstikkene til å lage mangekanter med så mange ulike heltallige areal som mulig.

Løsninger regnes som ulike hvis de ikke kan speiles, parallellforskyves eller dreies (roteres) over i hverandre.

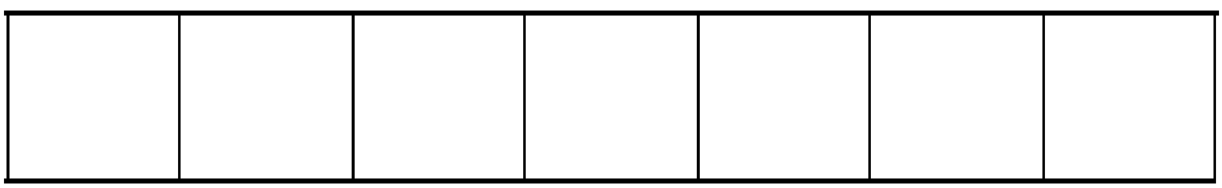
7. Husleie

En sølvsmed hadde ikke råd til å betale husleien for mars måned. Han eide en sølvstav som var 31 tommer lang, så han gjorde følgende avtale med husverten:
Han ville dele staven inn i mindre biter, slik at husverten fikk en tomme av staven for hver dag som gikk, som et slags depositum. På slutten av måneden regnet sølvsmeden med å ha penger til leien, så da skulle husverten levere tilbake bitene.
Siden det var mye arbeid å dele opp staven, ville han kutte den i så få biter som mulig.
Han kunne for eksempel gi en bit på 1 tomme de to første dagene. Så kunne han gi en bit på 3 tommer den tredje dagen og ta tilbake de to første.
Hvis han byttet fram og tilbake på denne måten, hva er det minste antall biter han måtte kutte staven i, og hvor lange er hver av bitene?

8. Brikkespill

Utstyr

- 7 brikker med x på den ene siden og ingenting på den andre siden.



Legg 7 brikker i de 7 rutene. Alle kryssene skal vises.

a) Et trekk består i å snu tre brikker på en gang. Hva er det minste antall trekk som trengs for å få alle de blanke sidene opp? Tegn alle trekkene på svararket.

b) Reglene er nå at et trekk består i å snu fire brikker på en gang. Hva er nå det minste antall trekk som trengs for å få alle de blanke sidene opp? Tegn trekkene på svarket hvis det er mulig. Hvis ikke må dere forklare hvorfor det ikke er mulig.

c) Reglene er nå at et trekk består i å snu n brikker på en gang. n varierer fra 1 til 7. Hva er nå det minste antall trekk som trengs for å få alle de blanke sidene opp?

Lag en tabell som viser løsningene.
Kan dere beskrive en sammenheng mellom reglene og svaret?

9. Tallmønster

Tallene i tabellen følger et mønster. Fyll ut de tre tallene som mangler.

13	5	3
17	6	5
21	7	0
25	8	1

10. Frimerker

Karin går til postkontoret for å kjøpe fire frimerker. Hun vil ha fire kvadratiske frimerker som henger sammen. Hvor mange ulike former kan det bli? Frimerkene skal være orientert på riktig måte. De har en bestemt side opp, ned, til høyre og til venstre.

Det tenkes så det knaker…….

Ingvill sjekker løsningsforslagene til Mike.

Taffel-matematikk

LØSNINGSFORSLAG

Trekanter

Sannsynligheten er 25%.
Buntene består av disse kombinasjonene av pinner:
1cm – 1cm – 10cm
1cm – 2 cm – 9cm
1cm – 3cm – 8cm
1cm – 4cm – 7cm
1cm – 5cm – 6cm
2cm – 2cm – 8cm
2cm – 3cm – 7cm
2cm – 4cm – 6cm
2cm – 5cm – 5cm
3cm – 3cm – 6cm
3cm – 4cm – 5cm
4cm – 4cm – 4cm

3 av 12 bunter inneholder pinner som kan danne en trekant. Det vil si at sannsynligheten for å trekke en slik bunt er 3/12=1/4=25% (summen av de to korteste pinnene må være større enn den lengste pinnen).

Kantinelunsj

Det var 160 elever.
De 15 som kjøpte bananer, utgjorde ¼ av ¾ , det vil si 3/16 av halvparten av elevene. Da var det totalt
$2 \cdot ((15 \cdot 16) : 3) = 160$ elever
som spiste lunsj i kantina.

Tennisballer

Lene har 40 baller (og Hans har 24 baller). Da har begge 32 baller hvis Lene gir 8 av sine til Hans. Hvis Hans gir 8 av sine til Lene, har han 16 og hun 48 ($=3\cdot16$)
Hvis Lene har L baller og hans har H, er
$H+8=L-8$ og
$L+8 = 3 (H-8)$
Fra den øverste likningen, får vi: $H – 8 = L – 24$ som innsatt i den nederste likningen gir:
$L + 8 = 3 (L – 24) = 3L – 72$
Eller
$2L = 80$
$L = 40$

Fire firetall

$(4+4):(4+4) = 1$

$\frac{4}{4} + \frac{4}{4} = 2$

$\frac{4 \cdot 4 - 4}{4} = 3$

$\frac{4-4}{4} + 4 = 4$

$\frac{4 \cdot 4 + 4}{4} = 5$

$\frac{4+4}{4} + 4 = 6$

$4 + 4 - \frac{4}{4} = 7$

$4 + 4 + 4 - 4 = 8$

$4 + 4 + \frac{4}{4} = 9$

$(4 + \frac{4}{4}) \cdot \sqrt{4} = 10$

osv

Kvadrater

Areal	Lages med rettvinklede trekanter med kateter:
2	1,1
5	2,1
8	2,2
10	3,1
13	3,2
17	4,1
18	3,3

Areal 9 og 16 lages direkte med sider 3 og 4.

Husleie

Staven kan deles i 5 biter med lengde 1, 2, 4, 8 og 16 tommer. Hver dag beholder husverten biter etter følgende tabell:

Stavlengde/dag i måneden	**16**	**8**	**4**	**2**	**1**
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1
28	1	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

Brikkespill

a)
Det minste antall trekk er 3:

Utgangsposisjon: XXXXXXX

1. trekk: OOOXXXX

2. trekk: OOXOOXX

3. trekk: OOOOOOO

c)

Antall brikker per trekk	Minimum antall trekk
1	7
2	umulig
3	3
4	umulig
5	3
6	umulig
7	1

1 brikke: OK
5 brikker:
× × × × × × ×
o o o o o × ×
o × × × × o ×
o o o o o o o
7 brikker: OK

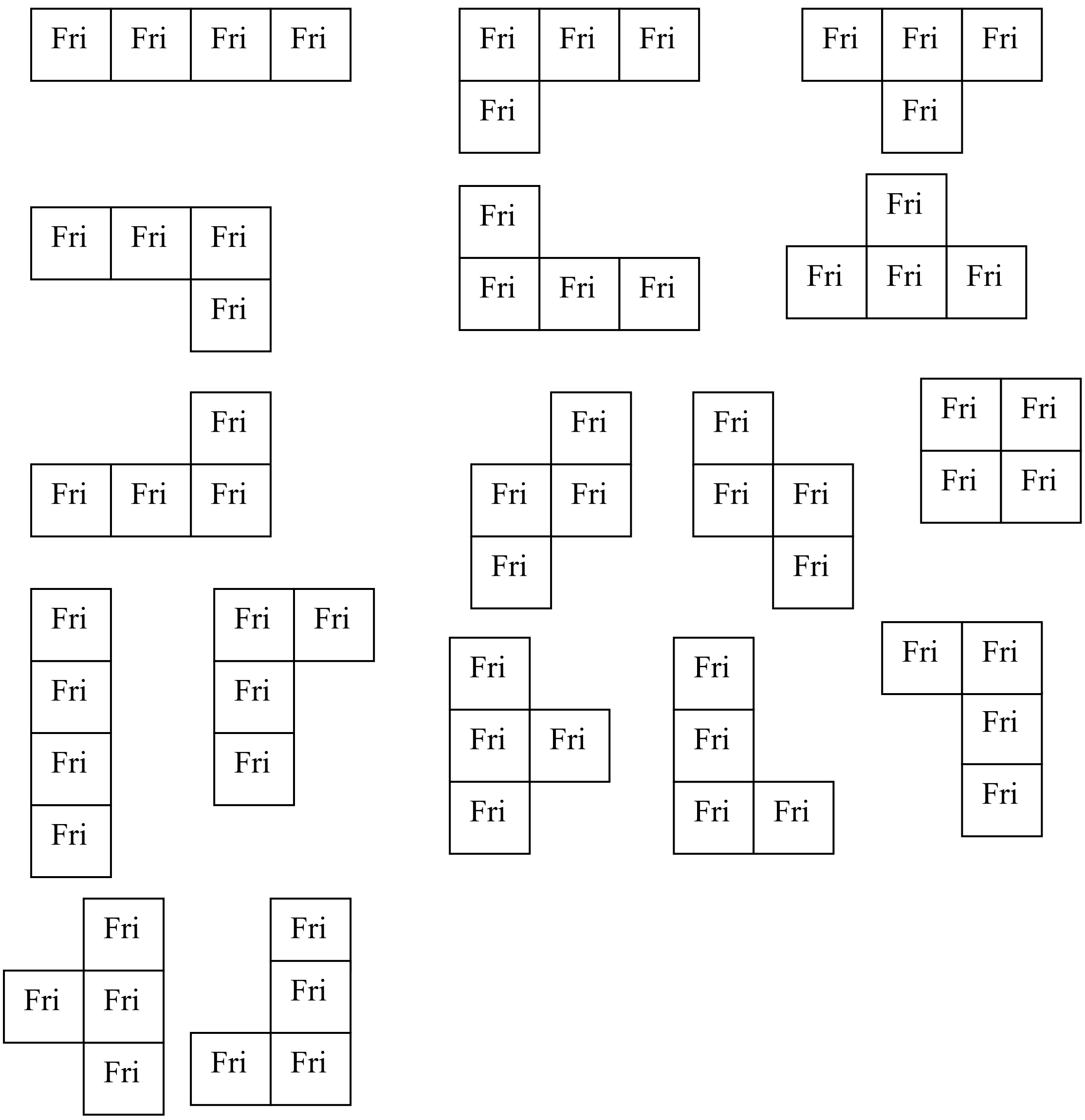
Elevene kan for eksempel svare:
Alle partall er umulig
Bare 1 og primtall er mulig
Eller liknende. <u>Gir 1 poeng</u>

Tallmønster

13	5	3
17	6	5
21	7	0
25	8	1
29	9	2

Frimerker

Det er 19 ulike måter.



+ to til i L-form!