Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Skriftserie

Konferanserapport

No. 4 - 2006

”IKT i matematikkundervisningen - muligheter og begrensninger”

Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU
21. og 22. november 2005

Forside: Besøk på matematikksenterets PC-lab

Redigert av Merete Lysberg

Trykk: NTNU-Trykk
ISSN: 1503-5336
ISBN: 82-471-6039-0

Programkomitéen 2005

Tine Wedege er universitetslektor ved Lärarutbildningen, Malmö Högskola, og gæsteprofessor ved Institut for Matematiske Fag, NTNU, Trondheim. Hendes primære interesser er voksnes matematiklæring, matematik i arbejde, menneskers affektive og sociale forhold til matematik og matematikkens didaktik som forskningsfelt. Hun er cand.mag. i fransk og matematik (Københavns Universitet), exam.pæd. i matematik (Danmarks lærerhøjskole) og har ph.d. i matematikkens didaktik (Roskilde Universitetscenter).

Bengt Johansson er föreståndare for Nationellt Centrum for Matematikutbildning (www.ncm.gu.se) ved Göteborgs Universitet i Sverige.
Senteret ble opprettet i 1999 rundt den veletablerte Nämnaren-redaksjonen. Bengt har vært og er en frontfigur når det gjelder å bygge matematikkdidaktiske nettverk, både i Norden og internasjonalt. Mange forskere fra hele verden har bidratt til oppbygging av de nordiske forskningsmiljøene takket være Bengt.

Lars Burman är lektor i matematikens och datateknikens didaktik vid Institutionen för lärarutbildning, Åbo Akademi i Vasa. Han arbetar med utbildning av ämnes- och klasslärare, medverkar i läromedelsprojekt och forskar kring utvärdering inom matematikundervisningen

Ingvill M. Stedøy er faglig leder ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen. Hun har bakgrunn som lærer i videregående skole, doktorgrad i algebra, og har i de siste 7 årene arbeidet med forsknings- og utviklingsarbeid i matematikkdidaktikk ved NTNU. Hennes interessefelt er først og fremst motivasjon og elevers lyst til å lære, samt lærerens viktige rolle som igangsetter og inspirator. Hennes rolle ved senteret er både administrativ og operativ. Hun fungerer som veileder for master- og ph.D.-studenter, leder kurs og tar imot elever og lærere til matematikk-aktiviteter ved senteret. Hjemmeside: www.matematikksenteret.no/ingvill

Forord

Den fjerde Novemberkonferansen hadde et svært aktuelt tema for alle som arbeider med matematikkundervisning i skole, forskning og lærerutdanning. Alle må forholde seg til bruk av IKT i matematikkundervisningen, og hvilke muligheter og begrensninger som ligger i dette. Interessen for konferansen var formidabel, noe vi tror både skyldes tema, og at Novemberkonferansen nå har etablert seg som et spennende møtested for nordiske matematikklærere og forskere på alle nivå.

Også i år hadde vi ulike tilbud søndagen før selve konferansen som en spennende oppvarming til det faglige programmet mandag og tirsdag. Geir Botten fra Høgskolen i Sør-Trøndelag hadde teori og praksis om matematikken bak hoppbakken, og avsluttet med en tur til hoppbakkene i Granåsen. Kjersti Wæge fra Matematikksenteret hadde foredrag og omvisning om mulighetene for å knytte matematikk opp mot Erkebispegården og museet der, mens May Renate Settemsdal og Pål Erik Ekholm fra matematikksenteret lagde, organiserte og gjennomførte matematisk rebusløp. I tillegg var det et Søndagsseminar om "Kjønn matematikk og teknikk – hva skjer når de bringes sammen", ledet og organisert av Tine Wedege.

Det faglige programmet mandag og tirsdag var variert og spennende, og deltakerne, over 300 i alt, fikk mange gode eksempler på ulike måter å bruke IKT i undervisningen på. Rapporten gir et mangfold av ideer, forskningsresultater og synspunkter på dette viktige tema. Vi takker alle bidragsytere for at de gjorde konferansen så vellykket.

Ingvill Merete Stedøy-Johansen
Faglig leder

Innholdsfortegnelse

Del I: Faglig program, 21. og 22. november

Signe Holm Knudtzon

er førstelektor i matematikk ved Høgskolen i Vestfold. Interesseområder: Dynamisk geometri i undervisning og forskning.Hvilke matematikkunnskaper har barn når de begynner på skolen? Lærerstudenters forståelse av matematikk og matematikkundervisning.

"Bruk av IKT i matematikkundervisningen - muligheter og begrensninger - arbeid med dynamisk geometri med lærerstudenter, elever og lærere"

Sammendrag (versjon med noen interaktive bilder finnes på **http://shk.ans.hive.no**)

Eksempler på arbeid med elever, lærerstudenter og lærere.

Matematiske emner som belyses er speiling, tesselering og perspektiv.

Hvorfor er det så vanskelig for mange lærere å ta i bruk de nye mulighetene som finnes?

Hvor er problemene? Hos politiske myndigheter, skolen eller lærerne?

Mitt utgangspunkt er at:

Matematikk er et **spennende** fag
som har **mye** å tilby
alle elever

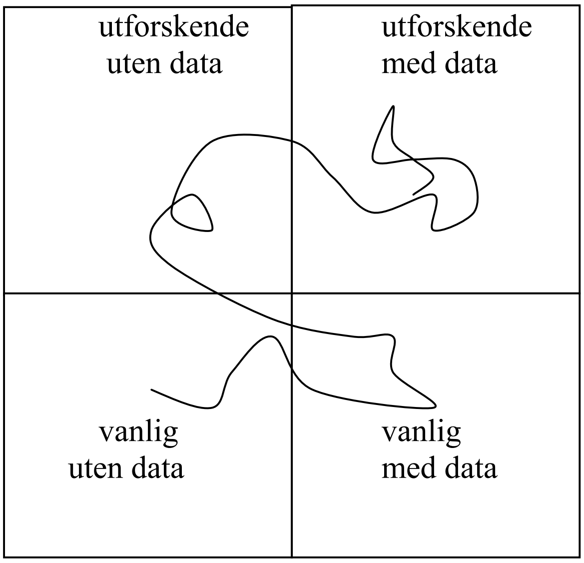
mer enn de fleste elever får oppleve i dag

og at datateknologi gir nye muligheter for å få innsikt i matematikk som et dynamisk fag. Dette kan gjøres ved regneark, grafprogram og det som jeg skal ta opp her: Dynamisk geometri.

Jeg vil her kalle en undervisning som legger vekt på overføring og opplæring av regnemåter for "vanlig undervisning". Den tar vare på noen av matematikkens resultater som den oppøver /trener elevene i å anvende. Den betoner øving og nøyaktighet. Før hadde elevene i en klasse omtrent samme tempo, nå anvender ofte lærere arbeidsplaner som gir elevene noe forskjellig arbeidstempo og arbeidsmengde, men i hovedsak det samme innholdet. På barnetrinnet er det mange lærere som ønsker at elevene skal oppleve matematikk som et morsomt fag. De legger stor vekt på lek og variasjon, utfordringen her blir ofte å skape sammenheng, å sette ord på de resultatene en finner og å bygge videre på disse. Å få fram, hva er det vi har lært i dag, hva har vi funnet ut, hvordan kan vi bruke det videre.

Matematikk har både **ÅPNENDE** og **ORDNENDE** prosesser, vi må la barna få del i deler av hele matematikkens verden.

Matematikkundervisning



Jeg lager her et lite skjema om matematikkundervisning. Mitt ønske er at elevene skal få oppleve en undervisning der begge de to øvre kvadratene er tydelig i undervisningen.

Den snirklete stien er litt av vandringen.

Hvis læreren og elevene ikke er vant med utforskning og problemløsning som en vesentlig del av arbeidet i matematikk er det ikke å vente at de plutselig skal arbeide utforskende med data i matematikk. Det er lettere å gi en "kokebokinstruksjon" i hvordan en bruker et dataprogram enn å forandre en tradisjonell undervisning til en undervisning med vekt på undring, undersøkelse, problemformulering, problemløsning og selvstendig tenkning.

Det er lettere å bevege undervisningen til høyre i skjemaet enn å løfte den.

Mitt mål er

at elever får anledning til å utforske
matematikk ved hjelp av Dynamisk Geometri.

Er det for ambisiøst?

Hvordan kan målet nås?

- det må finnes datamaskiner som fungerer
- det må finnes programvare
- det må finnes lærere som tør og er villige til å prøve
- det må finnes lærere som kan dette

Hva kan gjøres Ovenfra
(fra Kunnskapsdepartementet):

1) krav i læreplan
2) økonomi til data (datamaskiner, data-program og nødvendig vedlikehold)
   programvare for dynamisk geometri mangler i skolen!
3) økonomi til opplæring og støtte av lærere
   Det er dette som koster!
   Det er her det er nødvendig med et løft/krafttak!
4) krav til eksamen /avgangsprøve/vurdering

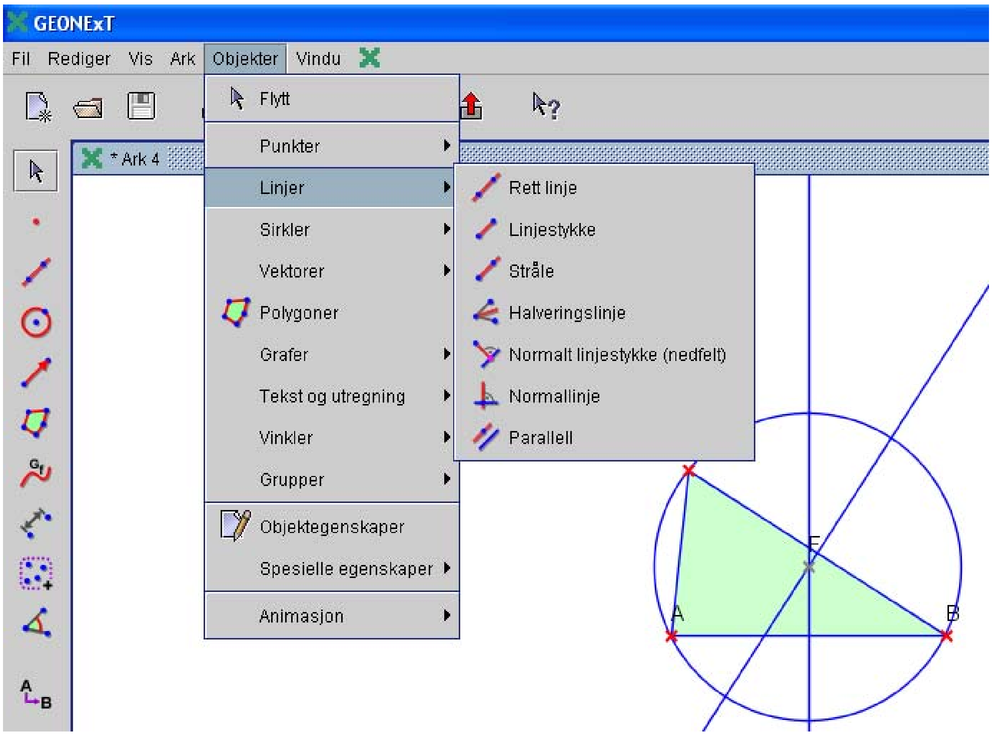
1) Kravet om dynamisk geometri i læreplan er ivaretatt i den nye læreplanen.
2) Hvis programvare skal kjøpes kan vi anslå at vi har ca 3000 skoler og at en skolelissens koster ca 5000 kr. Det utgjør 15 millioner. Mulighetene for kvantumrabatt på kommune/fylkes/landslissens burde være gode!
   Vedlikehold av maskinparken er et problem. Det er stor slitasje, delvis pga av uvøren/uforsiktig bruk. Å ta ut kulen av musen ser ut til å være en sport mange steder (ikke bare i Norge).
3) Opplæring og støtte til lærere. Dette er det mest kostnads og ressurskrevende arbeidet. (utdypes senere i teksten)
4) Krav til eksamen /avgangsprøve/vurdering. Vi vet at det som gis til eksamen styrer innholdet i undervisningen. Dokumentasjon på at elevene har ferdigheter i og kan anvende dynamisk geometri må derfor inngå, helst i form av problemløsningsoppgaver. Fuglestad (Norma05, i denne rapporten) har beskrevet dette. Torkildsen 2005 har utdypet problemet i forhold til bruk av regneark.

Dynamisk geometri DGS

Her nevnes fire forskjellige program. På vår høgskole har vi erfaring med de to første. Alle studenter på allmennlærerutdanningen lærer Cabri på et grunnleggende nivå (3x3 undervisningstimer med obligatoriske øvinger). Studenter som velger fordypningskurset M3 i matematikk får mer kjennskap til Cabri, i hovedsak ved å arbeide med geometriske problemer. De blir også kjent med den danske versjonen av Sketchpad ”Geometer”.

- Cabri Geometre II pluss (har norsk versjon)
- The Geometer’s Sketchpad (har dansk versjon Geometer)
- Cinderella (utviklet i Tyskland, mulighet for å arbeide med ikke-Euklidsk geometri parallelt)

GEONExT (gratis, norsk versjon nov 2005)



På skole- og kommunenivå

- Kommune (nye nettverk er ofte begrensende, brukerne settes ut av spill)
- Rektor (viktig)
- Lærere (trenger opplæring, utfordring og støtte over tid)

Kommunenivå

Mange kommuner har gått over til ett felles nettverk for alle skolene i kommunen. På skolene er det bare arbeidsstasjoner. Det er ikke mulig å bruke disketter, USB-penner eller CD-er i disse arbeidsstasjonene. En av fordelene er at det da er færre ting som kan gå i stykker, bli ødelagt. De er også mindre utsatt for tyveri.

Av problemer med systemet er blant annet at det går langsomt å være på internett når mange er logget på, det samme gjelder anvendelse av program.

Det største problemet er at brukerne i form av lærere og skolens IT-ansvarlige blir fjernet fra innflytelse på hva som er tilgjengelig for elevene. All innlegging av program og dokumenter må foregå sentralt. Det ser ut som det er vanskelig å ha et program for en skole. Gamle lisenser er dermed ikke lenger mulig å bruke.

For mange skoler har innføringen av et sentralt kommunalt nettverk gitt ett dårligere tilbud til elevene. Ofte har skolene gitt de gamle maskinene fra seg før de oppdager dette.

På kommunenivå kan det legges til rette for kontakt mellom lærerne på samme trinn på flere skoler, utveksling av erfaring og ideer (både faglig og praktisk). En forandring fra en ”vanlig undervisning” til en ”undersøkende undervisning” tar lang tid (flere år) og trenger støtte utenfra. (Jaworski, 1994).

Rektor

Skolens ledelse og miljøet blant lærerne har mye å si for innstillingen til å møte nye utfordringer. Det må legges til rette for dette, ved at det avsettes tid og det må stilles forventninger til lærerne.

At lærerne er faglig oppdatert er ett felles ansvar for den enkelte lærer og skolens ledelse/arbeidsgiver.
I forhold til lærerne
Ligger en trippel forventning:

De skal
kunne matematikk

beherske data

drive undersøkende undervisning

Mange av lærerne som underviser i matematikk mangler matematikk i sin utdanning. Dette gjelder særlig i barneskolen. Det obligatoriske kurset i lærerutdanning gis stadig mindre lærerresurser og for mye undervisningstid går med på reparere manglende forkunnskaper ved inntak. Det tar tid og innsats for lærerstudenter å bygge opp et selvstendig forhold til matematikk som kan danne grunnlag for en meningsfull undervisning og god læring for elevene.

Blant lærere som har vært i skolen noen år og som ikke har fått opplæring i IKT i sin grunnutdanning er det mange som er fremmed for data. Noen av lærerne kan være redd for å trykke på gale taster, det kan nesten virke som de er redd for at maskinen skal eksplodere eller at de skal ødelegge den. "Dataskrekk" er et velkjent begrep hos IKT-lærerne. Vi møter det også hos enkelte av våre lærerstudenter.

Etter L97 ble lærere tilbudt tre-dagers kurs i IKT i skolefag. De fleste kunne velge hvilket/hvilke fag de deltok på. Med tredagers kurs er det vanskelig å få lærerne til å prøve ut i egen klasse mellom kursdagene. Det var også sjelden det var lagt til rette for det på skolen i form av avsatt tid. Kursene fungerte mest som "opplysningskurs" og ikke så godt i forhold til å tilføre undervisningen noe nytt.

Å få uvante problemer i matematikk er skremmende, når dette kombineres med IT er isen tynn.

Det er nok av praktiske problemer

Datarommet er opptatt
Nettet er nede

Maskiner er ødelagt

Program som ikke (lenger) er tilgjengelig

Oppkoblinger som tar tid, når det først virker er "timen over"

og manglende vilje

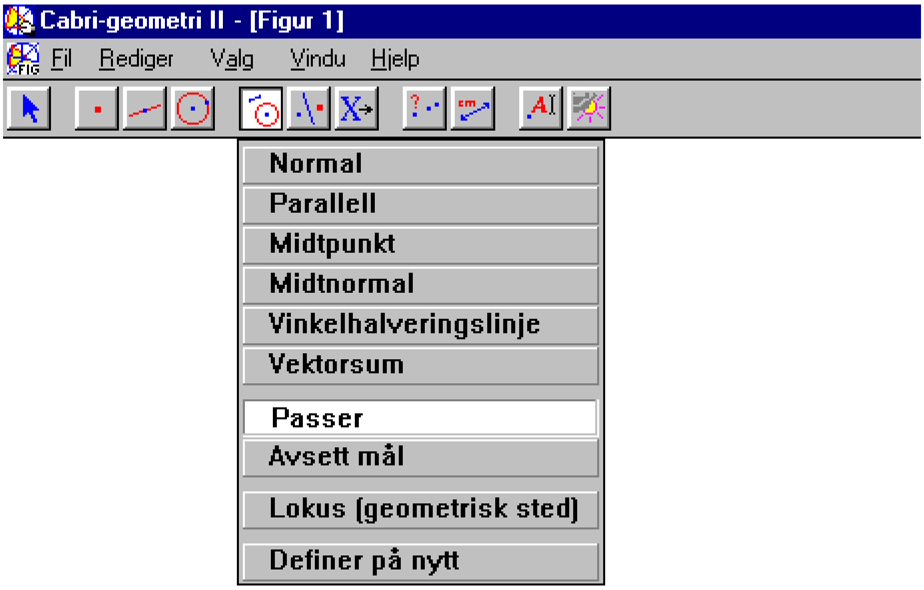
Hvorfor alt bryet?

Det er kvalitativt nytt og bedre
det har noe å tilby
det er ikke data for dataens skyld
Men fordi matematikken blir mer interessant og gjennomskuelig

og morsom/inspirerende/utfordrende

Eksempler på arbeid med dynamisk geometri (Cabri)

Det finnes en "passer" i Cabri. Den fungerer nesten som en vanlig passer. Vi trenger et linjestykke (det gir en radius) og et punkt, da avsettes ikke bare den lille buen vi pleier å lage når vi bruker passer, men hele sirkelen. (Cabri –verktøyboksen konstruksjon (1))

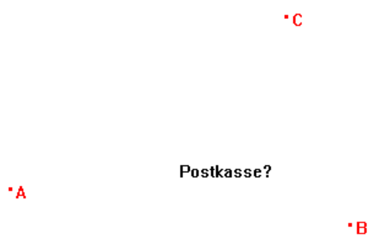


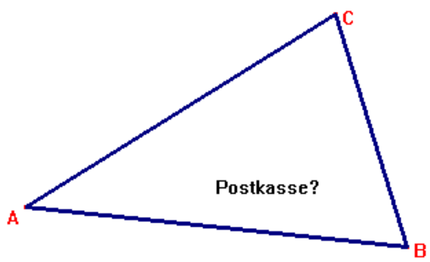
En liten oppgave: **Tre punkt A, B og C representerer tre hus.**

Postkassen skal være like langt fra alle punkt (hus). Hvordan kan vi ved konstruksjon finne ut hvor postkassen skal være?

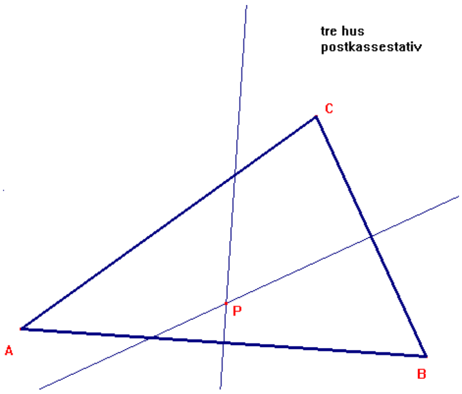
(Oppgaven har vært gitt til ungdomsskolens avgangsgangsprøve.)

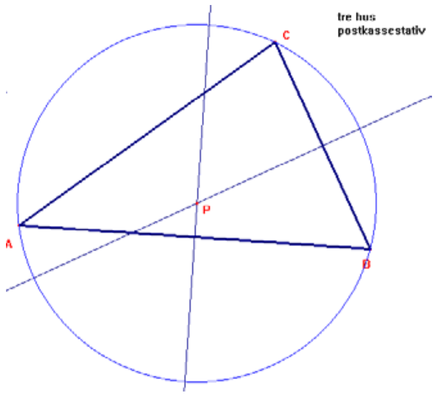
De to første figurene viser de tre husene først som punkt og deretter bundet sammen til en trekant.





De to neste figurene viser først to midtnormaler der skjæringspunktet mellom dem er punktet P (postkassen). Deretter er det konstruert en sirkel med sentrum i P, den går gjennom A, B og C. Vi kan bevege punktene A, B og C (i Cabri) og vise at dette er en generell konstruksjon. (Men beviset må vi lage selv.)

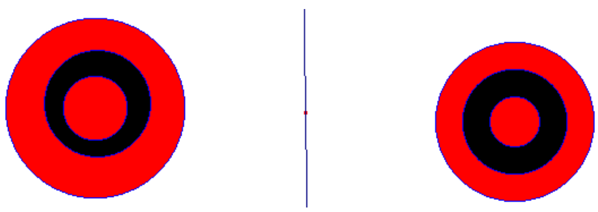




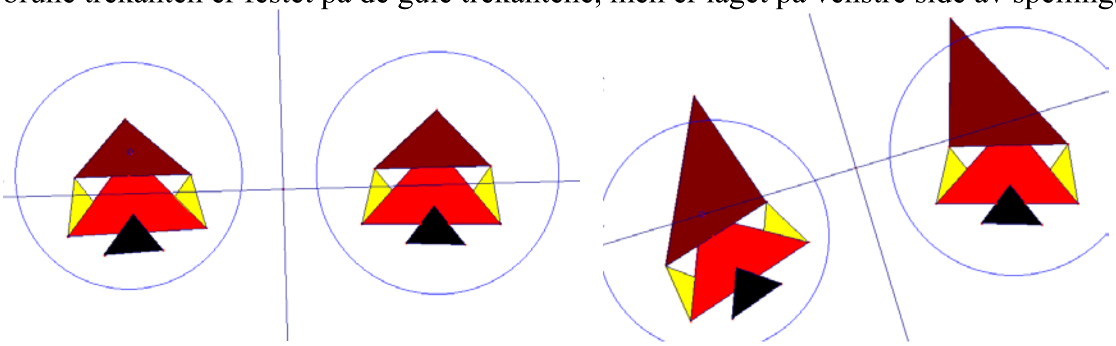
Speiling. Hva bestemmer speilbildet?

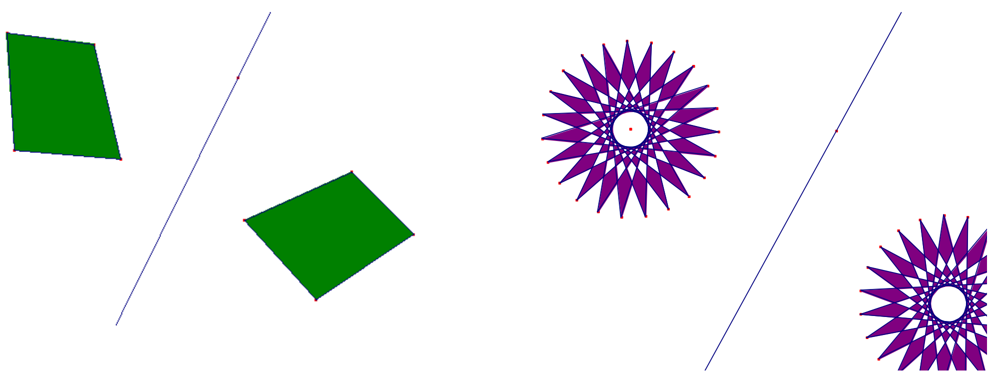
Her er eksempler fra elever i 4. klasse som har arbeidet med speiling. Elevene har ikke arbeidet med dynamisk geometri tidligere. Det er lærerstudenter som har undervist klassen.

Den første figuren er "tegnet". Eleven har prøvd å tegne et speilbilde på den andre siden av speilingslinjen.



Den samme eleven har laget figuren under (husene), der har hun brukt den ferdige macroen "speil om linje". Ved å gå inn i dokumentet hennes (i Cabri) kan vi se at hun har vekslet på hvor hun har laget sine originaler. Den øverste brune trekanten er festet på de gule trekantene, men er laget på venstre side av speilingslinjen.





De neste figurene har skrå speilingslinjer. Ved animasjon (rotasjon) av original-23-stjernen roterer speilbildet motsatt vei av originalen.

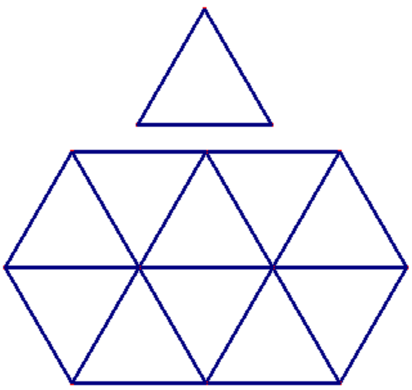
Nå finner vi ut at det som bestemmer hvordan speilbildet ser ut er originalen og det som bestemmer hvor speilbildet er, er hvor speilingslinjen er i forhold til originalen. (Vi kan bevege speilingslinjen og bevege originalen, men bildet kan vi ikke "dra i".)

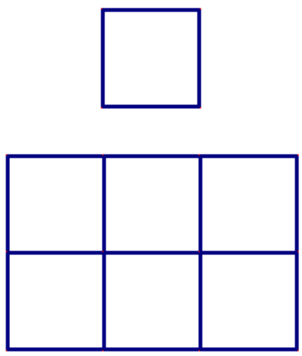
Slik undervisningen ofte er i dag med ensidig bruk av vertikale og horisontale speilingslinjer og for mye anvendelse av rutenett i arbeidet med speiling, skapes et uferdig og usmidig begrep om speiling i mange elevers hoder.

Hvilke mangekanter kan fylle planet?

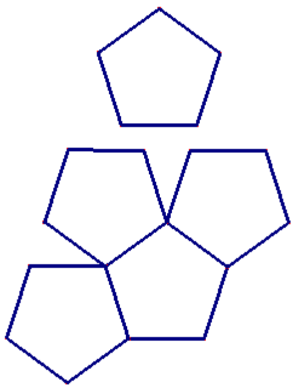
At den regulære (likesidete) trekanten og kvadratet fyller planet vet de fleste.

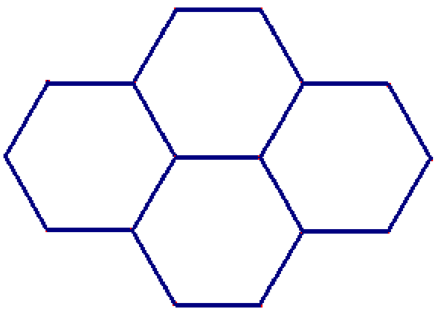
(ungdomstrinnet og lærerstudenter)



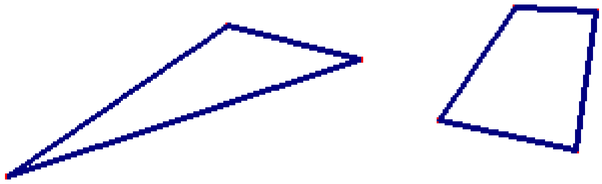


At den regulære femkanten ikke kan fylle planet finner vi også fort ut og at sekskanten kan har naturen ved biene vist oss lenge.

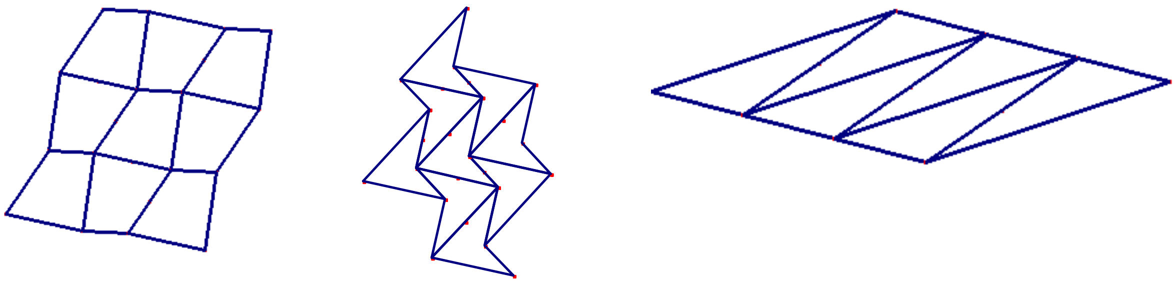




Men hvordan er det med de andre trekantene og firkantene?



Når vi pusler med mange identiske firkanter, enten som papirbiter eller ved hjelp av dynamisk geometri finner vi ut at det er mulig å fylle planet med slike biter. Vi roterer 180 grader om sidemidtpunktene og får dette bildet:

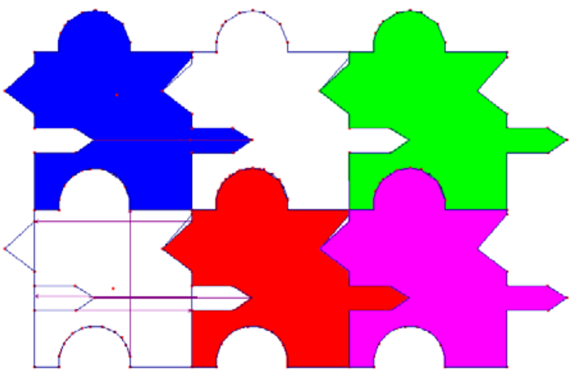


Det andre bildet er laget fra samme dokument, det er bare originalfirkanten som er forandret, nå er den konkav.

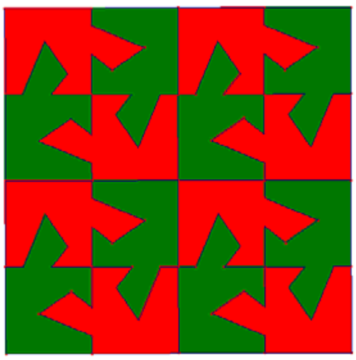
To identiske trekanter blir et parallellogram. Flere parallellogram blir et bånd, flere bånd blir hele planet.

Eksempler på tesselering (fliselegging):

En figur som tesselserer, i dette tilfelle ett kvadrat kan forandres ved at en bit "klippes av" et sted og "limes på" et annet sted. I den første figuren er bitene parallellforskjøvet, i den neste er biten rotert 90 grader om et hjørne. (Her er det riktigere å si 270 grader.)



Jente i 10. klasse



Lærerstudent

Hvordan beveger ventilen på sykkelhjulet seg når hjulet triller på veien?

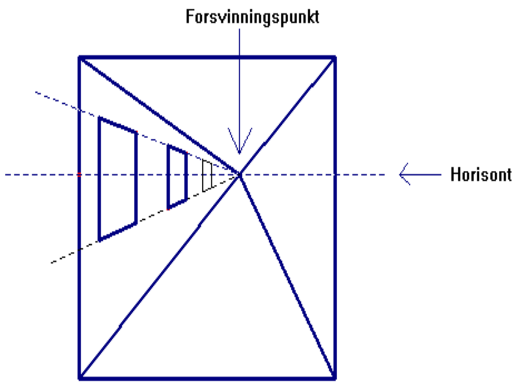
Gjett først, klikk deg deretter inn i bildet og prøv.
http://shk.ans.hive.no/Novemberkonferansen2005SHK-filer/cycloide.htm

Dette er en figur som kommer med programvaren. Ved å spore punktet V og deretter dra i punktet M vil sirkelen/sykkelhjulet trille bortover "veien" og punktet V avsetter ett spor. (en Cycloide).

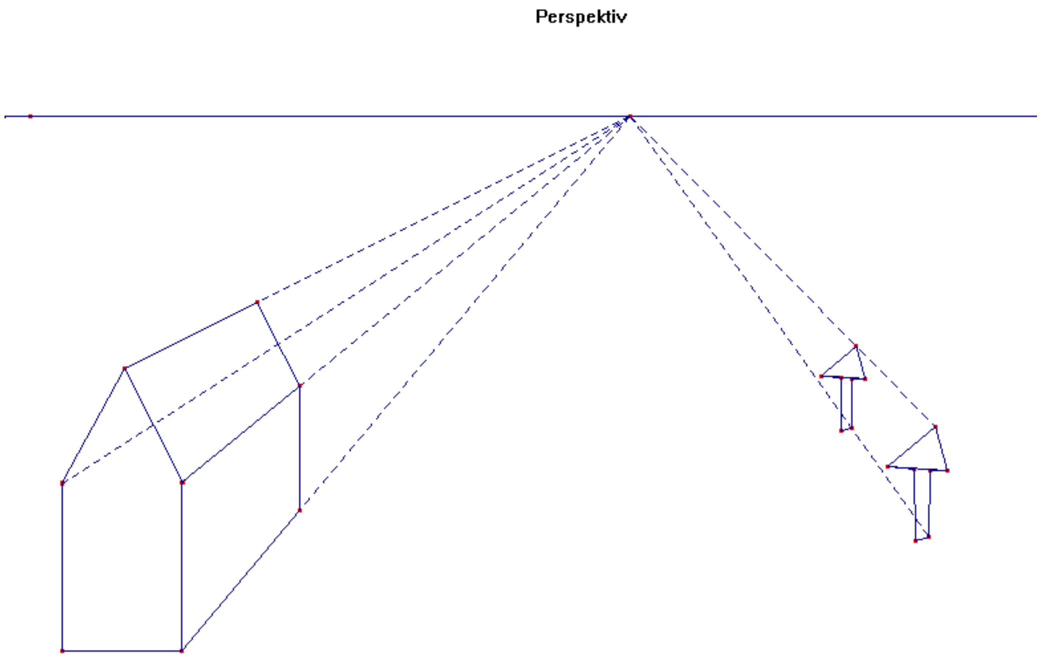
Andre utfordringer for lærerne.

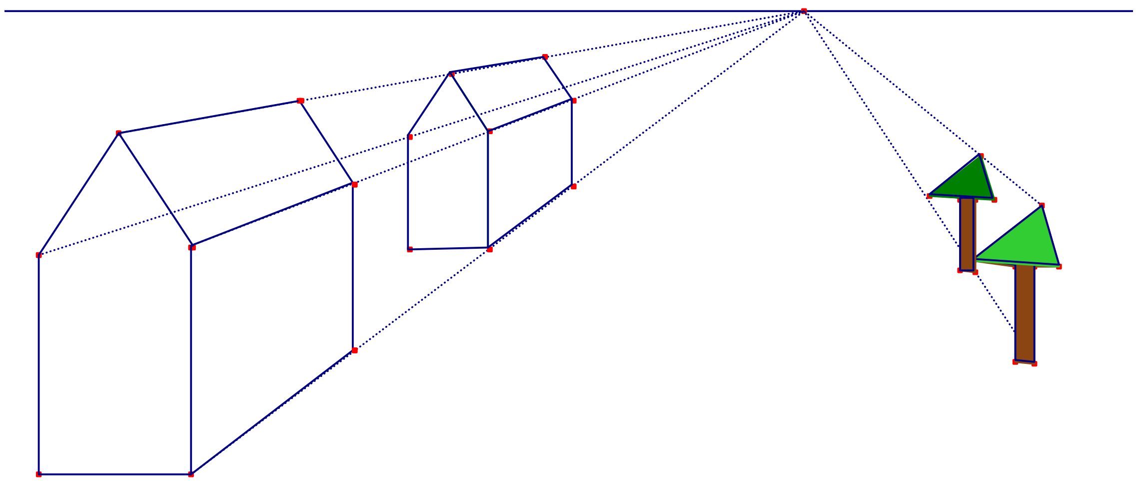
Nye læreplaner tar ofte opp nye tema. Nytt i læreplanen i 2006 er perspektiv. Etter 7. klasse skal elevene kunne tegne perspektiv med ett forsvinningspunkt.

I dagens lærerkorps er det lærerne i Kunst og håndverk som underviser om perspektiv.



Arbeider vi med DGS kan vi flytte horisonten og perspektivpunktet etter konstruksjonen.



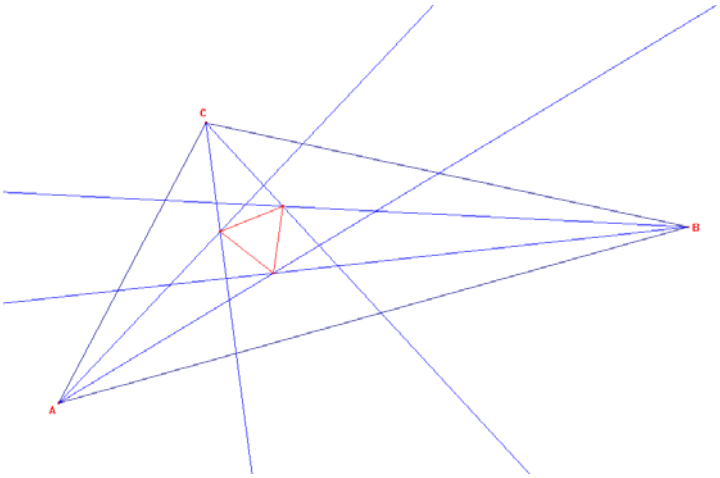


Her er også tilført et nytt hus "i rekken". Her ønsket vi et nytt hus etter samme tegning som det første. For å konstruere det andre huset benytter vi oss av "formlike trekanter". (likeformete firkanter og femkanter). I Cabri kan vi anvende avbildningen "strekk". (Et punkt, et linjestykke, en trekant eller en mangekant kan strekkes i forhold til et punkt og et tall.)

Dynamisk geometri i forskning

I vår egen forskning tok vi utgangspunkt i dette:

Hva skjer hvis vi tredeler de indre vinklene i en trekant?



Morleys setning

Den indre trekanten er likesidet

Se http://shk.ans.hive.no/Normat/mhdel1.htm I dette arbeidet var anvendelse av dynamisk geometri vesentlig, inspirerende og nyttig for hva vi fant ut og hvilke spørsmål vi stilte underveis.

Konkrete forslag.

Vi ser at elevene er raske til å ta i bruk dataverktøy. De er ikke redd for at noe skal gå galt om de trykker en gal tast. Elevarbeidene her er utført av elever første eller andre gang de arbeider med Cabri.

Hvis en av de største hindringene for at elevene skal få tilgang til slike redskap er lærernes manglende kunnskap (og vilje) kan en tenke seg muligheter for å nå elevene direkte for en kortere eller lengre tid.

TV gjerne kombinert med internett når fram til de fleste hjem i Norge. (En gratis internett tilgang på lokale bibliotek og mulighet for å anvende skolens datarom en eller to ettermiddager i uken vil være nødvendig.) /DVD

Mange land har egne TV-kanaler for undervisning.

Opplæring i dynamisk geometri kan f. eks gjøres ved at vi har en ”Landsslisens” som alle kan bruke. Vi kan ha instruksjon i enkel bruk ved hjelp av TV/DVD eller internett. Deretter kan en gi problemer/oppgaver av forskjellig vanskelighetsgrad. Det kan være muligheter for elevene å sende inn forslag til løsninger og spørsmål. Disse kan f. eks besvares av lærerstudenter eller av nyutdannete lærere som ikke får arbeid. Lærerne/lærerstudentene som besvarer kan støttes av at de er i nettverk med hverandre og at det finnes godt kvalifisert personale tilgjengelig (erfarne lærere evt lærerutdannere).

Løsninger på problemene /oppgavene kan så være et nytt TV-program et par uker senere.

Når elevene først er fortrolig med programmet vil da forhåpentligvis resten av lærerne komme etter.

Referanser og Internettressurser:

Fuglestad, Anne-Berit, (2006). IKT-verktøy i matematikk-elevers valg, løsninger og vurderinger. I **"Bruk av IKT i matematikkundervisningen - muligheter og begrensninger".** Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU 21. og 22. november 2005, Konferanserapport No. 4 - 2006

Jaworski, Brarbro, (1994). **Investigating mathematics teaching : a constructivist enquiry**. Studies in mathematics education series 5, London: Falmer Press, 231s.

Torkildsen, Svein H. (2005). Nasjonale og internasjonale prøver - drivkraft eller bremsekloss? I **"Vurdering i matematikk - Hvorfor og hvordan? Fra småskole til voksenopplæring."** Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU 15. og 16. november 2004, Konferanserapport No. 3 - 2005 .

http://www.matematikksenteret.no/content.ap?thisId=57&language=0

http://www.cabri.com/v2/pages/en/index.php

http://www.keypress.com/sketchpad/

http://antique.cinderella.de/en/demo/

http://geonext.uni-bayreuth.de/

Denne teksten er også her:

http://shk.ans.hive.no/Novemberkonferansen2005SHK.htm der noen figurer kan beveges.

Rudolf Strässer

After more than 20 years work at the "Institut für Didaktik der Mathematik (IDM)" at Bielefeld University in Germany and temporary professorships in Giessen, Kassel and Klagenfurt, Rudolf Strässer works as professor in 'Mathematics and Learning' (Matematik och Lärande) at Luleå University of Technology. In Lulea, he is leading the Mathematics and Learning in Luleå (MaLiL) group which is made up of phd-students and researchers on Didactics of Mathematics and Mathematics. Since October 2004, he is also full professor of Didactics of Mathematics at Justus-Liebig-University in Giessen/Germany. Present research foci are computer use in Geometry teaching at secondary schools, textbooks in the Mathematics classroom and Mathematics at the workplace and in technical and vocational education.

Dynamical Geometry Software for Learning Mathematics

After describing the usual features of Dynamical Geometry Software (DGS), the paper presents what is known about teaching and learning with the drag-mode, when using 'macros' and the 'trace' or 'locus of point' features of DGS. Overall potentials and problems with this generic type of software are described, ending with the statement, that – even with the help of DGS – there is "no royal road to Geometry".

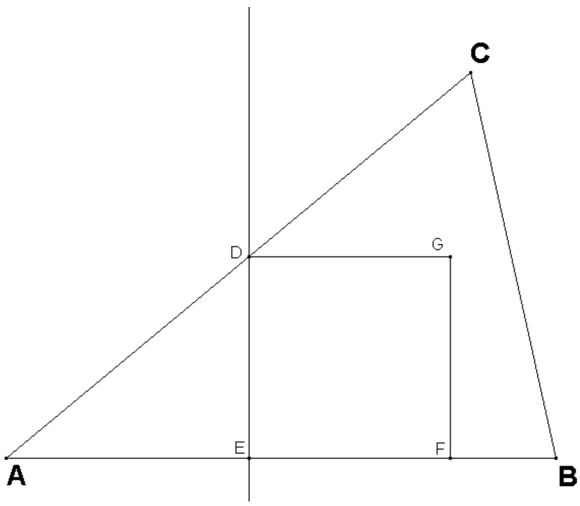
1 Dynamical Geometry Software (DGS)

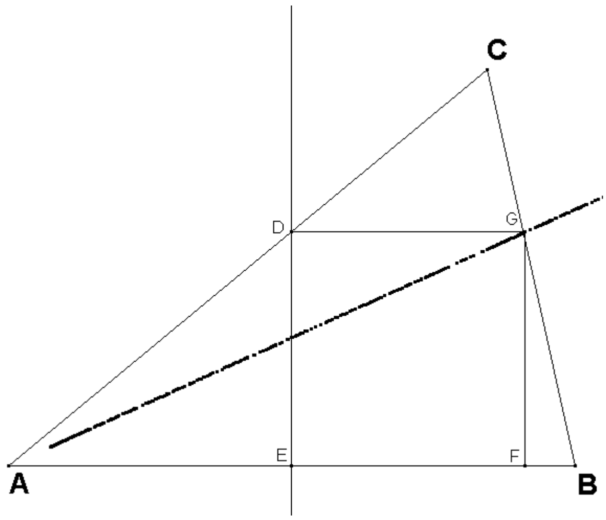
1.1 The 'standards'

Dynamical Geometry Software ("DGS") is a generic abbreviation for a certain type of construction software normally used in teaching and learning Geometry. Instead of starting with a definition, let us start with a prototypic problem solved by using DGS:

Problem 1:
In a triangle ABC you have to inscribe a square DEFG (i.e.: D, E, F, G lie on sides of ABC)!

The solution of problem 1 can give good illustrations for the 'standard' features of DGS. In a traditional paper&pencil environment as well as in a computer environment, it is easy to draw the triangle ABC and then draw a square with points D, E and F on sides of the triangle (see drawing 1.1). If one draws with he help of a DGS, one would already use 'defining macros' as a special feature: Having started from point D on segment AC, point E should be the intersection of segment AB and a perpendicular from D on segment AB, because drawing the square DEFG could then be done using a macro-construction, which creates a the square DEFG just by clicking on the defining points D and E.

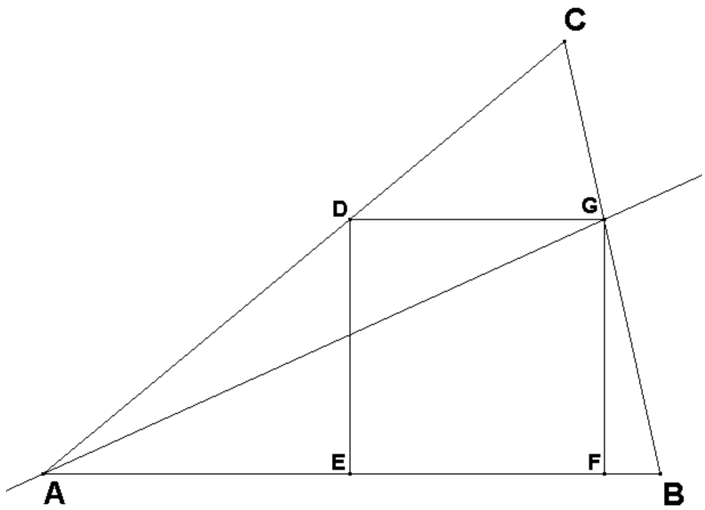




Drawing 1: Inscribing a square in a triangle

Drawing 1.1 **Drawing 1.2**

Drawing 1.2 shows the second and third characteristic features of DGS: Moving point D on the segment AC into the position of this drawing shows the effectiveness of the dragmode and the possibility of a solution of problem 1. Activating the "trace mode" for G also shows the positions G will have when moving D, giving the idea that the "locus of points" of G is a straight line through A, which by the way can be proved by classical Geometry. This gives us an idea how to exactly construct the square inscribed in a triangle: Use drawing 1.1 to draw a straight line through A and G wherever G is according to the position of D. The intersection of this liner with segment BC gives the correct position of G, then (!!) construct the solution square DEFG starting with G using a perpendicular and a parallel line to segment AB, both through point G. The position of D and F are obvious as well as the position of E with a perpen-dicular from the newly found D on segment AB (see drawing 2).



Drawing 2:

Square inscribed in a triangle

In all, we have seen the three defining features of DGS: the ***dragmode*** (as variation of points with conservation of the geometric relations of a construction), defining '***macros***' (as combination of a linear sequence of construction steps into one single step) and tracing '***locus of points***' (as showing the position of an element of a construction when another element is dragged).

1.2 Principles of DGS

Bearing in mind these three characteristic features of Dynamical Geometry Software, this type of software can now easily be described using the two complementary concepts of "figure" and "drawing" introduced into Didactics of Geometry by Parzysz (1988). The "figure" is the set of geometrical relations, which should be satisfied – and in most cases is best described by a text. This figure can be shown, illustrated, visualised by a "drawing", a material and iconic realisation of the geometrical relations, i.e. of the figure. One of greatest obstacles to teaching and learning Geometry is the widespread confusion of these two aspects of Geometry as exemplified by reading of a property (say perpendicularity) from a drawing where two line look perpendicular, but may not be perpendicular in all relevant cases or where the perpendicularity has to be proven.

The main characteristic and most visible feature of DGS is the (nearly) continuous passage from one drawing to another drawing of the same figure by using the dragmode. Traditional (paper-and-pencil) Euclidean Geometry normally only gives one single drawing for a figure, with a special effort it can be made "dynamic" (for instance by drawing a second, third … drawing of the same figure), It differs from DGS by not offering an easy-to-use passage from one drawing to other drawings of the same figure. Classical Geometry can be seen as the static "part" of Geometry.

We can even call the variation of a figure into different drawings as "Dynamical Geometry". If "Dynamical Geometry" is implemented in computers with the help of appropriate software, we arrive at Dynamical Geometry Systems (DGS), thus broadening the scope of possibilities, the potential of teachers, learners, users of Geometry to better understand this most fascinating part of Mathematics. Implementing Dynamical Geometry in software systems should respect (the best one can!) some "principles", which may seem obvious, but directly put us into problems, because classical Geometry does not answer all questions arising from broadening the scope of (classical) Geometry to Dynamical Geometry. I just give the well-discussed example of such a question: In a piece of software, where to place an arbitrary point on a segment when one of its endpoints is being dragged? The initial position is obvious (put the point on the segment where you place the mouse!), but what to do with this point when one endpoint t is moving under the dragmode? The "standard" answer in most DGS is to move this point in a way that it always cuts the segments in the same proportion. The German made software GEOLOG shows that other solutions are possible – and there is even a discussion about the consequences of this design decision (see Hölzl 1994).

From the experience with DGS since 20 years, some principles seem evident and are best described in a text from one of the designers of Dynamical Geometry Software, namely by Jean-Marie Laborde, one of the – if not THE - "father(s)" of Cabri-géomètre (see Laborde 2001).
For a mathematician, **mathematical consistency** is the most important demand on a piece of Geometry software. From everyday experience, this postulate seems to be met in at least the DGS used all over the world (like Cabri-géomètre or Geometer's Sketchpad). The "tangent-monster" first published by Sträßer (for instance in 2001) is an easy reminder that even this postulate is not easily fulfilled.
DGS are typically marked **direct manipulation,** enabling the user to directly take an element of a drawing and manipulate it in the way s/he wants to change this element – if this is possible from the definition of this element. An intersection point in DGS is a nice example for an element, which in most DGS cannot be manipulated.
Ergonomic behaviour ("what you see is what you expect!") is another postulate, which nearly goes by without saying and seems to be fulfilled in most pieces of DGS nowadays. **Continuous changes** (small changes in the defining elements imply small, continuous changes) and **reversibility** (if a point is dragged, then brought back to the initial position, the drawing should be the same as the initial drawing) seem to be postulates substantiating the "ergonomic behaviour" postulate. In the reality of DGS, this is far from evident, for some combinations it is even impossible! With an elementary example and the help of differential Geometry, Gawlick (2001)

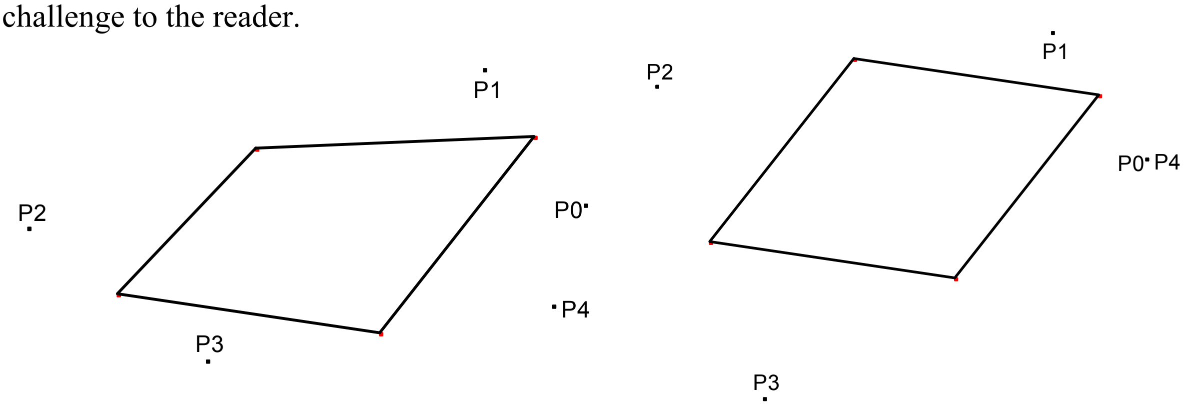
showed that continuity (like the one in CINDERELLA) and reversibility (like in Cabri-géomètre) cannot be implemented in one and the same piece of software. Consequently, the software designers have to make a decision which of the two postulates should be fulfilled, violating the other postulate by necessity.

2 Teaching&learning with the drag-mode

Remarks on teaching and learning using the dragmode start with another problem published by Arzarello et al. (1998). Here is **problem 2**:

Given a quadrilateral ABCD and a Point P_0 , construct P_1 as symmetric to P_0 with respect to A, then P_2 as symmetric to P_1 with respect to B etc., till you have a "row" of P_0 , P_1 , P_2, P_3 and P_4. Which condition for ABCD makes $P_0 = P_4$?

Drawing 3 shows two instances of the construction to problem 2, with the right one showing that the identity of the two points can indeed be reached. The condition is not given here to offer a challenge to the reader.



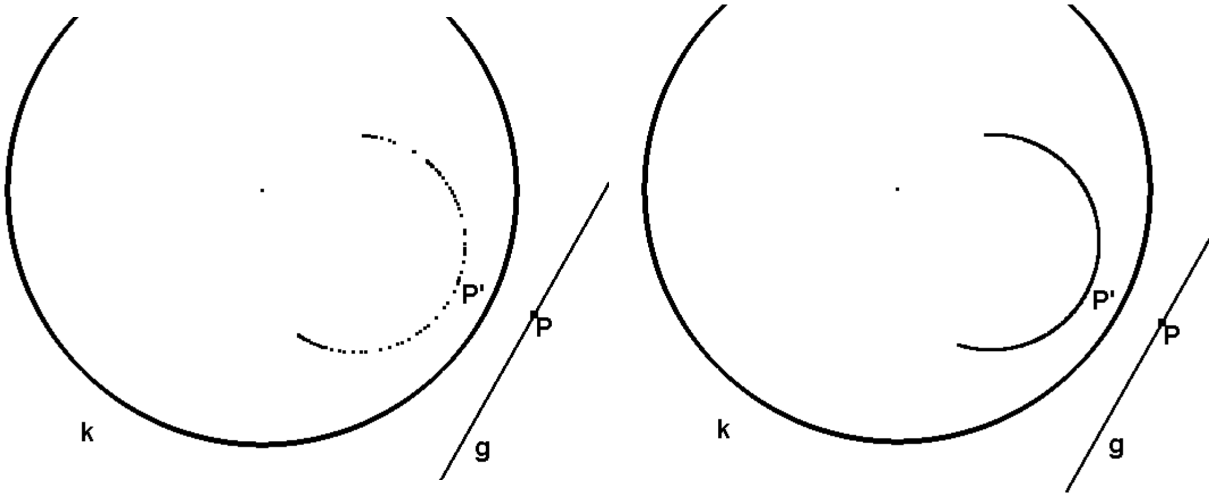
Drawing 3: Solution of problem 2

Arzarello's team has thoroughly analysed the solution processes of students in order to describe and classify the use of the dragmode (see also Arzarello et al. 2002). He came up with basically three types of dragging, which the reader may also encounter when solving problem 2. At a first trial, after constructing the sequence of points, the user normally plays around and will soon arrive at a drawing like the right one in drawing 3. Merely by chance, s/he is using "***wandering dragging***" to find a solution. Then s/he may have an idea about a general solution – and wants to control this idea by dragging according to this idea, using "***lieu muet dragging***", which is dragging on an assumed curve to preserve a solution. At the end of this dragging, s/he may even construct a new drawing, which preserves the assumed property (in our problem of the quadrilateral) to put her/his idea to a "***dragging test***". It should be mentioned that this does not fully solve the problem in Euclidean Geometry. Classical Geometry would like to see a proof.

3 Using 'macros' and 'locus of point'

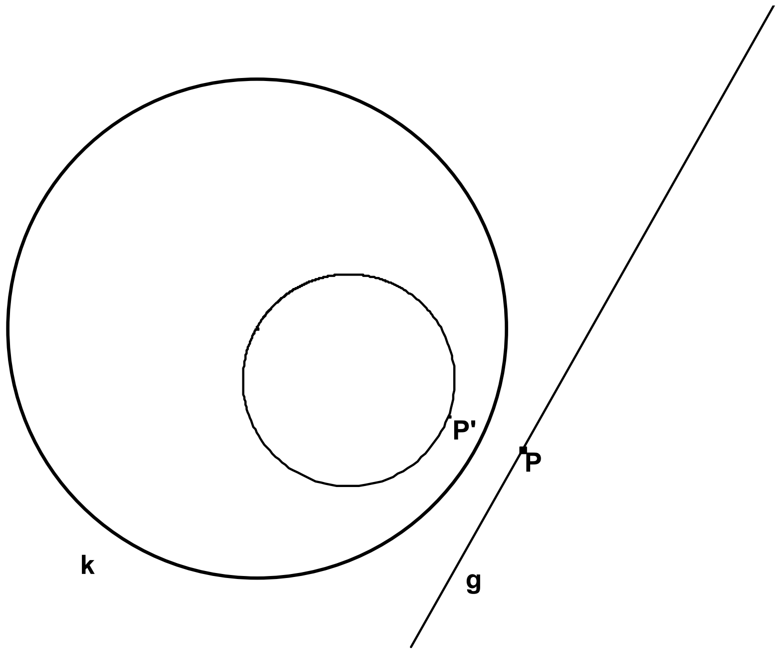
3.1 Using 'locus of points'

In the first example with the square inscribed in a triangle, you have already seen the "trace" menu-item in action. This standard procedure of a DGS offers the ***point***wise construction of a dependency implied by a construction. The drawing you get on screen will even depend on the velocity of your drawing (see drawing 4 below and compare the left drawing with fast dragging and only a few points and right drawing with slow drawing and a nearly full arc as part of a circle, as the image of a point on line g under inversion at the circle k).



Drawing 4: Inversion of a point on a straight line

Some DGS (like Cabri-géomètre) have an additional menu-item called "locus of points", which immediately creates the full range of positions when/as if the defining point were dragged. In our example, this directly creates a full circle (see drawing 5), which is difficult to get because only a finite part of the plane/screen is available for dragging.



Drawing 5: Inversion using "locus of points"

From the experiments with secondary students in France (Jahn 2002), one knows that learners tend to stick to "trace", the way to pointwise create the position of dependent points when other elements are being dragged. This may probably be explained by the fact that the local "trace" approach is easier to understand / control, while the global "locus of points" approach sometimes presents quite surprising, even non-understood curves of dependent points. It goes without saying that teachers have to explicitly care for and cope with the phenomena of curves created by the "trace" and/or "locus of points" functionality.

3.2 Defining macros

The third typical feature of DGS, namely Macro-constructions, is the worst researched feature linked with this type of software. In problem 1 we had a rather simplistic example of a macro being used – namely the construction of a square from a segment or two points. Nevertheless, this simple application can save a lot of time if appropriate macros are predefined – or pre-defined on purpose by a teacher who wants to focus his students on other things than repetitive constructions like squares when dealing with the Pythagoras theorem.

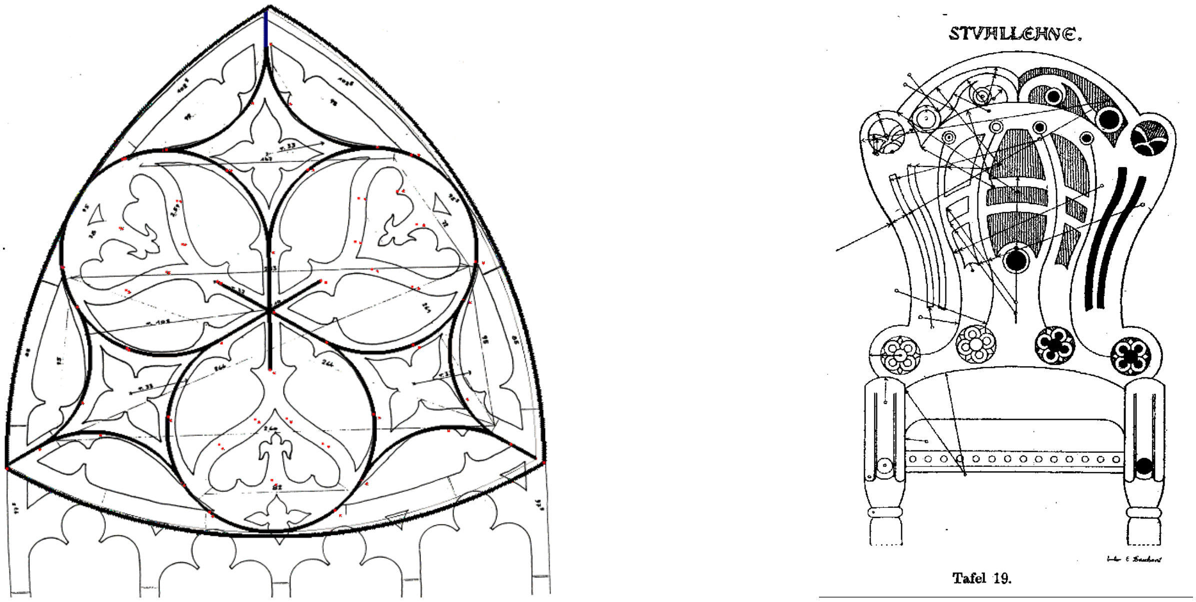
Using macros always has the same effect: it frees the user from the tedious reflection on how to (for instance) draw a square. The details of an algorithm are put into a "black box", and the user can forget about these nitty-gritty details. At best, s/he can follow the logic of the contents in question – provided the user knows about Geometry and an effective definition and existence of a macro.
If we have a glance aside into informatics, we see another major restriction of DGS-macros at least nowadays: Because of the state of the art of 'programming by example' ('PBE'), at present macros a restricted to unconditioned linear sequences of commands without iteration (Geometer's Sketchpad with its possibility of iteration is a certain exception to this!).

I will not go into details on this, but want to summarise what we know about Macros: From papers like Weth 1992, Kadunz&Sträßer 2000, Sträßer 2002, it is clear that DGS-macros are an excellent way to structure a construction. They help to organise a construction and/or a description of a construction. They help to organise, maybe analyse a construction, they offer a way to structure, to "chunk" a geometrical construction.

4 On teaching with DGS: potentials and problems

Before commenting on teaching and learning Geometry with the help of Dynamical Geometry Software, a few remarks on Geometry seem to be in place. Especially in compulsory schools, in grades 6 to 9, one can find two types of Geometry in the classroom: There is ***„Euclidean"*** Geometry with constructions by ruler&compass, in some place also an initiation to arguments, maybe even structured into formal proofs. On the other hand, and for all students, there should be and normally is everyday geometrical thinking, which was called ***„descriptive"*** Geometry, somehow alluding to Gaspard Monge, the famous founder of the discipline "Descriptive Geometry" widely used in practical professions and technical universities to model and explore real life situations. Both aspects of Geometry are important for Geometry in the curriculum and classroom. For a first appearance of this distinction see Sträßer 1990.

"Everybody" a little bit interested in Mathematics knows about and remembers "Euclidean" Geometry- with the sum of the angles in a triangle as a good example of this type of Geometry. In most places, the statement on the sum of the angles in a triangle is the first instance of a proof in school, it is an important "fact" mainly used in deductive Geometry, it is an excellent example of "Euclidean" Geometry. In contrast to this, "Descriptive Geometry" is the societal use of Geometry. Window frames (->especially gothic ones), floor tilling & patterns, ornaments, mosaics, ceilings (structure and painting), 'art deco/nouveau', nearly all everyday tools, architecture, and proportional reduction and enlargement can be cited as examples of this type of Geometry. I just give two nice examples of it in drawing 6 below, with the left drawing showing a geometrical reconstruction of a gothic window of a Church in the town of Münster in Westfalia, while the right part of the drawing is a reconstruction of an art-deco chair copied from an old book on geometrical drawing (from Becker 1912).



Drawing 6: Examples of Descriptive Geometry

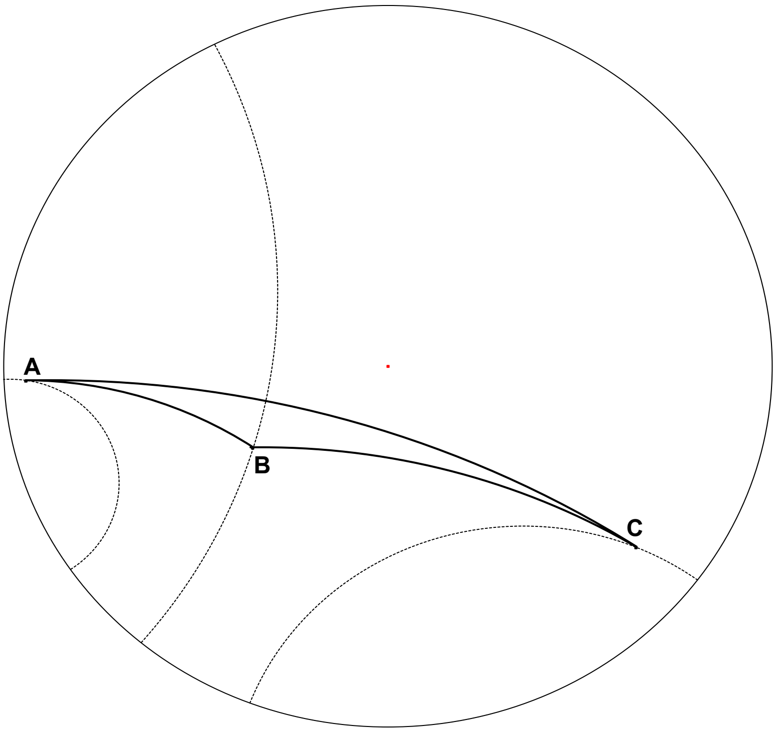
4.1 Potentials of teaching and learning with DGS

Some educationalists argue: The decline of teaching Geometry in schools, which took place in most European countries from the mid-70ies to the mid-90ies, has come to a stop because of computers and software like Dynamical Geometry Systems (DGS) and the growing use of descriptive Geometry in society at large. The widespread use of Computer Aided Drawing ("CAD") may also have supportive effects for teaching Geometry in compulsory schools. These developments imply, that traditional Euclidean Geometry becomes more flexible, more explorative, nearer to Descriptive Geometry, but also more demanding, because everyday use of Geometry does not respect the logical order imposed by deductive Geometry.

Dynamical Geometry Systems (DGS) were first developed to enhance classical "Euclidean" Geometry. But with their existence, they added interesting and accessible topics to the traditional ones. In short: DGS widens the range of possible topics for teaching and learning Geometry! I will give a few examples.

Example 1: Hyperbolic Geometry

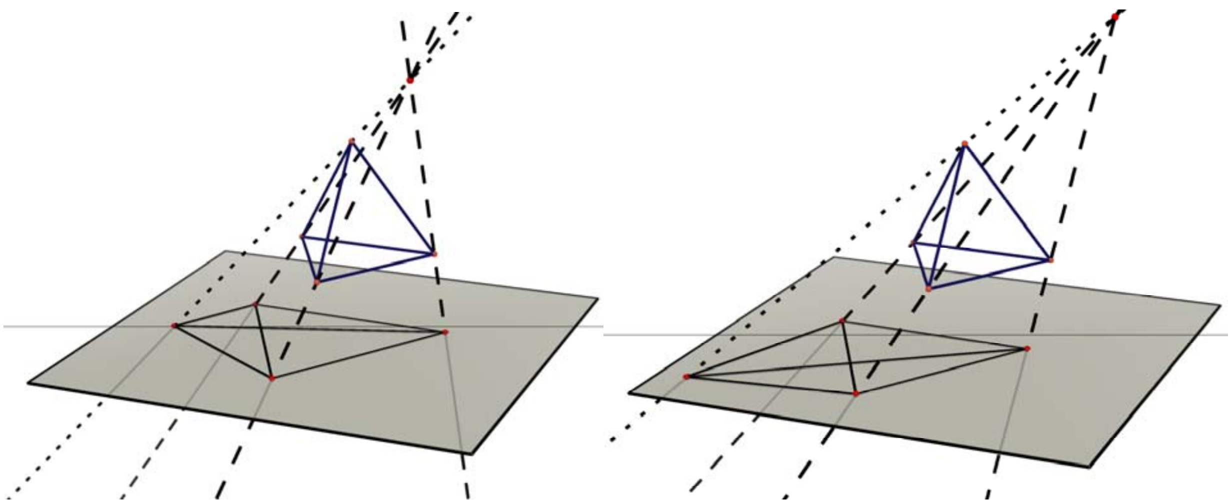
At least from a philosophical point of view, it was interesting to know if Euclidean Geometry (in the narrow, disciplinary sense defined by a set of axioms including the parallel axiom) represents the world around us. DGS does not answer this question, but can at least show that models of Hyperbolic Geometry are as accessible to the student as Euclidean Geometry is. With an appropriate set of macros (see for instance Lister 1998), drawing in plane Hyperbolic Geometry can be as can as easy as drawing in the traditional Euclidean Geometry. Drawing 7 just shows that – using the conformal model of plane Hyperbolic Geometry - the (dotted) perpendiculars in a triangle do not always meet in one point.



Drawing 7: Perpendiculars in an hyperbolic triangle

Example 2: Spatial Geometry

Most of the time and in most countries, school Geometry is about plane, two-dimensional Geometry. At a first glance, the existence of DGS, which are also working on a flat surface (like a mouse-pad and a screen), will not change this situation. In reality, and because of the control over the different representations of spatial, 3D-Geometry by means of projections, DGS can change the situation. With the definition of appropriate macros, it is already easier to construct representations of spatial configurations using only standard Dynamical Geometry Software. Recently, Dynamical Geometry has made a step forward by offering dynamical software especially created for 3D-configurations: "Cabri-3D" (for the manual see de Contret&de Contret 2006). To give an idea about this type of software, drawing 8 shows a central projection of a tetrahedron with the defining point of the projection P in two different places, using the "floor" as projection plane. Unfortunately, a text, even a static drawing is simply not very appropriate to show the potential of such a versatile piece of software.



Drawing 8: Tetrahedron in central projection

Example 3: A lesson on proof

If one looks through the literature on DGS, a debate on the role and changes of proof when using DGS is prominent. DGS seems to have an ambivalent role: If DGS is reduced to illustration and playing around in geometrical drawing, proof becomes even less important to learner. Students often ask themselves and/or the teacher, why they should give a proof after having seen "thousands" of drawings showing the property under study. On the other hand, if DGS is used in an intelligent way with well planned and controlled problems (like for instance problem 2 from the beginning of this text), DGS is fast in offering counter-examples if a hypothesis if false, but also asks for understanding of surprising properties, which may produce excellent reasons to argument and prove. In an overview of research into technology based Geometry teaching at secondary level, available research is condensed into the following statement: "To date, it is still an open question if the 'authority' of the computer and appropriate software leads to a greater resistance to proving on the side of the learner or if adequately chosen and presented proof problems within a computer 'milieu' further the need of proofs for the learner"(Hollebrands-Laborde-Sträßer 2006).

4.2 Problems of teaching&learning with DGS

At a first glance, it may come as a surprise after the positive and optimistic sections above to speak about "problems" related to teaching and learning with the help of Dynamical Geometry Software. From research on DGS, it is nevertheless quite clear that this innovation also has unwanted, sometimes-harmful consequences for the teaching and learning of Geometry.

The most obvious problem linked to DGS use is its attractiveness. Some students find this tool so attractive, that the rule of the tool dominates the geometrical question under study. The ease and beauty of (the) drawing may become so important, the manual activity and joy covers up the geometrical construction and the mathematical analysis of it.

As already mentioned above with example 3, the seduction of "seeing" within DGS sometimes lead to an approach like "no proof needed - we have seen it!" This is an extremely harmful consequence of DGS use, but can be avoided by well-planned challenges and lessons.

Even the very first pieces of research already mention a danger when using DGS which is a more or less ambivalent observation. Some students simply play with DGS and de-goal, that is totally forget about the reason why they started to use this piece of software.

5 Conclusion

To sum up in a very short statement what was written in the text above, one has to realise: Even nowadays - with DGS and other "wonders" of technology, "there ***is no royal road to Geometry***!"

References

Arzarello, F., F. Olivero, et al. (2002). A cognitive analysis of dragging practises in Cabri environments. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **34**(3): 66-72.

Arzarello, F., C. Micheletti, et al. (1998). A Model for Analysing the Transition to Formal Proofs in Geometry. *Psychology of Mathematics Education 22*, Stellenbosch, South Africa, Vol. 2, 24-31.

Becker, H. (1912). *Geometrisches Zeichnen* (3rd printing). Leipzig: G.J. Göschen'sche Verlagshandlung.

de Contret, S., & de Contret, P. R. (2006). *Cabri 3D user manual*. Grenoble: Cabrilog. http://ns33285.ovh.net/data/pdfs/manuals/c3d/cabri3d_user_manual_en.pdf

Gawlick, T. (2001). Zur mathematischen Modellierung ders dynamischen Zeichenblattes. *Zeichnung - Figur - Zugfigur*. H.-J. Elschenbroich, T. Gawlick and H.-W. Henn. Hildesheim, Franzbecker**:** 55-68.

Hölzl, R. (1994). *Im Zugmodus der Cabri-Geometrie. Interaktionsstudien und Analysen zum Mathematiklernen mit dem Computer*. Weinheim, Deutscher Studien Verlag.

Hollebrands, K., Laborde, C., & Sträßer, R. (2006). Technology and the Learning of Geometry at the Secondary Level. In C. Heid & G. W. Blume (Eds.), *Research on Technology in the Teaching and Learning of Mathematics: Syntheses and Perspectives*. Greenwich: Information Age.

Jahn, A. P. (2002). ""Locus" and "Trace" in Cabri-géomètre: relationships between geometric and functional aspects in a study of transformations." *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **34**(3): 78-84.

Kadunz, G. & R. Sträßer (2000). Visualization in Geometry: multiple linked representations? *Psychology of Mathematics Education 25* Utrecht / NL, Freudenthal Institute.

Laborde, J.-M. (2001). Zur Begründung der dynamischen Geometrie. *Zeichnung - Figur - Zugfigur.* H.-J. Elschenbroich, T. Gawlick and H.-W. Henn. Hildesheim - Berlin, Franzbecker**:** 161 - 172.

Lister, T. (1998). *Hyperbolic Geometry using Cabri*. Lister, Tim. Retrieved, from the World Wide Web: http://mcs.open.ac.uk/tcl2/nonE/nonE.html

Sträßer, R. (1990). Euklidische Geometrie versus deskriptive Geometrie. In L. f. S. u. Weiterbildung (Ed.), *Die Zukunft des Mathematikunterrichts* (pp. 73-76). Soest: Soester Verlagskontor.

Sträßer, R. (2001). Chancen und Probleme des Zugmodus. *Zeichnung - Figur - Zugfigur*. H.-J. Elschenbroich, T. Gawlick and H.-W. Henn. Hildesheim, Franzbecker**:** 183 - 194.

Sträßer, R. (2002). "Makros" von DGS: Terme der Geometrie? In: *Beiträge zum Mathematikunterricht 2002.* M. Neubrand (Ed.) Hildesheim, Franzbecker.

Weth, T. (1992). Computerunterstütztes modulares Konstruieren im Geometrieunterricht. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* **24**(4): 146 - 151.

Renate Jensen
Jeg er utdannet allmennlærer med fordypning i matematikk.

Siden 2003 har jeg arbeidet i Caspar Forlag blant annet med det digitale læremiddelet matemania. Arbeidet kombinerer jeg med undervisning, og dette skoleåret underviser jeg i matematikk på mellomtrinnet ved Nattland skole i Bergen - både grupper og enkeltelever. I tillegg er jeg faglærer i matematikk for en klasse FØU studenter ved Hib.

www.matemania.no – digitalt læremiddel for mellom- og ungdomstrinnet

www.matemania.no er et interaktivt læremiddel i matematikk, utviklet av Caspar Forlag A/S, i samarbeid med Mediesenteret ved Høgskolen i Bergen. Utforming av aktivitetene er det matematikklærere ved Høgskolen i Bergen-Avdeling for lærerutdanning og Norsk Lærerakademi som har ansvaret for Prosjektet er støttet økonomisk av Læringssenteret.

Læremiddelet har to versjoner – en for ungdomstrinnet og en for mellomtrinnet. Jeg vil si litt om oppbygging og vise eksempler på hvordan jeg har benyttet læremiddelet i grupper og med enkeltelever. Jeg har gjennom hele forrige skoleår brukt matemania regelmessig på 5., 6. og 10. årstrinn. Jeg vil gi eksempler på oppgave til elever, og vise hvordan jeg har arbeidet med læremiddelet på ulike alderstrinn og gruppestørrelser. Matemania er uavhengig av andre læreverk, og egner seg derfor også til bruk i grupper på tvers av alderstrinn. De mange vei- og nivåvalgene samt åpne problemstillinger gir gode muligheter for differensiering. For elever som har tilgang til internett hjemme kan læremiddelet være en positiv stimulans når det gjelder hjemmearbeid og samarbeid hjem/skole.

Læremiddelet er tilgjengelig på begge målformer, og dette valget gjøres før elevene begynner på de ulike aktivitetene.

Nedenfor vil jeg vise noen av aktivitetene som man finner på mellomtrinnet

.

Mellomtrinnet

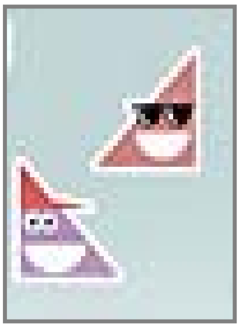
Denne versjonen er bygd opp som en samling verksteder. Her kan elevene gjøre matematiske erfaringer. Det er muligheter til å eksperimentere, utforske, lage egne hypoteser og prøve ut. For at dette skal være mulig er matemania.no organisert som interaktive verksteder der elevene selv kan utføre aktiviteter. Noen verksteder er av rent matematisk art der målet for eksempel kan være å lære mer om divisjon eller figurtall. Andre verksteder kan være mer estetiske der sammenhengen mellom geometri og estetikk kommer tydelig fram. Hverdagsmatematikk er fremtredende i enkelte verksteder som for eksempel i *Frukthandleren* og *Målestokk.*

Elevene velger det de vil arbeide med enten fra ikonøya eller fra hurtigmenyen der emnene er ordnet etter tema. Om ønskelig kan læreren finne verksteder som passer aktuelle emner elevene arbeider med i matematikktimene og styre elevene mot disse. På verkstedsnivå kan elevene arbeide alene eller i grupper på to eller tre. I verkstedene vil elevene kunne se animasjoner og de vil selv kunne være aktive og styre undersøkelsene.

Rullemenyene er like i alle verkstedene, og gjør det enkelt for lærer, elev og foreldre og veksle mellom ulike aktiviteter. Styrer en musen over ikonet i verkstedet, kommer en rullemeny fram. Denne inneholder ulike elementer som *informasjon om verkstedet*, *kalkulator*, *oppgave*, *forslag til aktiviteter* og *undersøkelser*.

Oppgavene har ofte fasit og elevene kan prøve å svare og får direkte tilbakemeldinger. Ofte vil det være en fordel at elevene går fra oppgavene til verkstedsaktiviteten for å prøve ut det oppgaven spør om og for å kunne svare. Jeg har erfart at mange elever synes denne vekslingen er vanskelig, og at oppgavene fungerer bedre hvis de skrives ut på papir. Elevene kan da lese oppgaven på arket, og prøve ut på skjermen. I mange tilfeller kan elevene også velge å arbeide med ”undersøkelser”. Dette er større oppgaver som vil ta tid. Det vil være en fordel at elevene arbeider med disse undersøkelsene i grupper. Forskjellige grupper kan gjerne komme frem til ulike resultater når de arbeider med disse undersøkelsene. Verkstedsaktivitetene vil vanligvis være til hjelp i arbeidet med undersøkelsene men også kilder utenfor kan være aktuelle.

Her er eksempler på noen av de mer enn tjue verkstedene som finnes på mellomtrinnet.



Frukthandleren og Eurobutikken

Her møter man tilfeldig forbipasserende som lar seg friste av de varene frukthandleren har for salg. Her må man legge den korrekte vekten i lodd på den ene vektskålen, og den frukten kunden ønsker å kjøpe på den andre. Når det er gjort skal det betales og vekslepenger gies tilbake. Verkstedet gir trening i vektenheter, addisjon og subtraksjon. Ved å la elevene arbeide to og to vil de kunne forklare for hverandre hvilke strategier de benytter, og man kan få verdifulle matematikkdiskusjoner. Hele veien gir verkstedet tilbakemelding om svaret er korrekt – hvis ikke kan man prøve en gang til. Dette verkstedet fungerer derfor flott i store grupper. I gruppen med 11-åringer jeg hadde i fjor, benyttet jeg dette verkstedet sammen med *Eurobutikken*. Da fikk de elevene som trengte større utfordringer dette ved å arbeide med et verksted hvor summene de handler for er større, og hvor de må regne mellom kroner og euro ved å multiplisere eller dividere. Begge verkstedene hjelper elevene med å utvikle effektive hoderegningsstrategier.

Flere av verkstedene er spill som elevene kan gjøre sammen eller på egenhånd. Jeg vil her vise to spill som er fine å bruke både som referanse i senere arbeid i gruppen.

<u>Terninger</u>

12 hester står klar til start i hvert sitt startfelt fra A, B, C,.......til K.
To terninger kastes og summen av øyne avgjør hvilken hest som får rykke en plass fram. Den som kommer først til øverste vannrette strek har vunnet.

Spillet passer for flere spillere som hver har sine hester i ulike felter. Her må elevene tenke gjennom om noen startfelt er gunstigere enn andre. Om du fikk velge først, hvor ville du da plassere hesten din? Diskuter strategien med elevene.

Spillet vil til enhver tid vise hvilken hest som ligger i teten. Om elevene spiller flere ganger vil resultatene ikke nødvendigvis bli identiske, men de vil kanskje se en tendens. Diskuter hvorfor det er slik. Spillet har også en knapp som gjør det mulig å variere antall kast pr. trykk fra 1 til 1000. De vi da se et mer utjevnet bilde av spillet, slik gjennomsnittet av mange spill ville blitt. Dette verkstedet synes jeg fungerer flott til introduksjon av sannsynlighetsregning – og ”de store talls lov”. Gjennom diskusjon med elevene får gruppen en felles referanse for disse begrepene, og dette er verdifullt i senere undervisning. Hvorfor vinner hest nummer 7 når vi øker antall kast pr. trykk? Hvorfor vinner ikke alltid denne hesten når vi slår et kast pr. trykk? Hvor mange kombinasjoner gir 7? Hvorfor får ikke hest nr. 1 poeng? Verkstedene er basert på et konstruktivistisk læringssyn der vi bevisst søker å spille på elevenes egne refleksjoner.

<u>Hesteveddeløpet</u>

Dette er et spill som likner på Ludo. Du kan spille alene eller med en motstander. Den ene spilleren har svart og hvit, den andre gul og blå. Svart/hvit begynner å kaste terninger. Det er en grønn og en rød terning. Ved hjelp av bokstavuttrykket (formelen) som hesten står ved regner du ut hvor mange skritt du får gå framover. Her står g for antall øyne på den grønne terningen og r for antall øyne på den røde terningen. Står det $3 \cdot g + r \cdot g$ betyr det at du skal gange tre med antall øyne du får på grønn terning og så gange antall øyne på rød med antall øyne på grønn terning. Deretter må du legge sammen disse svarene. Da vet du hvor mange felt hesten kan flytte. Bare en hest kan rykke fram for hvert kast. Plasser hesten på det rette feltet ved å klikke og dra. Plasserer du på feil felt får du "straffepoeng", dvs. hesten din blir plassert tre skritt tilbake i forhold til der du egentlig skulle ha stått. (Noen ganger kan det faktisk lønne seg.)

Så er det motstanderens tur. Hun kaster terninger, regner ut og plasserer hesten sin på rett felt. Etter hvert vil hestene dine stå på forskjellige felter og du må vurdere hvilken hest det er lurt å flytte også med tanke på utsikter til å nå langt i neste trekk. Kun en hest kan rykke fram (eller tilbake) hver gang. Noen ganger kan formelen faktisk tvinge deg til å rykke tilbake.

Arbeid med hesteveddeløpsspillet vil gi en flott anledning til å arbeide med variabler og gi en introduksjon til emnet algebra. Elevene ser etter en liten stund at antall øyne på terningene er en variabel som kan ta flere verdier. Det er lett å se at bokstavene står for tall og at en egentlig ikke regner med bokstavene men at det alltid ligger tall bakenfor, bare at tallet for øyeblikket ennå ikke er bestemt. Spillet gir også en god trening i å gjøre overslag for å beregne hvor langt de kan komme ved neste kast eller hvor mye de eventuelt må rykke tilbake hvis de har uflaks.

Kaleidoskop

I dette verkstedet kan elevene eksperimentere med ulike former for symmetri. Ved hjelp av programmet kan de lage flotte kunstverk. Vi laget blant annet noen fantastiske julekort, og elevene fant mange motiver med ulik symmetri. Resultatet ble skrevet ut på en fargeprinter, og deretter limt på farget kartong. Vi fikk blant annet en god diskusjon på hvilke bokstaver som har speilingslinjer.

Geometri er det matematiske emnet der det særlig er fremtredende at det visuelle fungerer støttende i forhold til rent logisk resonnementer. L97 oppmuntrer til å utnytte den estetiske dimensjoner som ligger i emnet til å skape positive holdninger til matematikkfaget. Geometriske begreper kan ofte lett visualiseres. Derfor egner et digitalt medium seg godt til arbeid med slike begreper. Elevene vil kunne møte kjente og ukjente geometriske begreper, se dem visualisert i forskjellige situasjoner og kunne bruke dem aktivt i målinger og konstruksjoner. Elevene vil i dette verkstedet møte oppgaver og undersøkelser på forskjellige nivåer. En del av aktivitetene vil være av en slik karakter at elevenes utskrifter blir viktige.

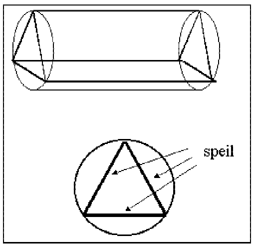
Dette verkstedet har mange oppgaver å velge mellom. Et eksempel:

Oppgave 4 Du skal illustrere hvordan et leketøyskaleidoskop fungerer. I denne forbindelsen skal du lage noen tegninger som viser bilder man kan se når man kikker gjennom et kaleidoskop. Hvilken symmetriform skal du velge? Lag noen tegninger.

Figurene som ses gjennom et kaleidoskop kommer fram ved tre speil. Vanlig aksesymmetri med ett loddrett speil finner du også i disse figurene. Elevene kan gjerne arbeide sammen, og finne svar gjennom utprøving.

Til denne oppgaven finnes også en oppskrift på hvordan man kan lage et leketøyskaleidoskop på egen hånd. Slike praktiske oppskrifter finnes i mange av verkstedene.

Vi lager et kaleidoskop



Du trenger:
Tre små speil, en glasskjærer
Pappbiter eller glassbiter i forskjellige farger
En papprull (f.eks. kjernen fra en rull tørkepapir), limpistol

1. Har du et gammelt speil, eller deler av et gammelt speil, kan du skjære det i tre like avlange rektangulære deler med en glasskjærer. Sett bitene sammen til en "trekantet tunnel". Lim gjerne bitene sammen med en limpistol og tre papprullen over. Ved enden kan du legge en bit av en glassplate.
2. Riv små stykker av de fargete pappbitene og legg dem nær et hjørne på bunnplaten, (glassplaten), i kaleidoskopet ditt. Du får et flott symmetrisk mønster når du retter kaleidoskopet mot lyset.
3. Lag en firkantet speiltunnel. Gjenta alle undersøkelsene. Prøv å tenk deg til hvordan det vil se ut på forhånd.
4. Vil du lage et skikkelig "proft" kaleidoskop, kan du lage et lite gjennomsiktig rom av to glassplater eller gjennomsiktige transparentbiter med litt avstand der du plasserer de fargete bitene. Dette festes så foran kaleidoskoprøret. Holdes nå kaleidoskopet opp mot lyset, vil de fargete bitene ikke lenger skli ned, og du kan betrakte mønsteret i ro og mak.
5. Skriv ned det du ser underveis. Klarte du å forutsi effekten ved bruk av tre speil? Hva med fire? Har du forbedringsforslag for kaleidoskopet?
6. Ta for deg noen enkle figurer (en rett strek, en trekant, en sirkel og en firkant). Prøv å forutsi hva som skjer når dere betrakter figurene hver for seg gjennom kaleidoskopet. Lag tegninger. Sjekk så resultatet ved å ta en titt gjennom kaleidoskopet.

Dette var noen smakebiter fra versjonen for mellomtrinnet.

I arbeidet med matemania har vi hatt to hovedmålsetninger:

- Stimulere elevers interesse for og innsikt i matematikk.

Strukturen skal legge til rette for arbeidsoppgaver hvor elevene kan arbeide på ulike nivå - individuelt eller i samarbeid om matematiske problemstillinger. Læremiddelet skal virke til at elever stimuleres i forhold til faglige utfordringer. Det skal påvirke elevers oppfatning av matematikk som et tilgjengelig og kreativt fag der undersøkende virksomhet er sentralt. Muligheten for å la elever arbeide i begge versjonene gir gode muligheter for differensiering.

- Gi lærerne alternativt undervisningsmateriale og faglig tilfang.

Læremiddelet skal virke faglig stimulerende også for lærere fordi det tilfører faglige problemstillinger og setter fagkunnskapen inn i andre sammenhenger. I tillegg til verksteder, oppgaver og undersøkelser, inneholder matemania en database med fagstoff. Dette er tilgjengelig i en database som er koblet opp mot både aktivitetene og et søkeverktøy. Denne databasen finnes i versjonen for ungdomstrinnet. Lærestoffet i prosjektet bygger på fagstoff som er utviklet i fagmiljøet omkring prosjektteamet og Caspar Forlag A/S. Det er publisert i Tangenten (tidsskrift for matematikkundervisning), i fagbøker og artikler som er vist til under og i lærestoff som i noen grad har vært barbeidet til web-basert bruk.

Tomas Bergqvist
Lektor vid Institutionen för Interaktiva Medier och Lärande, IML, vid Umeå universitet. Jag är utbildad gymnasielärare i matematik, fysik och datakunskap. Efter ca 10 år i skolan blev jag doktorand i matematikdidaktik och fick min doktorsexamen 2001. Min avhandling heter To Explore and Verify in Mathematics. Min forskning handlar i stor utsträckning om matematiska resonemang och elevaktiva undersökande arbetssätt.

Räknare i skolmatematik – vara eller inte vara?

Introduktion

Det finns många olika typer av räknare som elever använder. Från enkla räknare med enbart de fyra räknesätten till avancerade grafritande och symbolhanterande räknare. Dessutom har nästan alla elever en mobiltelefon med en inbyggd räknarfunktion. Har du provat att använda mobiltelefonen som räknare? Det är inte helt enkelt. Ganska många elever har mobilen som sin enda räknare och därför anser jag att man som lärare måste bekanta sig med den för att kunna hjälpa elever.

Vad skiljer då en grafritande miniräknare (en s.k. grafräknare) från en mobiltelefon eller en annan enkel räknare? Det finns ett antal tydliga skillnader som jag ska försöka beskriva här.

1. *Grafräknaren kan rita grafer och visa andra grafiska illustrationer.* Att arbeta med linjära samband och liknade utan visualiseringar tenderar lätt att bli mycket metod- och algoritmfokuserat.
2. *Man ser det man har matat in samtidigt med resultatet*. Kontroll av beräkningar och reflektion över sitt eget arbete underlättas kraftigt om man kan se och analysera hur man har använt hjälpmedlet.
3. *Formler matas in i korrekt ordning.* Ett exempel är cos(30°) i stället för att mata in 30 och sedan trycka på cos-knappen. Många elever har svårt att skilja på funktion och argument i detta och andra liknande situationer. Detta kan motverkas om räknaren är tillräckligt avancerad.
4. *EXE i stället för =*. För många elever betyder ”är lika med” samma sak som ”räkna ut”. Detta är inte så konstig eftersom de redan från de tidigaste mötena med matematik fått uppgifter av typen ”3+4= ” där de förväntas räkna ut 3+4 och fylla i svaret i luckan. På mer avancerade räknare används knappen ”=” så som den ska, nämligen en logisk jämförelse och i stället har men en knapp för att utföra beräkningar markerad med EXE (execute). En elev som anser att ”=” betyder ”räkna ut” kan inte lösa en ekvation av typen $x+4=3-x$ eftersom det inte finns någonting att räkna ut (Bergqvist et al, 2003).
5. *En grafräknare har två olika minustecken.* Negativa tal är ett mycket svårt område. När Leibniz[1] blev tillfrågad om uppgifter av typen 3 – 5, det man på den tiden kallade *absurda tal,* ville han inte svara med motiveringen att det var för svårt för honom. Det är olyckligt att matematiksamfundet har valt att ha samma tecken för negativa tal som för operationen subtraktion. Detta medför onödigt många svårigheter för eleverna. Därför är det bra att grafräknaren erbjuder två olika minustecken på separata knappar.

I Sverige ska alla elever ”ha vana att vid problemlösning använda dator och grafritande räknare för att utföra beräkningar och åskådliggöra grafer och diagram” (Skolverket, 2001). ”Ha vana vid” betyder, anser jag, att alla elever ska ha kontinuerlig tillgång till grafritande hjälpmedel. Samtidigt uppstår ett problem. Den Svenska skolan ska vara avgiftsfri men eleverna måste själva skaffa

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz var en tysk matematiker som presenterade principerna för differentialkalky år 1716.

räknare. Kan vi uppnå kursplanens mål om eleverna inte har egna grafräknare? Är skolan avgiftsfri om eleven måste köpa sin egen räknare?

Hjälpmedelskompetens

Matematikdelegationens betänkande skriver så här om vad ett modernt matematikkunnande är: ”konsten att hantera tekniska hjälpmedel relevant och effektivt är ytterligare aspekter av ett detta kunnande.” (SOU 2004:97).

Vad ingår då i begreppet hjälpmedelskompetens? Enligt mej består denna kompetens av flera delar, bl.a. följande:

- Handhavande
- Kunskap om vad som kan göras
- Förmåga att välja vad som ska göras
- Förmåga att avgöra vilket hjälpmedel som passar till vilken uppgift.

Den sista punkten är mycket viktig, men jag är rädd för att den inte är så frekvent förekommande i matematikundervisningen i Sverige. Ofta ser man i läroböcker kommentarer som ”räkna i huvudet” och ”lös med miniräknare”. Detta medför att eleverna inte tas med i diskussionen om den sista punkten ovan.

Det är intressant att se att förslaget till ny kursplan i matematik för gymnasieskolan i stor utsträckning diskuterar matematiskt kunnande i form av kompetenser och att hjälpmedelskompetens är en av de som anses viktiga.

Forskning om grafräknare

Forskningens uppgift är inte att säga hur undervisningen ska bedrivas utan att ge lärare möjligheter att förstå hur lärande fungerar så att de själva kan utveckla sin undervisning. I en mycket omfattande forskningsöversikt skriver man att ”Research can help us understand how technology may be a positive influence on teaching and how it becomes a barrier” (Burril, 2002). Resultaten från denna forskningsöversikt kan sammanfattas i några punkter:

- Lärare använder ofta räknaren i samband med sin vanliga undervisningsmetod utan att anpassa sin undervisning till den nya situationen.
- Att bara informera lärare om hur räknare fungerar ger ingen tydlig förändring av deras undervisning. Det krävs kompetensutveckling och stöd.
- Elever litar på räknaren i hög grad och har en begränsad kritisk analys av resultat.
- Räknarens potential underutnyttjas.
- Elever med räknare använder grafer och utforskar matematik i högre grad än elever utan räknare. De är flexiblare i strategier, med representationsformer och är bekväma med verkliga data.
- Inga tydliga skillnader i elevers förmåga att utföra operationer för hand kan påvisas.

Den sista punkten är intressant eftersom det ofta förs fram som ett argument mot räknare att eleverna blir sämre på att utföra operationer för hand.

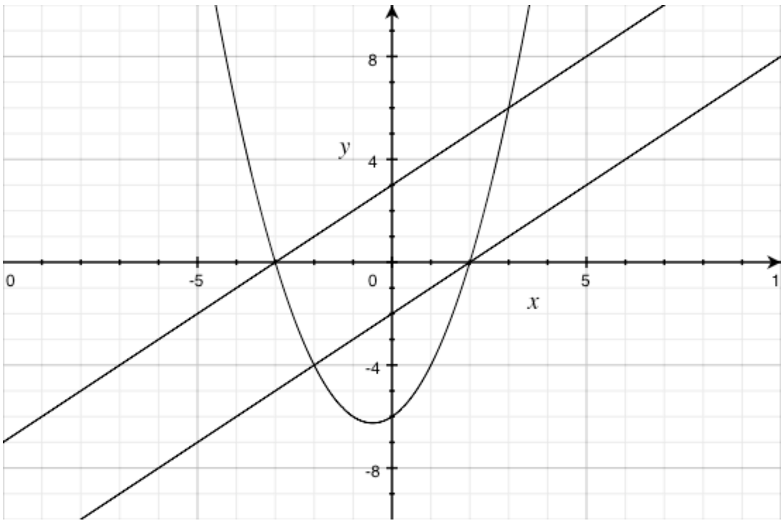
Min egen forskning

Delar av min forskning har fokuserat på elevers användning av grafräknare (Bergqvist, 1999). I en studie ville jag se om räknaren kunde underlätta för elever att ta till sig ett relativt svårt begrepp. Jag lät elever arbeta i par med faktorsatsen. Denna sats uttrycks matematiskt på detta sätt:

$$p(x) = (x - a) \cdot q(x) \Leftrightarrow p(a) = 0$$

Det betyder från vänster till höger att om polynomet *p(x)* har faktorn *x-a* så är *a* ett nollställe till polynomet. Eftersom det är en ekvivalens gäller detta också från höger till vänster, dvs. att om *a* är ett nollställe till polynomet så har polynomet faktorn *x-a*. Den senare varianten, från höger till vänster, uppfattas ofta av elever som betydligt svårare att förstå. Syftet med denna studie var att se om eleverna kunde ta till sig begreppet lättare med hjälp av visualiseringar på en grafräknare.

Eleverna fick följande uppgift: ”Om *f(x) och g(x) är förstagradspolynom, hur kan då f(x) och g(x) se ut om* $f(x)\cdot g(x) = x^2 + x - 6$*?* De provade sig fram och hittade att f(x) = (x+3) och g(x) = (x-2) uppfyllde likheten. Eleverna blev då uppmanade att rita både produkten och de linjära funktionerna på grafräknaren.



De kunde då se att de räta linjerna skar parabeln i nollställena. De insåg också att eftersom $x^2 + x - 6 = (x+3)\cdot(x-2)$ så gäller att om -3 är ett nollställe till högerledet så är -3 också ett nollställe till vänsterledet. Slutsatsen var att man kan använda parabelns nollställen för att hitta de räta linjerna. Denna slutsats är i princip samma sak som att använda faktorsatsen från höger till vänster.

Den avslutande uppgiften till eleverna var att skriva en instruktion hur man faktoriserar ett andragradspolynom (med koefficienten 1 framför x^2-termen). Så här såg ett elevpars svar ut:

1. Ta reda på nollställena (Med hjälp av miniräknare el genom att lösa andragradsekvationen)
2. Fall 1: Två nollställen a och b.
   Då kan p(x) skrivas $(x - a)(x - b)$
   Fall 2: Ett nollställe (dubbelrot) a.
   Då kan p(x) skrivas $(x - a)^2$
   Fall 3: Inga nollställen. p(x) kan inte faktoriseras med reella tal

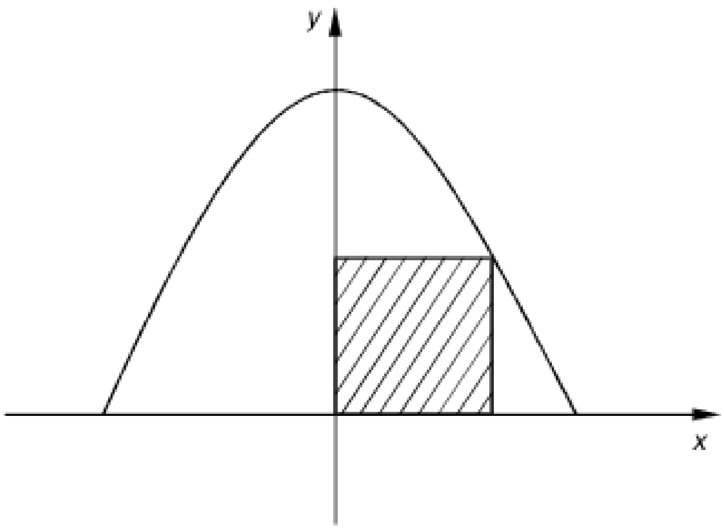
Eleverna har alltså insett att man kan använda ett polynoms nollställen för att faktorisera det, vilket är innbörden i faktorsatsen.

Vilken är då räknarens roll i denna situation? Visserligen hade allt hade ju kunnat göras för hand, men detta är orealistiskt på grund av tidsapekten. Eleverna fascination vid upptäckandet av sambanden var mycket tydliga. När graferna kommer fram för ett elevpar säger en av eleverna ”Opp! Nollpunkterna!” Detta är ett intressant exempel på ett elevaktivt undersökande arbetssätt, något som den tidigare nämnda forskningsöversikten pekar på som en av de stora möjligheterna när elever arbetar med grafräknare.

Symbolhanterande räknare

År 2002 genomfördes på skolverkets uppdrag ett projekt med mål att bl.a. utreda vad som skulle kunna hända om gymnasieelever får använda symbolhanterande räknare på de nationella proven i matematik (Bergqvist, 2002). I projektet MatBIT (Matematisk Begreppsbildning och IT) analyserades ett antal uppgifter från tidigare givna nationella prov utifrån att eleverna har symbolhanterande räknare i stället för grafräknare. De svenska proven är uppdelade i två delar, en räknarfri del och en del där räknare förutsätts. Resultatet från analysen visar att det på de flesta uppgifter inte spelar någon roll vilken av de två räknartyperna som eleverna har. Där det skulle påverka handlar det om proceduruppgifter som kan flyttas till den räknarfria delen av provet. Här följer ett exempel på en uppgift:

13 Figuren visar en kvadrat och grafen till en funktion. Välj en trigonometrisk funktion vars graf liknar den i figuren och bestäm kvadratens area för den funktion du valt. (3p)



Uppgiften går ut på att eleven ska sätta upp ett samband, t.ex. $\cos(x) = x$. Denna ekvation kan enkelt lösas av en symbolhanterande räknare. Det går också att lösa den på en grafräknare, men inte lika enkelt eller självklart. Trots detta ansåg den expertgrupp som analyserade uppgifterna att skillnaden mellan räknarna enbart skulle ha en marginell påverkan på resultatet eftersom den största svårigheten med uppgiften är att ta fram ekvationen. Slutsatsen var alltså att eftersom de nationella proven i stor utsträckning fokuserar på matematiska resonemang och förståelse så påverkar inte typen av räknare resultaten i någon nämnvärd utsträckning. Man markerar i rapporten också att om man vill konstruera prov som förutsätter symbolhanterande räknare och verkligen testar elevers förmåga att använda dem på ett relevant sätt så blir uppdraget betydligt svårare.

När det gäller lärarproducerade prov är möjligen situationen annorlunda. Palm, Boesen och Lithner (2005) visar i sin studie att lärarproducerade prov i jämförelse med de nationella proven i betydlig större utsträckning fokuserar på att använda metoder och algoritmer. Man måste då som lärare reflektera över frågan vad symbolhanterande räknare kan betyda för de egna proven.

Projektet MatBIT föreslår i sin rapport att symbolhanterande räknare bör bli ett tillåtet hjälpmedel på de nationella proven i gymnasieskolans matematikkurser. Proven bör även i fortsättningen vara två delade.

Frågor att fundera över

Jag kommer inte att skriva någon diskussion om detta. Mitt mål är inte att presentera vad jag själv tycker och anser. Mitt mål är att få dig som läsare att börja reflektera över frågor som har med räknare och matematikundervisning att göra. Därför avslutar jag med ett antal frågor som jag hoppas att du tar med dig hem.

- Kan du använda mobiltelefonen som räknare?
- Vad betyder ”att ha vana vid”?
- Vad innebär ”hjälpmedelskompetens”?
- Hur kan du få tag på och dra nytta av forskningsresultat?
- Hur fungerar räknaren i din undervisning?
- Vad skulle hända om dina elever började använda symbolhanterande räknare?
- Vad händer när bärbara datorer bli en normal del av matematikundervisningen?

Referenser

SOU 2004:97 *Att lyfta matematiken – intresse, lärande, kompetens.* Statens offentliga utredningar, 2004.

Burril, G. *Handheld Graphing Technology in Secondary Mathematics.* Michigan State University and Texas Instruments.

Bergqvist, T. Gymnasieelever undersöker ett matematiskt begrepp med grafräknare. *Nordic Studies in Mathematics Education,* 7, 35-60, 1999.

Bergqvist, T. *MatBIT, Matematisk begreppsbildning och IT.* Enheten för Pedagogiska mätningar, Umeå unversitet. Nr 176, 2002.

Palm, Boesen and Lithner: The requirements of mathematical reasoning in upper secondary level assessments. Research Reports in Mathematics Education, Department of Mathematics, Umeå university, Nr 5 2005.

Tor Andersen

Lektor i videregående skole siden 1972 med fagene matematikk, fysikk og pedagogikk. Har vært særlig opptatt av bruk av IKT i matematikk og er for tiden medlem av en IKT-nemnd som blant annet utarbeider IKT-tilpassede eksamensoppgaver i matematikk for videregående skole. For tiden ansatt som forsker ved matematikksenteret på NTNU i Trondheim.

Fra funksjon til Taylor-rekke og fra potensrekke til sum - i et digitalt miljø.

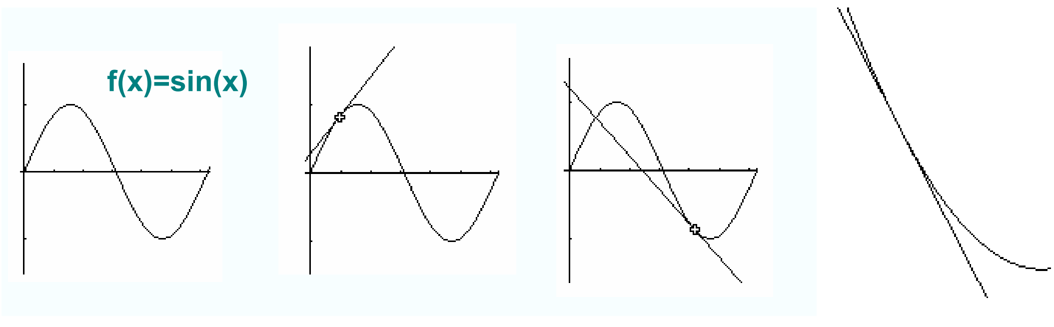
Sitat fra brev - Niels H. Abel til B.M. Holmboe:
Divergente Rækker ere i det Hele noget Fandenskap, og det er en Skam at man vover at grunde nogen Demonstrasjon derpaa.

Ville Abel ha sagt det samme med en PC i ryggsekken?

Vi finner Taylor-polynomet.

Hva vet vi?
Tangenten til grafen y = f(x) i punktet a er den rette linjen som smyger seg best inntil grafen i nærheten av a.

Eksempel: $f(x) = \sin(x)$



Er vi tilstrekkelig nær a, er det nesten umulig å se forskjell på grafen og tangenten. Et stykke unna er forskjellen stor.

Tangenten smyger seg godt inntil grafen fordi den har samme funksjonsverdi og stigningstall i a som grafen selv.

Kan vi finne en kurve av andre grad som følger grafen bedre enn tangenten?

Hvis vi kunne finne en andregradskurve som krummet like mye som grafen i a, ville den følge grafen bedre enn tangenten.

Vi er altså på jakt etter et andregardespolynom som har samme

- funksjonsverdi
- førstederivert
- andrederivert

som den opprinelige grafen.

En generell andregradsfunksjon er på formen $g(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2$
der c_0, c_1 og c_2 er konstanter.

Vi får at:

$$g'(x) = c_1 + 2c_2(x-a)$$

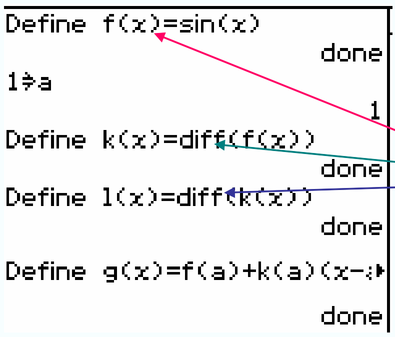
$$g''(x) = 2c_2$$

$$g(a) = c_0 \qquad g'(a) = c_1 \qquad g''(a) = 2c_2$$

$$c_0 = f(a) \qquad c_1 = f'(a) \qquad c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

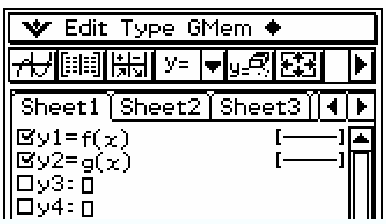
$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

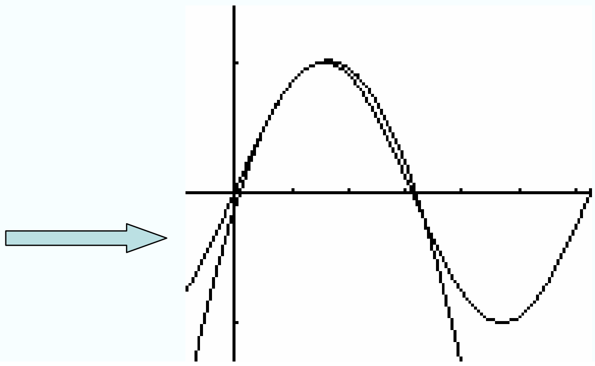
Eksempel: $f(x) = \sin(x)$



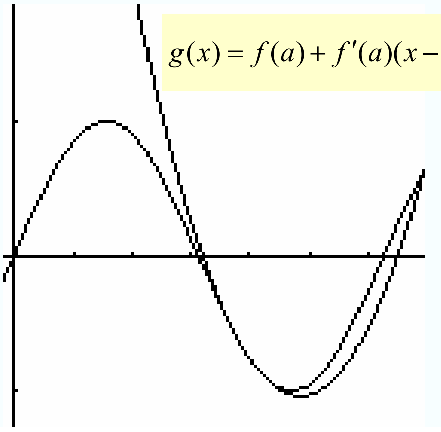
$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$

Define g(x)=f(a)+k(a)(x-a)+((l(a))/(2))(x-a)^(2)

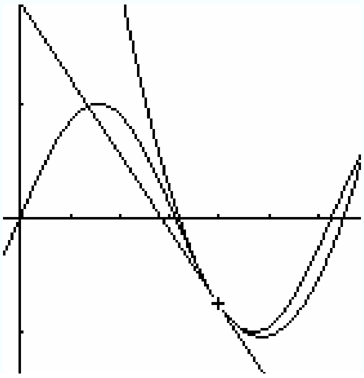




```
Define f(x)=sin(x)
                     done
4⇒a
                        4
Define k(x)=diff(f(x))
                     done
Define l(x)=diff(k(x))
                     done
Define g(x)=f(a)+k(a)(x-a▸
                     done
```



$$g(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2$$



Andregradskurven gir en langt bedre tilnærmelse enn tangenten.

Generalisering.

Ideen er lett og generalisere.
n-te gradspolynomet som passer best til grafen y=f(x) i nærheten av a, er det som har den samme funksjonsverdien og de samme n første deriverte som f i punktet a.

$$h(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \ldots + c_n(x-a)^n \,.$$

Vi må bestemme koeffisientene $c_0,\ c_1,\ c_2,\ldots,c_n$.

$$h'(x) = c_1 + 2c_2(x-a) + 3c_3(x-a)^2 + \ldots + nc_n(x-a)^{n-1}$$

$$h''(x) = 2c_2 + 2\cdot 3c_3(x-a) + \ldots + (n-1)nc_n(x-a)^{n-2}$$

$$h'''(x) = 2\cdot 3c_3 + 2\cdot 3\cdot 4c_4(x-a) + \ldots + (n-2)(n-1)nc_n(x-a)^{n-3}$$

$$h^{(k)}(x) = k!c_k + 2\cdot 3\cdot 4\cdot \ldots .kc_{k+1}(x-a) + \ldots + (n-k+1)(n-k+2)\ldots nc_n(x-a)^{n-k}$$

$$\vdots$$

$$h^{(n)}(x) = n!c_n$$

Setter vi inn $x = a$ får vi at:

$$h(a) = c_0,\ h'(a) = c_1,\ h''(a) = 2c_2,\ h'''(a) = 6c_3, \ldots,\ h^{(k)}(a) = kc_k, \ldots, h^{(n)}(a) = n!c_n$$

$$c_0 = f(a)$$

$$c_1 = f'(a)$$

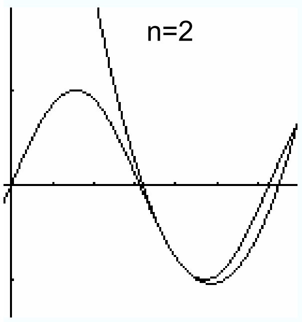
$$c_2 = \frac{f''(a)}{2}$$

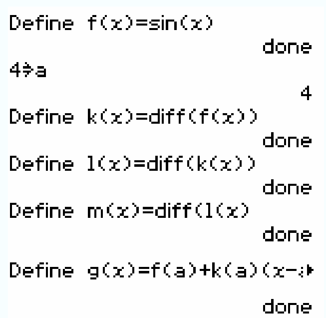
$$c_3 = \frac{f'''(a)}{6}$$

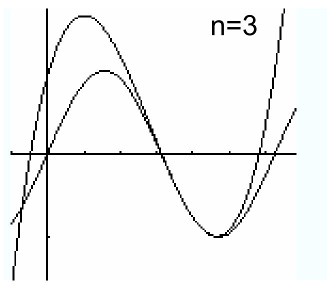
$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$$

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$$

$$h(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$







Define g(x)=f(a)+k(a)(x-a)+((l(a))/(2))(x-a)^(2)+((m(a))/(6))(x-a)^(3)

Anta at f er n ganger deriverbar i punktet a. Da er polynomet

$$h(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2 + \frac{f'''(a)}{6}(x-a)^3 + \ldots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

det eneste n-te gradspolynomet som har samme funksjonsverdi og de samme n første deriverte som f i punktet a.

Polynomet ovenfor kaller vi Taylor-polynomet til f av n-te grad. Vi skriver

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

Brook Taylor

1685-1731

$$T_n f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

egentlig

$$T_n f(x;a) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

For å markere hvilket punkt vi utvikler rundt.

Maclaurin-rekke.

Colin Maclaurin (1698-1746)

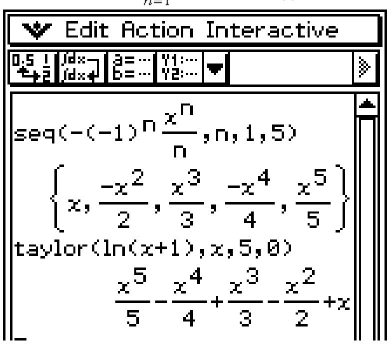
Spesialtilfelle: $a = 0$

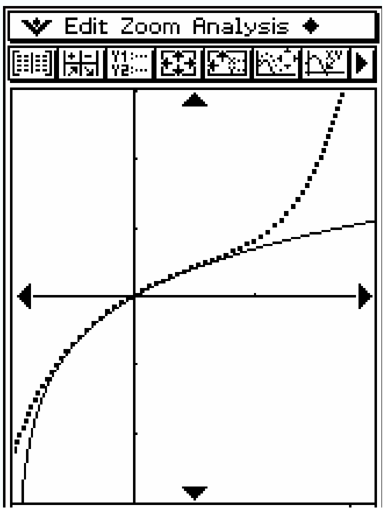
$$T_n f(x;0) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!}x^k$$

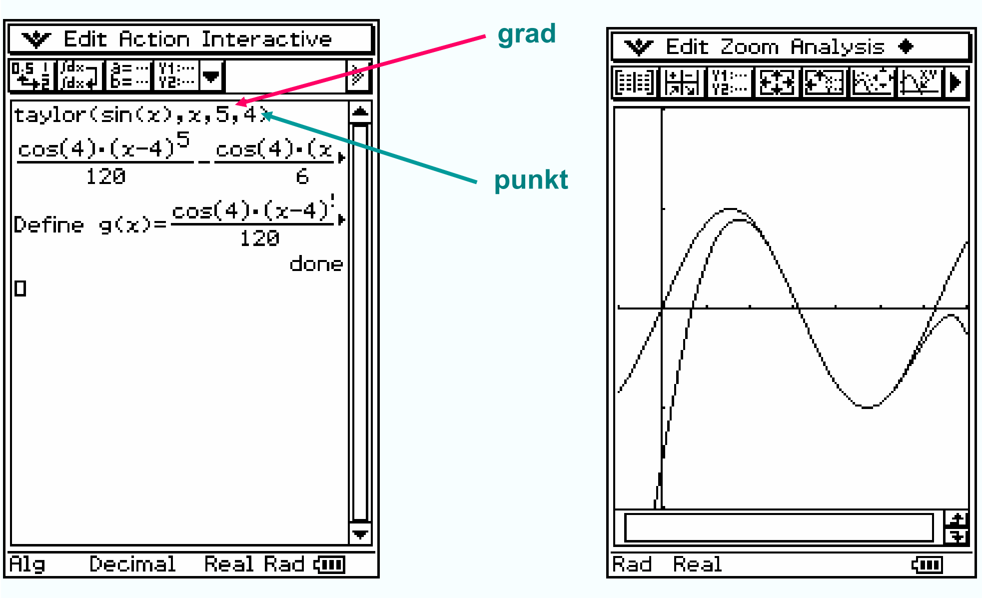
Eksempel: Maclaurin-rekke for $f(x) = \ln(x+1)$ og $f(x) = \sin(x)$

Vi verifiserer på ClassPad 300 at Maclaurinrekken for $f(x) = \ln(x+1)$ kan uttrykkes som

$$\ln(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} (-(-1)^n \frac{x^n}{n}) \quad , \quad -1 < x \le 1 .$$



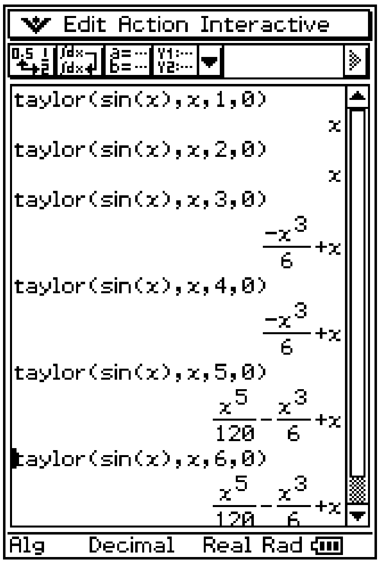


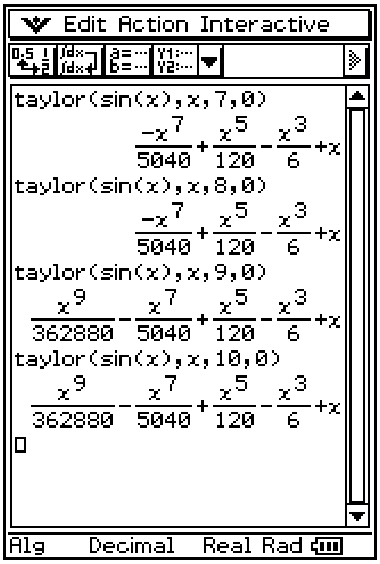


Taylor-polynomene til f(x)=sin(x) om punktet 0.

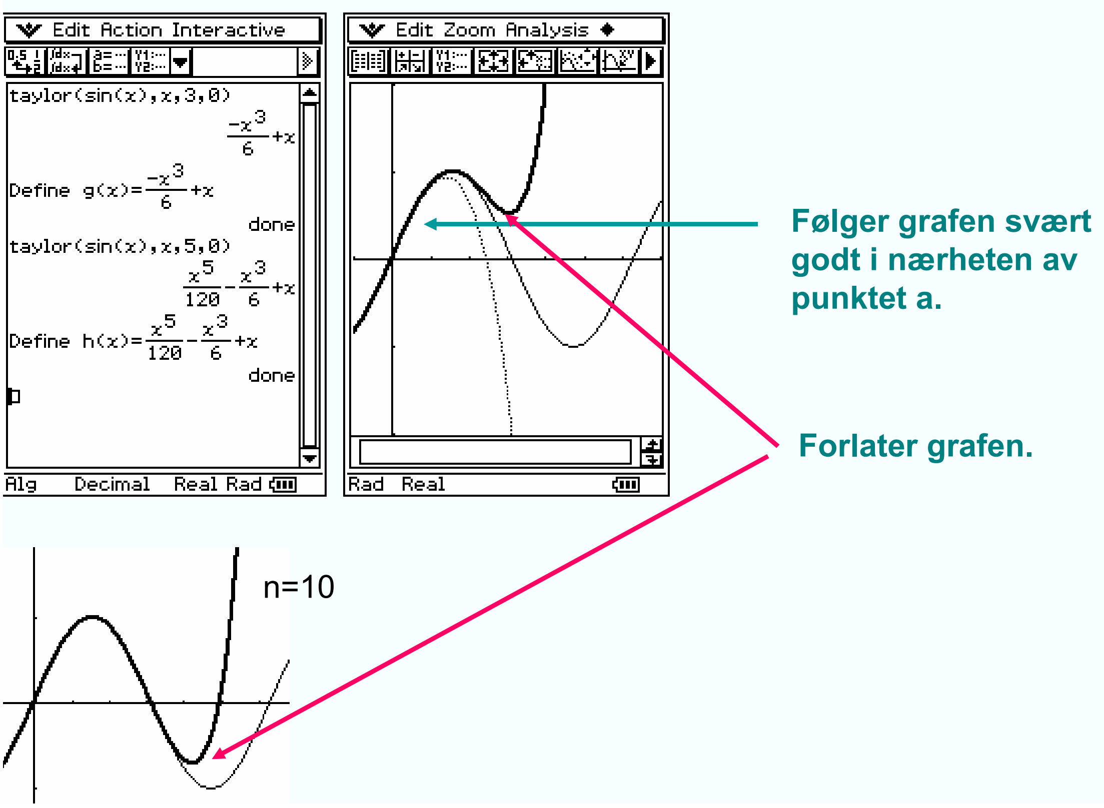
$$
\begin{aligned}
&f(x) = \sin x && f(0) = \sin 0 = 0 \\
&f'(x) = \cos x && f'(0) = \cos 0 = 1 \\
&f''(x) = -\sin x && f''(0) = -\sin 0 = 0 \\
&f'''(x) = -\cos x && f'''(0) = -\cos 0 = -1 \\
&f^{(4)}(x) = \sin x && f^{(4)}(x) = \sin 0 = 0
\end{aligned}
$$

Vi er tilbake til utgangspunktet. Derivasjonene begynner å gjenta seg selv. Annenhver derivert er lik null. De andre veksler mellom 1 og -1.



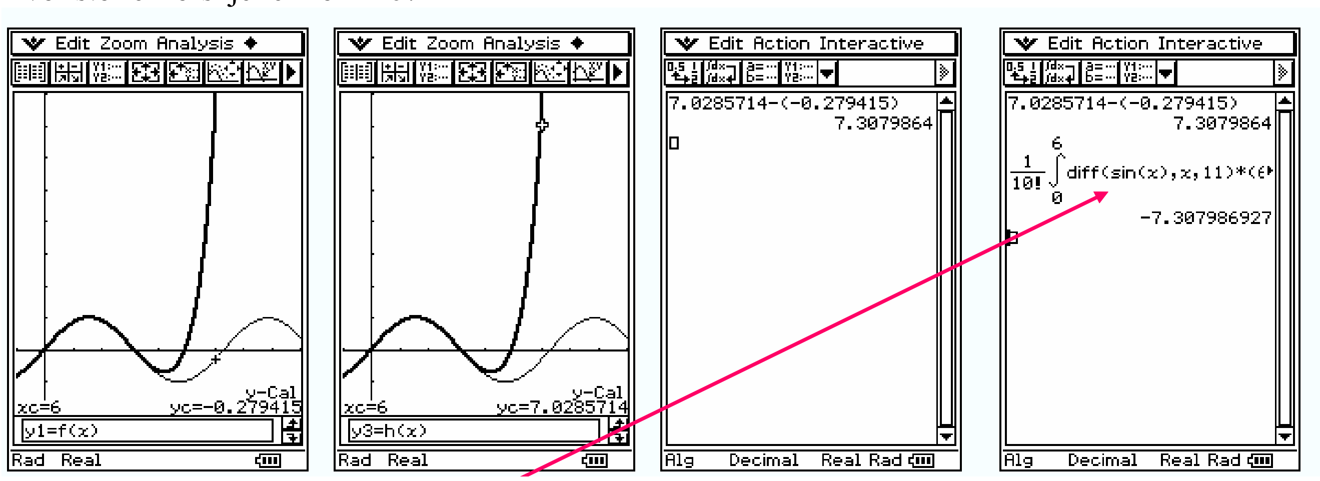


$$T_{2n}\sin(x) = T_{2n-1}\sin(x)$$

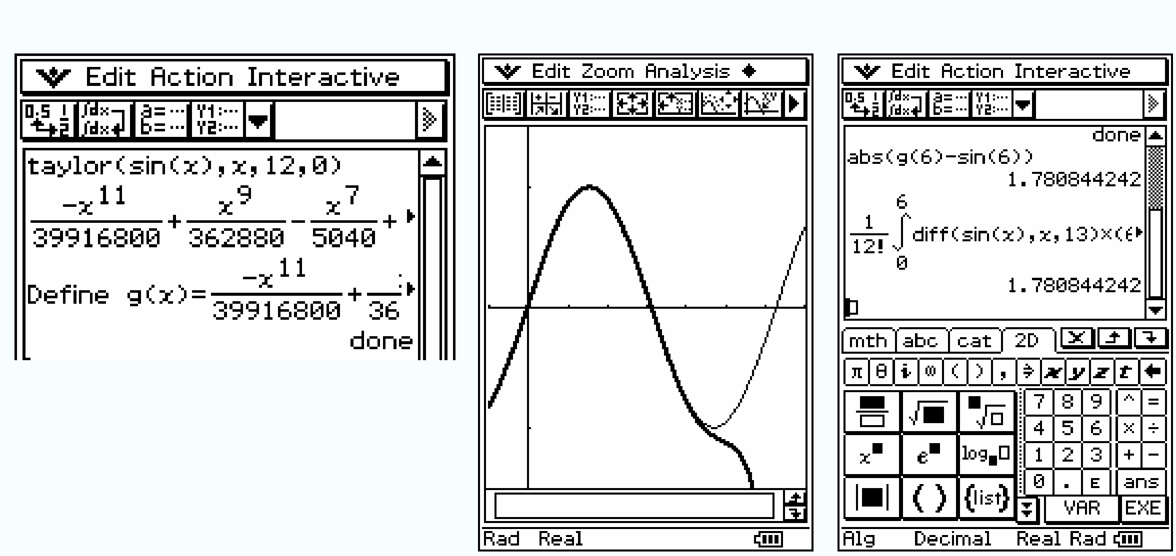


Restleddet

Hvor stor er forskjellen for x=6?



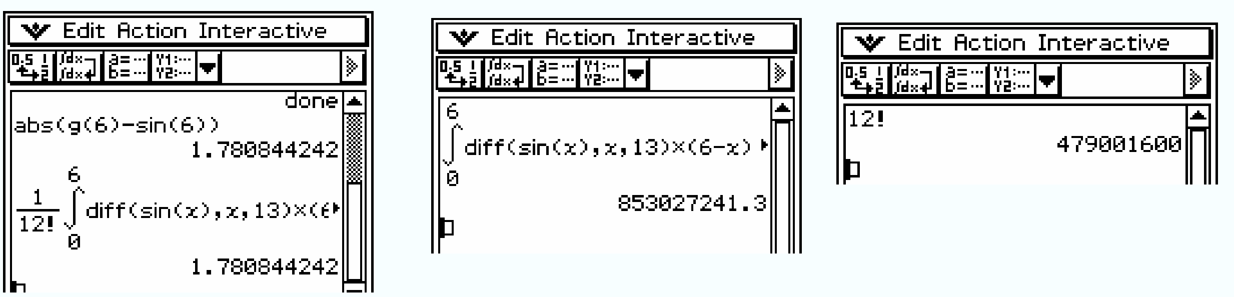
$$\frac{1}{10!}\int_0^6 \mathrm{diff}(\sin(x),x,11)(6-x)^{10}\,\mathrm{d}x$$



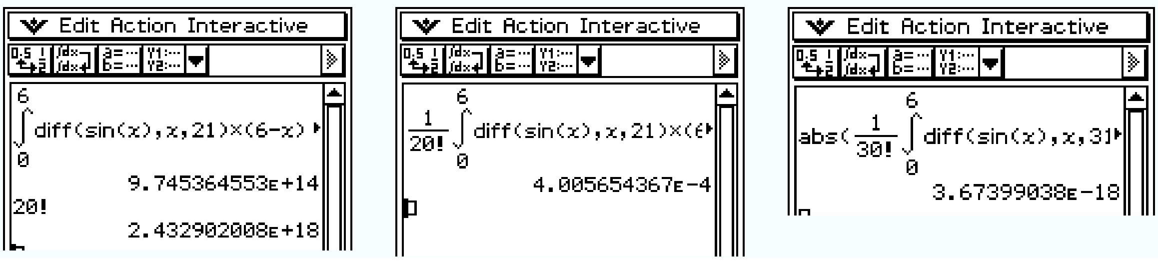
Forskjellen minker betraktelig når *n* øker fra 10 til 12.

Restleddet - generelt: $\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)\mathrm{d}t$

Hva bidrar mest?



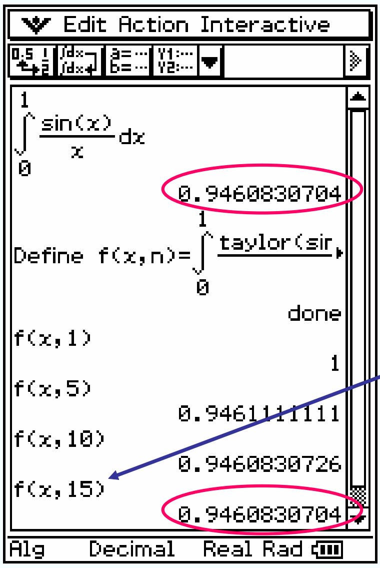
n=20 n=30



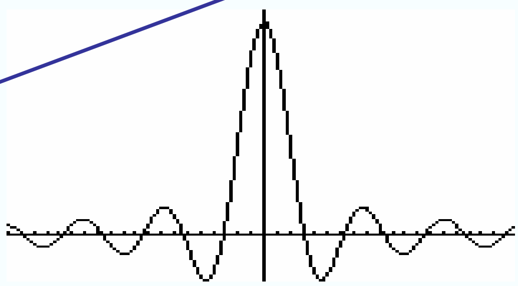
$$\mathrm{m}\left(\frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(t)(b-t)^n\,\mathrm{d}t\right)=0$$

$\to\infty$

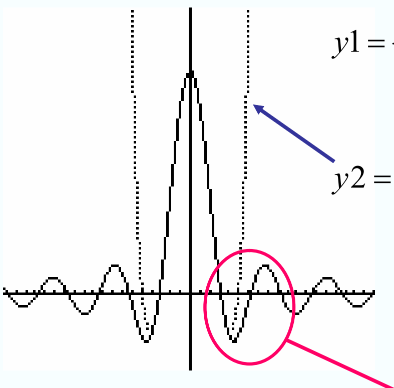
Bestemt integral.



$$f(x,n)=\int_0^1 \frac{\text{taylor}(\sin(x),x,n,0)}{x}\,dx$$

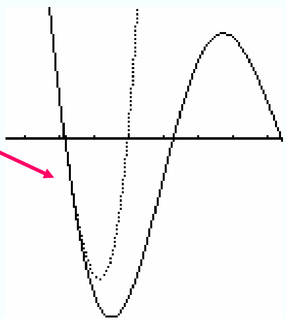


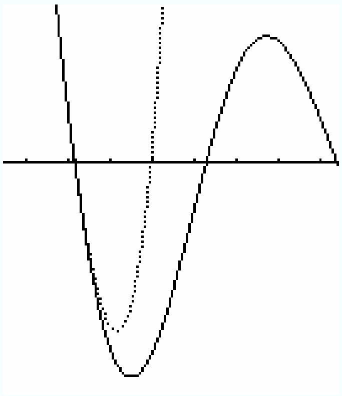
Vi må vite "hvor vi er".

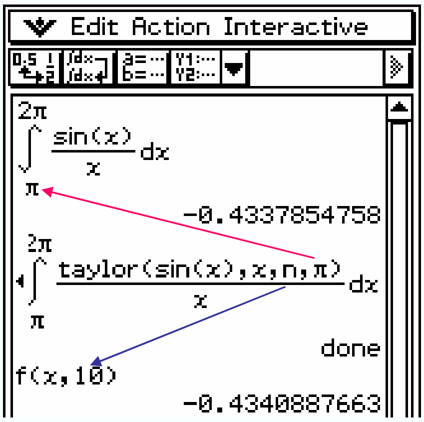


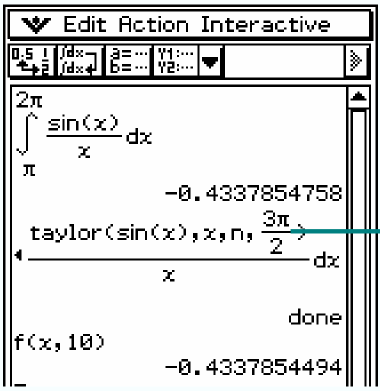
$$y1=\frac{\sin(x)}{x}$$

$$y2=\frac{\text{taylor}(\sin(x),x,10,0)}{x}$$



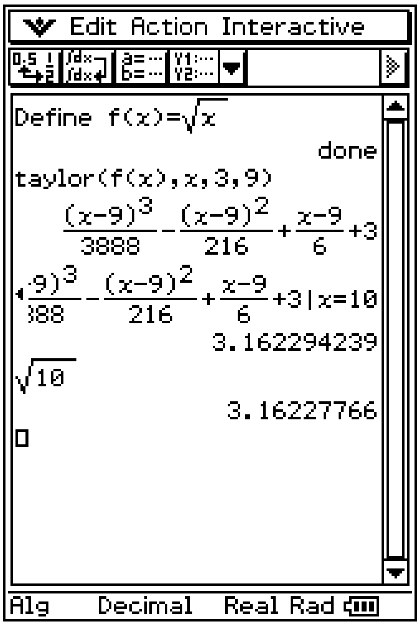


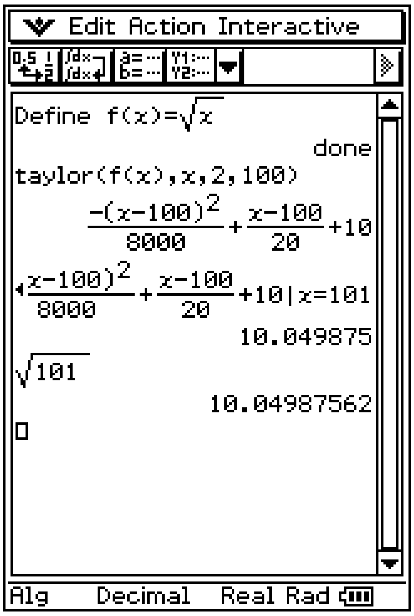


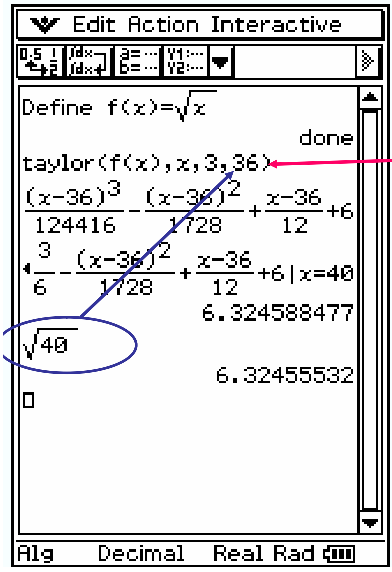


Middelverdien til grenseverdiene.

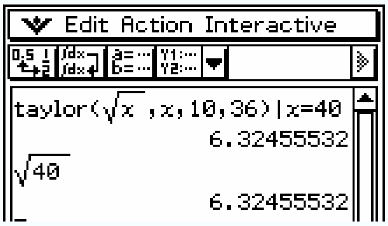
Finne en tilnærmet verdi for kvadratrota av et tall v.h.a. Taylor-polynomet.



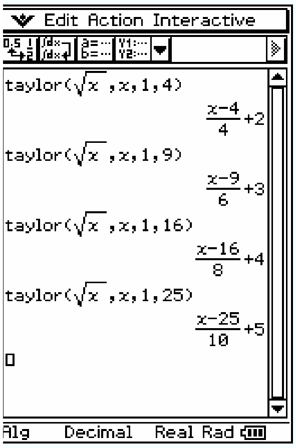




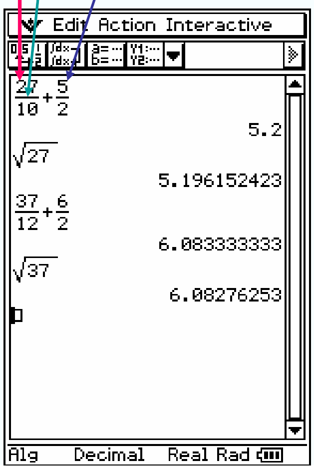
nærmeste kvadrattall mindre enn *x*



Grad 1



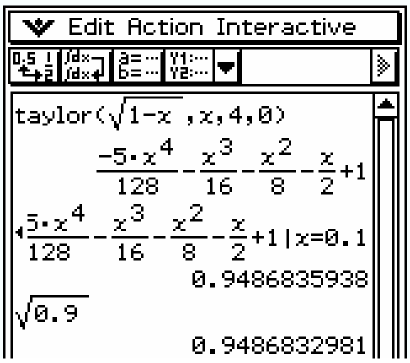
$$\frac{x-a^2}{2a}+a=\frac{x}{2a}+\frac{a}{2}$$



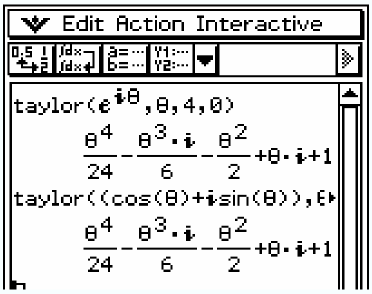
$$\sqrt{x}\approx\frac{x}{2a}+\frac{a}{2}$$

a^2 **er nærmeste kvadrattall mindre enn** x

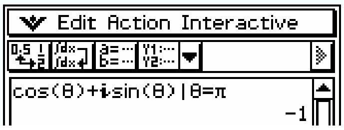
$$x<1$$



i



$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$



Leonhard Euler
(1707 – 1783)

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$\boxed{e^{i\pi} \qquad -1}$$

Fra rekke til funksjon.

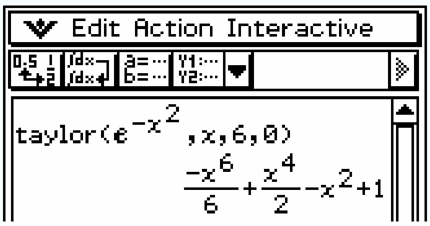
$\sum_{k=0}^{200} \left(\frac{1}{k!}\right)$ 2.718281828	$\sum_{k=0}^{190} \left(\frac{1}{k!}2^k\right)$ 7.389056099	$\sum_{k=0}^{180} \left(\frac{1}{k!}3^k\right)$ 20.08553692
e^1 2.718281828	e^2 7.389056099	e^3 20.08553692

Altså: $$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

Ny rekke fra eksisterende rekke.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$e^{-x^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-x^2)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{k!} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \ldots$$



Finne summen til en potensrekke.

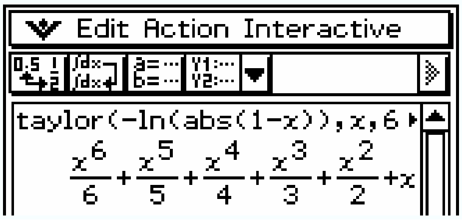
$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ konvergerer for $x \in [-1,1]$

$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ ligner på en geometrisk rekke, men er det ikke…..

$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} x^{n-1}$ er en geometrisk rekke…. $s'(x) = \frac{1}{1-x}$

$s(x) = \int \frac{1}{1-x} \mathrm{d}x = -\ln|1-x| + C \longrightarrow C = 0$

$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} = -\ln|1-x|$



Mette Andresen

Cand. Scient. fra Københavns Universitet med hovedfag i matematik, bifag i kemi. Jeg har været gymnasieadjunkt i en årrække, og er lektorgodkendt til lærerseminarier i matematik. Jeg er ved at færdiggøre min ph.d. afhandling i brug af computer i matematik i gymnasiet, med Morten Blomhøj som vejleder. Nu er jeg ansat som adjunkt i matematikkens didaktik på Danmarks Pædagogiske Universitet, hvor jeg blandt andet underviser i matematik og i matematikdidaktik, fortsætter mit forskningsarbejde indenfor matematikdidaktik og desuden arbejder med læreres professionelle udvikling.

CAS-potentialer realiseret som fleksibilitet i matematiske begreber.

Abstract. En række af de læringsmæssige gevinster som brugen af laptops i højniveau undervisningen i gymnasiet kan give, kan sammenfattes under betegnelsen *fleksibilitet i de matematiske begreber* der arbejdes med. Denne fleksibilitet omfattet både beherskelse af skift mellem forskellige repræsentationer og skift mellem niveauerne i den model for matematisk begrebsdannelse og –udvikling gennem matematisering som danner grundlagt for Realistic Math Education. I artikelen gives eksempler på hvordan brugen af CAS fremmer fleksibiliteten i gymnasieelevers opfattelse af differentialligninger og deres løsning, og omvendt, hvordan fleksibilitet i nogle matematiske begreber sætter eleverne i stand til at udvikle nye problemløsningsstrategier indenfor området.

Indledning.

I det følgende præsenteres mit forsøg på at indfange et potentiale ved brugen af CAS, som er trådt frem gennem arbejdet med mit ph.d.-projekt. Dette potentiale består i at eleverne kan opnå, hvad jeg har valgt at kalde en vis *fleksibilitet* i deres matematiske begreber. Præsentationen falder i tre dele: Første del beskriver i hovedtræk hvordan erfaringer fra, mine observationer af og læreres viden om undervisningspraksis er inddraget i form af data i den proces, der ledte frem til indkredsning af fleksibilitetsbegrebet. Anden del forklarer indholdet i hjælpebegrebet fleksibilitet og begrebets fundering i didaktisk teori. Til slut præsenteres nogle retningslinjer for design af undervisningsforløb, der sigter mod at eleverne opnår fleksibilitet i deres matematiske begreber.

Baggrund og fundering.

Den undersøgelse, der resulterede i opstillingen af det didaktiske hjælpebegreb fleksibilitet, indgår i mit ph.d.-projekt. Ph.d.-projektet blev udført i tilknytning til udviklingsprojektet Matematik og Naturfag i Verdensklasse[2] i perioden 2000-2004. Den del af Verdensklasse projektet, som jeg havde med at gøre, gik ud på at udstyre eleverne på højniveauholdene med bærbare computere til låns i hele forløbet. Lærerne skulle finde ud af hvordan disse computere kunne udnyttes i matematikundervisningen.

[2] Se www.matnatverdensklasse.dk . Projektet er beskrevet i Andresen og Thorslund (2005)

De spørgsmål i Verdensklasseprojektet, som jeg tog udgangspunkt i, var:

- Hvordan støttes elevernes begrebstilegnelse?
- Hvilken forbindelse er der mellem standardrutiner og tilegnelsen af matematiske begreber?
- Hvilken rolle spiller IKT for matematiske modeller og modellering?
- Hvordan indvirker IKT på undervisningsformer og på samspillet mellem lærer og elev?

Undervejs i Verdensklasseprojektet havde jeg sammen med de to del-projektledere foretaget årlige evalueringer (Andresen, M, Pawlik, E. & Winther, A. (2004)). Evalueringerne omfattede gruppeinterviews med alle deltagende lærere og udvalgte grupper af elever. En række erfaringer og udtalelser gik igen i disse interviews og kom, som det fremgår af det nedenstående forskningsspørgsmål, på afgørende måde til at indgå i mine egne undersøgelser i ph.d. projektet. Det drejer sig for eksempel om udtalelser som: "Man kan hurtigt tegne en masse grafer", "Man får bedre overblik fordi det er let at se eksempler" og "Man sidder ikke fast i en masse regnerier, men kan koncentrere sig om tankegangen".

Desuden havde jeg interviewet to grupper højniveau matematik elever fra et gymnasium udenfor Verdensklasseprojektet, som også havde haft bærbare computere i matematik under hele deres forløb. Disse to interviews blev lavet som en generalprøve i forbindelse med evalueringerne, så jeg brugte samme interviewguide. Inddragelse af interviewene som baggrundsmateriale i ph.d. projektet gav mig mulighed for at vurdere om der eventuelt kunne tænkes at være iøjnefaldende forskelle på "computer elever" i og udenfor Verdensklasse projektet, for eksempel forskelle i elevernes attitude til det at bruge computer ved løsning af matematikopgaver eller i deres måde at bruge computeren på.

Som indledning til ph.d. projektet gennemførte jeg observationer i en 3.g højniveau klasse, også udenfor Verdensklasseprojektet. Klassen blev undervist i differentialligninger i to omgange med et par måneders mellemrum. Første behandling af emnet fulgte den traditionelle fremstilling af differentialligninger som algebraiske ligninger hvor den variable er en funktion. I denne traditionelle fremstilling løses ligningerne analytisk og behandlingen koncentreres oftest om det lille antal simple ligninger hvis analytiske løsning er kendt eller kan findes ved hjælp af metoden "separation af de variable" eller ved simpel integration. Anden behandling af emnet var baseret på numeriske løsningsmetoder og på brug af CAS-regneren Voyage200 fra Texas Instruments. I dette forløb skulle eleverne gruppevis udarbejde en projektlignende opgave med undersøgelse af en simpel differentiallignings model. Klassens lærer havde selv udarbejdet undervisningsmateriale til begge de to delforløb. Jeg interviewede et udvalg af elever fra klassen om deres oplevelse af hele forløbet, som de reagerede meget positivt på. Fra mit synspunkt var formålet med denne indledende undersøgelse at indkredse parametre, som jeg fandt interessante og relevante for min hovedundersøgelse af brugen af computer til undervisning i differentialligninger i Verdensklasse projektet.

Mine teoretiske studier af matematikkens didaktik, som startede nærmest helt fra grunden da jeg begyndte på projektet, har naturligvis også indvirket på hele projektets forløb.

Som den fjerde kilde til input til ph.d. projektet, foruden evalueringsinterview'ene, de to gruppeinterviews med "fremmede" elever og forundersøgelsen, har jeg hele tiden været fast besluttet på at bruge mine personlige erfaringer gennem en del år med såvel matematiklæring som matematikundervisning. For eksempel har jeg på intet tidspunkt villet indlemme teorier eller konklusioner, der var i modstrid med min almindelige sunde sans som tidligere matematikstuderende eller som lærer i gymnasiet, på læreruddannelsen og på diverse kurser for voksne.

Både under mine observationer af selve undervisningen og i behandlingen af data har jeg haft stor glæde af mit grundige kendskab til det københavnske gymnasiemiljø.

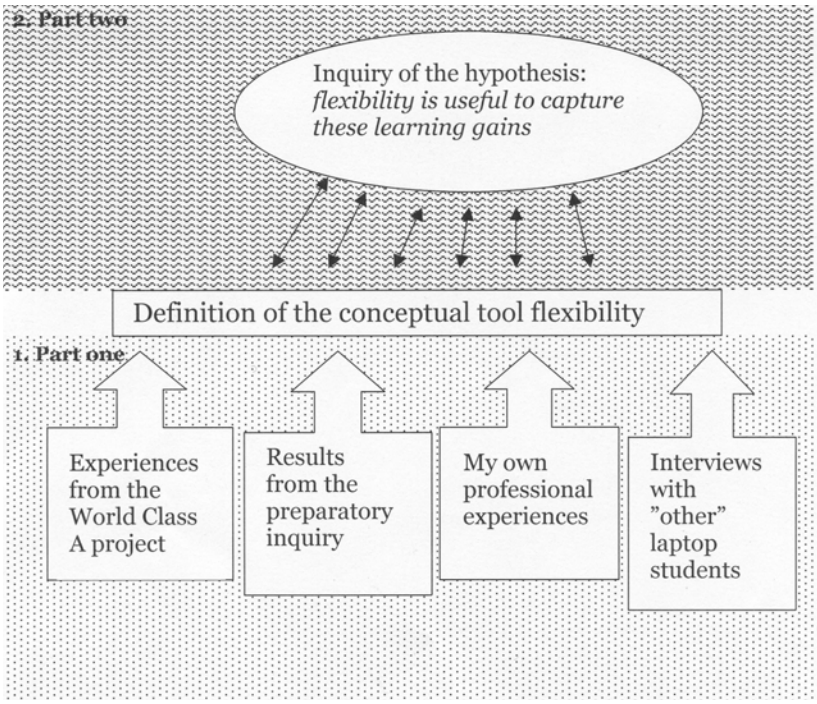
Forskningsspørgsmålet og hjælpebegrebet fleksibilitet.

Indenfor det problemfelt Verdensklasseprojektet havde udstukket valgte jeg at formulere følgende forskningsspørgsmål for ph.d. projektet:

> *Hvordan kan de potentialer for bedre læringsudbytte ved computerbaseret matematikundervisning, som deltagerne i Verdensklasse projektet har oplevet og som for eksempel kan udtrykkes som "bedre overblik og dybere forståelse", på en brugbar måde indfanges og konceptualiseres?*

Det vil sige, at mit mål med projektet var at trække nogle retningslinjer ud af erfaringerne fra Verdensklasse projektets undervisningseksperimenter, som skulle kunne bruges af matematiklærere ved undervisningens tilrettelæggelse. Samtidig ville jeg også knytte didaktisk teori til erfaringerne så disse retningslinjer kunne få en generel værdi og anvendelighed. Endelig ville jeg forsøge at uddrage en teoretisk "essens" af hele arbejdet for på den måde at bidrage til den videre udvikling af den matematikdidaktiske teoribygning.

Som et bud på hvordan potentialerne kunne indfanges opstillede jeg definitionen på et nyt didaktisk hjælpebegreb, *fleksibilitet* i matematiske begreber. Denne introduktion markerede overgangen til en ny fase i projektet, hvis todelte struktur er illustreret i følgende figur:



1. Ph.d. projektets opbygning

Det definerede hjælpebegreb fleksibilitet er en samlebetegnelse for en række mentale matematiske aktiviteter, som falder i to grupper. Den ene gruppe består af skift mellem fire udvalgte *repræsentationer*, nemlig skift mellem *grafisk* repræsentation, *analytisk* repræsentation eller formelt sprog, *naturligt sprog* og *teknisk* repræsentation eller computersprog. Skift mellem repræsentationer indgår i begrebet fleksibilitet i overensstemmelse med den almindelige erfaring, at det virker fremmende for elevernes forståelse for eksempel at supplere med en graf eller få eller give en forklaring med egne ord. Den anden gruppe er skift af *perspektiv* indenfor en række sæt af komplementære perspektiver, som er angivet nedenfor. Perspektivskift indgår i begrebet fleksibilitet fordi det er en aktivitet, som dels virker fremmende for begrebsdannelse i almindelighed[3], og dels fordi de kan bruges til at knytte an til matematisk begrebsdannelse gennem modellering i overensstemmelse med teorien for Realistic Mathematics Education[4], som jeg har valgt delvist at basere ph.d. projektet på.

Definitionen af hjælpebegrebet fleksibilitet ser sådan ud:

Definition:

Fleksibiliteten i et givet matematisk begreb hos en person er totaliteten af de skift af perspektiv på, og de skift mellem forskellige repræsentationer af dette matematiske begreb, som personen magter.

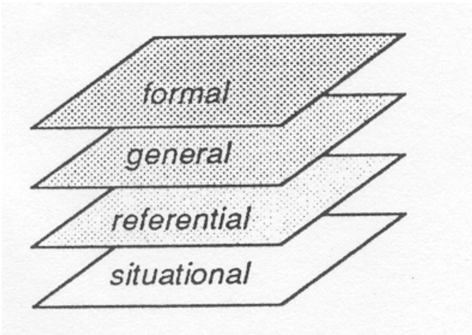
De perspektiver og repræsentationer der refereres til i definitionen er beskrevet og forklaret i det følgende. Man skal lægge mærke til, at fleksibiliteten i et matematisk begreb beskriver en kognitiv kvalitet eller, om man vil, et mentalt potentiale hos den pågældende person i en givet sammenhæng. Selve fleksibiliteten er derfor ikke tilgængelig for undersøgelse men må studeres gennem sine udtryk.

Indholdet i hjælpebegrebet fleksibilitet

Skift mellem repræsentationer: Som nævnt ovenfor, har jeg udvalgt de tre gængse repræsentationer grafisk, analytisk og naturligt sprog. Desuden er teknisk repræsentation taget med som en fjerde, overlappende repræsentation. Betegnelsen repræsentation skal forstås i en bred forstand som kommunikationsmedie. Som følge af at mit arbejde teoretisk baserer sig på et konstruktivistisk læringssyn skelnes der ikke i definitionen mellem intern og ekstern repræsentation[5].

Perspektivskift: De perspektiver som er medtaget i definitionen af hjælpebegrebet fleksibilitet er ordnet i komplementære par. Perspektiv parrene er ikke tænkt som en dækkende opremsning af alle mulige skift af perspektiver på matematiske begreber, og jeg har heller ikke forsøgt at lave en kategorisering af perspektiver.

Idéen er at parrene skal kunne bruges som byggeklodser til design af læringsforløb op gennem niveauerne i Koeno Gravemeijers fire-niveau model af matematiske begrebers dannelse (Gravemeijer 1997 p 340):



2. Matematisk begrebsdannelse gennem modellering

[3] Se for eksempel Ackermann (1990).
[4] Beskrevet i Gravemeijer (1994).
[5] Denne skelnen ligger i det traditionelle repræsentationssyn der for eksempel findes hos J. Kaput og G. Vergnaud: Se Kaput (1989) og Vergnaud (1997)

- Fra ”virkelighed” på situeret niveau til ”model” på referentielt niveau,
- Fra ”model af” på referentielt niveau til ”model for” på generelt niveau.
- Den sidste opstigning fra generelt niveau til formelt niveau i modellen sker over længere tids arbejde med matematik i en egnet sammenhæng.

Desuden skal parrene kunne bruges til design af forløb hvor der fra et didaktisk synspunkt skelnes mellem *eksplorativt* elevarbejde i betydningen udforskning af en given sammenhæng eller matematisk udtryk, overfor *ekspressivt* elevarbejde i betydningen selvstændigt udtryk eller formulering af matematisk indhold.

- Det *eksplorative* arbejde kan knyttes til situationer hvor eleven skaffer sig ”viden for at vide”, altså *epistemisk viden.*
- Det *ekspressive* arbejde kan knyttes til situationer hvor eleven skaffer sig viden med en bestemt anvendelse eller et bestemt resultat for øje. Denne form for viden kan kaldes *pragmatisk viden.*

Denne skelnen mellem dannelse af epistemisk henholdsvis pragmatisk viden er grundlæggende i den del af den teoretiske baggrund for mit projekt, som vedrører det at lære (sig) at bruge en computer eller et andet redskab i matematik. Teorien kaldes ”Instrumental genesis” og er for eksempel beskrevet i (Artigue 2002) og i (Drijvers 2003). En hovedpointe i denne teori kan forklares som, at begge de to typer viden skal tilvejebringes gennem de to ”tilhørende” måder at arbejde på. I definitionen af hjælpebegrebet fleksibilitet giver denne skelnen sig udtryk i en opdeling af perspektivparrene i to grupper. Den tredje gruppe, der falder lidt udenfor, omhandler skift af internt matematisk perspektiv. Min begrundelse for at udskille disse er at give mulighed for at tænke på mikro-niveau i modsætning til sammenhængs- eller model niveau. *Lokalt* henholdsvis *globalt* perspektiv giver modsætningen mellem en samling objekter og det enkelte element. *Generelt* og *specifikt* perspektiv refererer til gyldighedsområdet og *analytisk* perspektiv overfor *konstruktivt* er for eksempel velkendt fra geometri hvor perspektivparret indfanger modsætningen mellem at måle længden af et givet linjestykke henholdsvis at konstruere et linjestykke med et givet mål. Perspektiv-parrene er:

- Dualiteter af internt matematiske perspektiver:
  - Lokalt og globalt perspektiv
  - Generelt og specifikt perspektiv
  - Analytisk og konstruktivt perspektiv

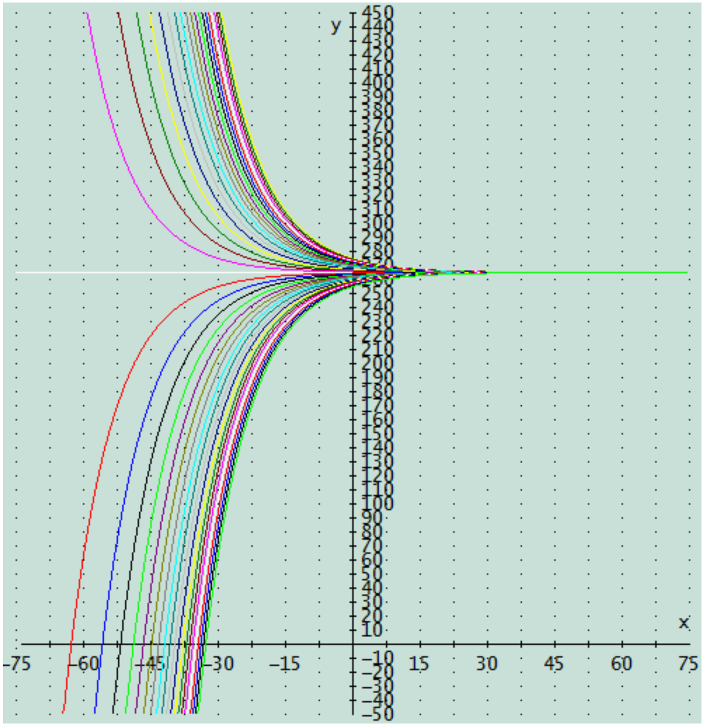
- Perspektivpar, med henblik på konstruktion af epistemisk viden:
  - Proces og objekt perspektiv
  - Situeret og dekontekstualiseret perspektiv

- Perspektivpar, med henblik på konstruktion af pragmatisk viden:
  - Redskab og objekt perspektiv
  - Model og virkelighed perpsektiv
  - ”Model af” og ”model for” perspektiv

Eksempler på hvad fleksibilitet kan give eleven

1. Eksempel

I én af de cases[6], som analyseres i min ph.d. afhandling, arbejdede en gruppe elever med en projektopgave der omfattede differentialligningen $\frac{dC}{dt} = 0.1(265 - C)$. Ligningen skulle forstås som model for cholesterolniveauet i kroppen hos en fiktiv person i en fremadskridende fortælling. Eleverne blev ledt gennem en undersøgelse af denne model, ved hjælp af opgavens spørgsmål. De skulle i den pågældende case blandt andet finde den generelle løsning til differentialligningen, og derefter den specifikke løsning svarende til C(0)=180. Casen sluttede med at eleverne bestemte eleverne ligevægtspunktet. I casen er det beskrevet, hvordan eleverne ud fra et generelt, analytisk udtryk for løsningen til differentialligningen, som de fandt i formelsamlingen, genererede en familie af specifikke løsninger, tegnede graferne for løsningerne og fandt ligevægtspunktet ved at aflæse en fælles asymptote for familien af grafer.



3. En familie af løsningskurver

Analysen af denne case i fleksibilitets-termer viser, hvordan skiftene mellem lokalt og globalt perspektiv, generelt og specifikt perspektiv og skift til og fra grafisk repræsentation fremmer elevernes arbejdsproces. Endvidere viser analysen hvordan elevernes forståelse af begrebet ligevægtspunkt gror frem gennem deres brug af den fælles teknik de har udviklet til at angribe den pågældende type problemer. Det er en pointe i analysen af denne og tilsvarende cases i afhandlingen, at skiftene i begge retninger mellem redskabs perspektiv og objekt perspektiv på den måde fremmer elevernes forståelse.

[6] Case 2 kapitel 9

2. Eksempel

Det viste sig, at nogle elever havde udviklet en speciel CAS-baseret strategi for at få hul på en opgave. Disse elever startede med at skaffe sig et lyn-overblik over opgavens indhold og muligheder ved at tegne en eller flere grafer, hurtigt finde løsninger til ligninger eller foretage nogle uovervejede beregninger, ikke som resultat af dybere overvejelser men snarere lidt på må og få. Eleverne benyttede denne strategi til at skaffe sig den første information om sammenhænge og for at finde ledetråde eller få idéer. Under disse indledende øvelser benyttede de sig af skift mellem både repræsentationer og perspektiver, som meget bekvemt kan beskrives i termer af fleksibilitet. For eksempel skift til grafisk repræsentation, skift mellem redskabs- og objekt perspektiv og, i forbindelse med kontrol af de foreløbige resultater, mellem model og virkelighed.

3. Eksempel

I en anden case[7] fra min ph.d. afhandling arbejdede et par elever med en opgave, hvori der opstilles en simpel model for udenadslære. Der var en indbygget progression i opgaven så modellen blev gradvist mere kompliceret. Dermed blev eleverne opmuntret til at diskutere, regne og kontrollere. Analysen af denne case viser hvordan elevernes succesfulde arbejde med opgaven byggede på, at de kunne mestre at skifte frem og tilbage mellem analytisk repræsentation og naturlig tale, og mellem virkeligheds- og model perspektiv.

<u>Retningslinjer for design af undervisning</u>

Med henblik på de læringsmæssige gevinster, som forskningsspørgsmålet refererer til, peger mine undersøgelser og analyser og deres teoretiske forankring på, at lærerens tilrettelæggelse af undervisning med fordel kan inddrage følgende hensyn:

- *Perspektivskift*

Problemer og opgaver designes med henblik på at fremprovokere skift af perspektiv i begge retninger i de sæt af perspektiver som er opstillet i ovenstående definition af hjælpebegrebet fleksibilitet

- *Skift mellem repræsentationer*

Problemer og opgaver designes med henblik på at fremprovokere skift mellem de forskellige repræsentationer fra ovenstående definition af hjælpebegrebet fleksibilitet

- *Arbejde med modeller*

- Både eksplorativt og ekspressivt arbejde med matematiske modeller er væsentligt

- Eleverne skal opmuntres til og støttes i at udvikle modeller af en række nøglebegreber på alle de fire niveauer i modellen fig. 2.

- *Mangfoldighed*

En mangfoldighed af strategier er ikke bare accepteret men ønskelig i klassen. Eleverne skal opmuntres til og støttes i at afprøve idéer og teknikker. Resultater, idéer og strategier skal sættes til åben diskussion i klassen.

[7] Case 7 kapitel 9

Afrundende bemærkninger

Et didaktisk hjælpebegreb som fleksibilitet skal efter min mening ses som et redskab for læreren på flere niveauer. For det første skal didaktiske hjælperedskaber kunne bruges af læreren i tilrettelæggelsen af selve undervisningen og dermed medvirke til at forbedre elevernes faglige udbytte. For det andet skal de kunne bruges som redskaber i lærerens egen professionelle udvikling med henblik på at opretholde og styrke hans eller hendes autonomi. I forbindelse med indførelsen og brugen af CAS i matematikundervisningen indebærer dette blandt andet at didaktiske hjælperedskaber skal hjælpe læreren med at fastholde fokus på undervisningens faglige mål. De skal også medvirke til, at læreren kan udnytte CAS i sin undervisning og indfri de potentialer det indebærer, uden derfor at måtte overtage præfabrikerede undervisningsforløb eller – pakker, som måske endda er udviklet i en helt anden institutionel kontekst.

Derfor er udviklingen af et didaktisk hjælpebegreb som fleksibilitet en langvarig proces. Jeg forestiller mig ikke, at ovenstående definition af fleksibilitet er et slutprodukt! Tværtimod så jeg gerne, at den kunne blive starten på en samarbejdsproces med matematiklærere på forskellige niveauer i undervisningssystemet, med eller uden CAS. Så hermed vil jeg gerne invitere enhver til at kommentere på ovenstående – meget gerne med idéer til undervisningseksperimenter til afprøvning af fleksibilitet som didaktisk hjælpebegreb.

Referencer:

Ackermann, E. (1990): "*From Decontextualised to Situated Knowledge: Revisiting Piaget's Water-Level Experiment*" MIT Media Laboratory, E&L Memo N.5. September 90

Andresen, M (2006): *What does good use of objects to think with mean in mathematics?* Dissertation, to be published. Danish University of Education

Andresen, M, Pawlik, E. & Winther, A. (2004): *PC'en i brug. Erfaringer fra gymnasiets højniveau i matematik, fysik og kemi* Learning Lab Denmark

Andresen, M. & Thorslund, J. (eds.) (2005): *Lærere i bevægelse* Roskilde Universitetsforlag, Denmark

Artigue, Michèle (2002): "Learning Mathematics in a CAS environment: The genesis of a Reflection about instrumentation and the dialectics between technical and conceptual Work" in *International Journal of Computers for Mathematical Learning 7*. 245-274

Drijvers, P. (2003):"*Learning Algebra in a computer environment. Design research on the understanding of the concept of parameter*" dissertation, Utrecht, CD-beta press

Gravemeijer, K. (1994). *Developing realistic mathematics education.* Utrecht beta-press

Gravemeijer, K. (1997). *Mediating between concrete and abstract.* In Nunes & Bryant pp 315-346

Kaput, James (1989): "Linking Representations in the Symbol Systems of Algebra" in C. Kieran & S. Wagner (Eds.): "*Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra*" Erlbaum

Nunes, T. & Bryant, P. (1997). *Learning and teaching mathematics. An international perspective.* Psychology Press.

Vergnaud, Gérard (1997): "The Nature of Mathematical Concepts" in T. Nunes & P. Bryant (eds): "*Learning and Teaching Mathematics: An International Perspective*", Psychology Press

Kjetil Idås
er matematkklektor på Sandefjord VGS og var sentral både som forfatter og forlegger ved innføringen av IKT i økonomifaget ved Reform 94. Nå har han skrevet bøker om bruk av ulike digitale matematikkverktøy og er ansvarlig for den digitale kompetansehevingen av realister i Vestfold Fylkeskommune, hvor elevene tar i bruk bærbare PCer senest høsten 2006.

En digital arbeidsform i matematikk,- noen utfordringer

Kjetil Idås (kjetili@vfk.no)
Lektor
Sandefjord Videregående skole

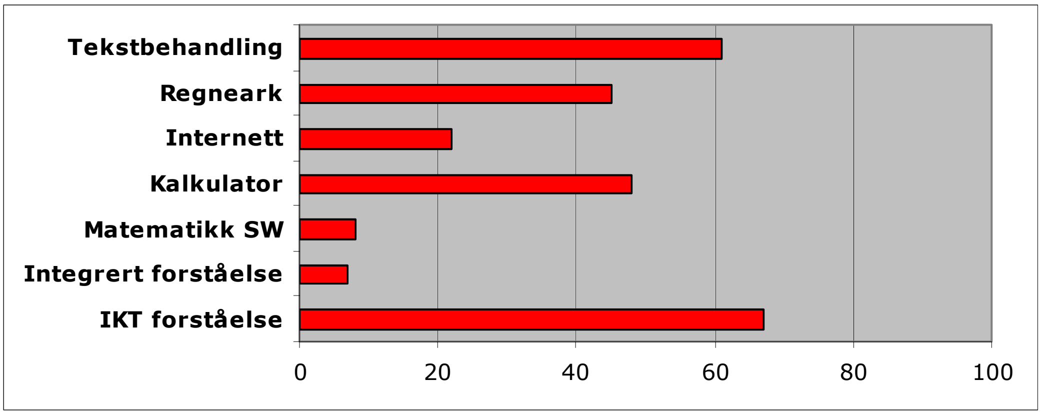
Matematikklærere i den videregående skolen står overfor nye og spennende utfordringer. Både nye læreplaner og antagelig en ny eksamensform venter oss om et halvt år. I tillegg skal en digital arbeidsform i matematikkfaget endelig integreres som en naturlig del av faget.

Er vi klare for en digital arbeidsform?
Det er relativt kort tid til at vi skal levere matematikkundervisning med digitale verktøy til elevene. Dette reiser en rekke spørsmål knyttet både av pedagogisk, faglig og organisatorisk art. I tillegg er det et spørsmål om vi faktisk er kompetente og motiverte for å ta med den digitale arbeidsformen inn i klasserommet. Noen vil også stille spørsmål ift rammebetingelsene – skal vi overta PS rommene etter Økonomi & IT faget? - eller vil alle elevene ha en bærebar PC på pulten høsten 2006 – slik som i Vestfold?

Flere undersøkelser har vist at vi trenger solid faglig påfyll for å mestre en mer komplisert fagdidaktisk matematikkundervisning. Og det haster for mange av oss. Det er ikke sikkert at du vil få den samme faglige respekten med ”bare” fagfunnskap og metodikk i verktøykassa. Eleven vil fort gi deg terninget kast 3 – hvis du skalerer ned IKT-bruken eller kjapt dokumenter at du ikke forstår spørsmål som *”Hvordan legger jeg en TI-fil fra USB'n på LMSen lærer?”*

Etter å ha arbeidet med IKT-opplæring de siste 20 årene er det åpenbart at det på noen få år har skjedd en voldsom kompetanseheving på grunnleggende IKT-ferdighetene blant elevene. Takk til hjemme PC-ordninger! De fleste elevene har god kunnskap om integrasjon mellom programvare, forstår programvare funksjonalitet godt og ser poenget med å lagre det de produserer digitalt.

Dette dokumenteres også av undersøkelser utført av Utdannings- og forskningsdepartementet 2002 som viser at elevene har bedre grunnleggende IKT-kunnskap enn mange lærere. Undersøkelser gjennomført av Jonassen (2003), Nilsen (2001) og Idås (2005) underbygger også dette. Tabell 1 viser at mange matematikklærere er spesielt svake på integrasjon mellom programmer og noe overraskende – på matematikk programvare.



Tabell 1: Matematikklærere i den videregående skoles scoore på IKT-ferdigheter (Idås 2005) (UFD 2002)

Har vi sovet i timen?
Siden Mac'en og PCens introduksjon på begynnelsen av 80-tallet har det blitt utviklet mange programvareløsninger til matematikkfaget. Både program for å lære matematikk/gi bedre forståelse, for å erstatte kalkulatoren og løse matematikk (CAS-program), for å plotte grafer og for å kunne arbeide med matematisk tekst på en digital måte. CAS-programmene kom på slutten av 80-tallet og har endret matematikkfaget i land som Frankrike, Østerrike, Australia og senest i den nye gymnasiereformen i Danmark høsten 2005 (Kendal 2003, T^3 Europa 2004).

Derfor er det overraskende – nesten sjokkerende – at mange av oss ikke har fulgt med i hva som har skjedd teknologisk innen faget vårt de siste 10 – 15 årene. Det er for enkelt å skylde på læreplaner fra 1994 (1999/2000) og krevende arbeidsdager. Alle som lever av å formidle kunnskap – enten du er revisor eller lærere må holde seg faglig à jour. Tabell 2 viser at det haster med å tilegne seg tilstrekkelig kompetanse for å levere digital kompetanse høsten 2006:

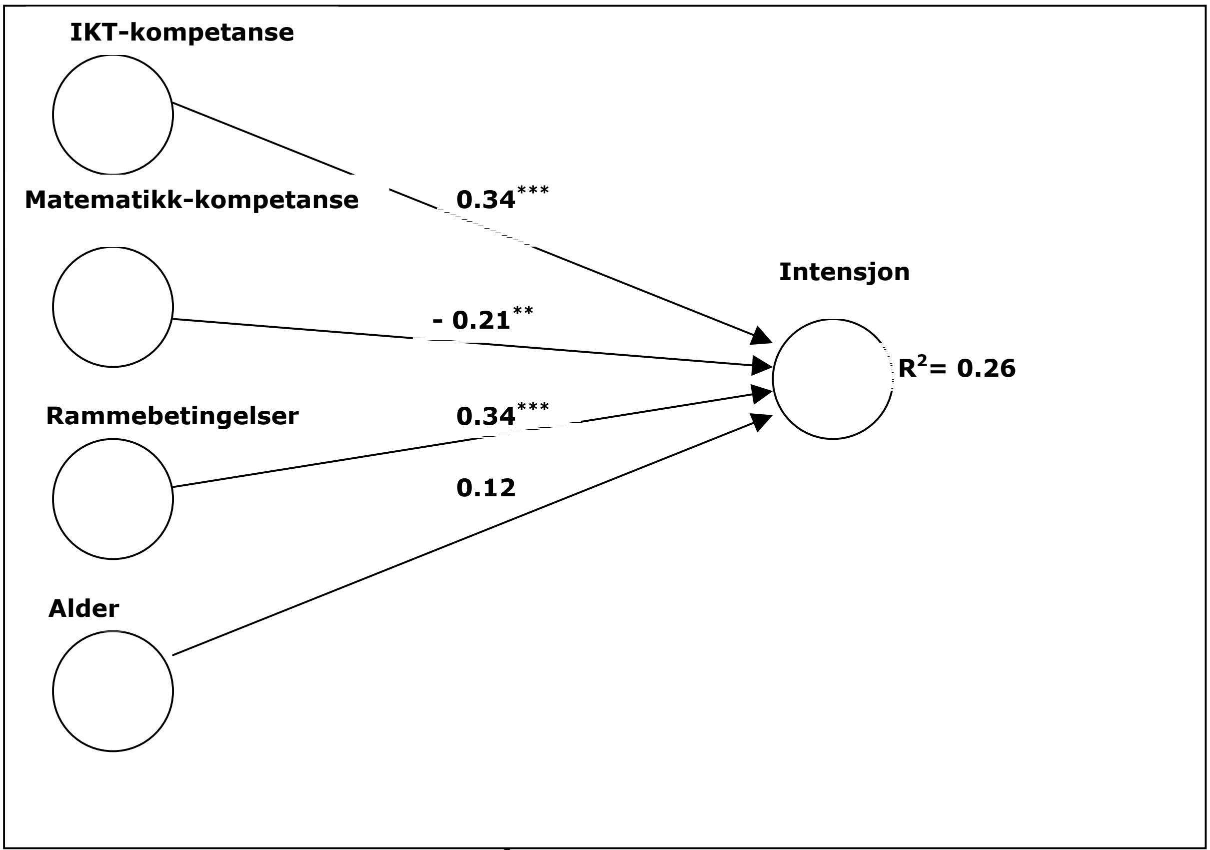
Kjennskap til sentralt digitalt verktøy/handling	Andel
Andel som ikke kjenner til TI InterActive!	81%
Andel som ikke vet hva et CAS program er	66%
Andel som ikke kjenner til Cabri Geometry	58%
Andel som ikke kan ikke lage formler i Excel	34%
Andel som aldri har brukt projektor	32%

Tabell 2: Matematikklæreres kjennskap digitale verktøy (Idås 2005)

Imidlertid viser undersøkelser at lærere generelt (Nilsen 2001, Johansen 2004) og matematikklærere spesielt har sterk *intensjon* om å ta i bruk IKT i undervisningen.

Dette er basert på intensjonsforskning, som er sentral ift å forstå hvorfor mennesker ønsker å ta i bruk teknologi (Davis 1985, Venkatech 2003).

I en hovedfagsoppgave fra 2005 om matematikklæreres intensjon om å ta i bruk digitale verktøy i matematikkundervisningen, viste seg at IKT-kompetanse og Rammebetingelser (PC-tetthet, Helpdesk/IT-seksjon, projektorer, lederstøtte) er viktigst for intensjon om bruk, mens alder har liten betydning og at høy matematikk-kompetanse (hovedfag) virker negativt på intensjon slik det fremgår i Figur 1:



Figur 1: Ulike elementer som påvirker matematikklæreres intensjon om bruk av IKT i matematikkundervisningen (Davis 1986, Idås 2005).

På bakgrunn av dette, min egen undervisning på Sandefjord Videregående skole og fra mange etterutdanningskurs i bruk av digitale verktøy i matematikkundervisningen, mener jeg at matematikkseksjonene har følgende utfordringer før høsten 2006:

A. Forstå hva en digital arbeidsform innebærer

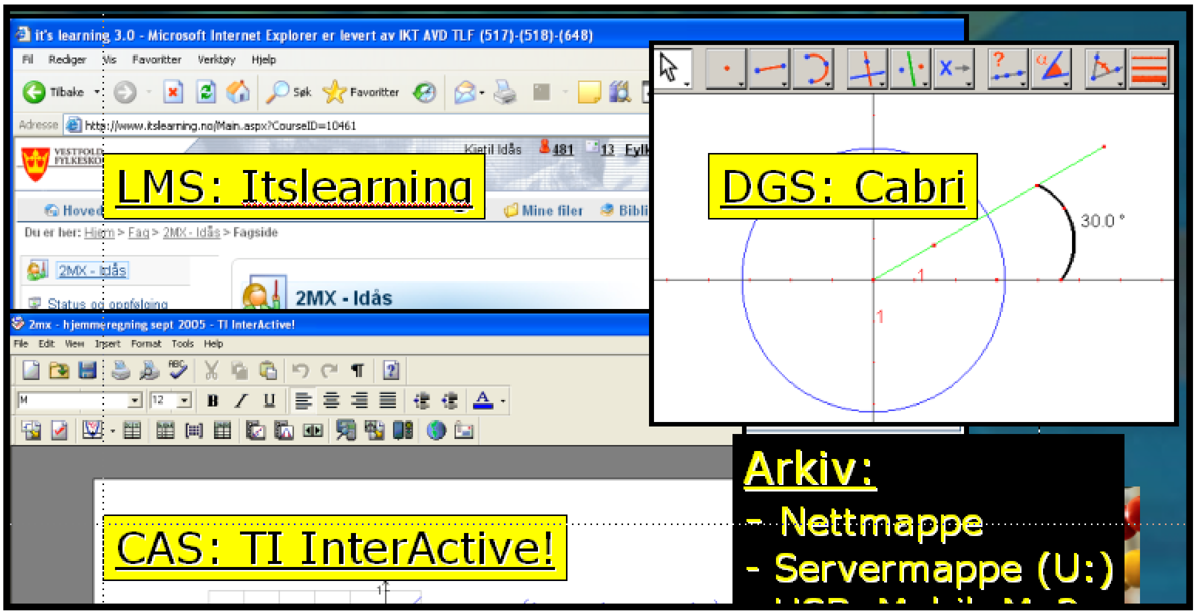
Det ennå uklart hva den femte grunnleggende kompetansen – den digitale – konkret vil stille av krav til hver av oss. Muligens vet vi ikke dette før de første eksamenssettene fra VG1T og VG1P blir offentlige.

Det kan også hende at det blir relativt stor frihet i arbeidsform, men at kompetansemålene blir de styrende for minimum av hva som skal formidles av digital ferdighet. Det er også åpenbart at det vil bli stor forskjell på å bruke en kalkulator eller et CAS-program som et digitalt hjelpemiddel ved gjennomgang av fagstoffet som for eksempel når målet om å *"bruke digitale hjelpemiddel til å drøfte polynomfunksjoner, rasjonale funksjoner, eksponentialfunksjoner og potensfunksjoner"* skal gjennomgås.

Samtidig med de nye læreplanene, "krever" flere og flere videregående skoler at elevene skal ha bærbare PC. Det medfører at en heldigital arbeidsform fort faller naturlig, spesielt fordi de fleste skolene nå benytter en læringsplattform som Itslearning eller Fronter. Papir, blyant og kalkulator vil da naturlig erstattes med matematikkprogram som TI InterActive!, MathCAD eller Matematica[8] både av hensyn til effektivitet og kostnader. Samtidig kan da fordelene i læringsplattformene brukes med digitale mapper, mappeundervisning, kommunikasjon, arkivering og samarbeid.

[8] For mer informasjon – se www.alfasoft.no

En moderne arbeidsform som åpner for helt nye muligheter for eksperimentering, differensiering, kommunikasjon og gjenbruk av fagstoff. I kombinasjon med et DGS-program (Dynamic Geometry System) som f.eks, Cabri kan dette skjematisk se slik ut:



Figur 2: Læringsplattform, CAS- og DGS-plattform på Sandefjord Videregående skole

I en slik løsning vil de ulike programmene ha disse rollene:

LMS-systemet	- Tempoplaner - hva skjer når? - Digitale mapper, oppfølging via elevens arbeidsmappe - Klasselister, Fraværsføring, Karakterføring - Digitale tester - Kommunikasjon med elevene - Innleveringer, prøvearkiv
CAS-systemet	Et CAS-system er i tillegg til å være matematikkens svar på tekstbehandler en god kalkulator som kan utføre regneoperasjoner, løse likninger, regne ut integraler, opprette tabeller, lage regnearkmodeller plotte grafer osv. [9] - Produksjon av matematisk tekst (erstatter kladdeboka) - Kalkulasjon (erstatter kalkulatoren) - Grafplotter - Regneark (erstatter Excel) Arkivering / gjenbruk (erstatter ringperm og lignende)
DGS-systemet	Program for å arbeide med geometri. Passer godt til trigonometri i YF, 1Y, 1MXY og 2MX/MZ. Mest vanlig program: Cabrie Geometry
Arkivene	Åpenbar fordel fremfor kladdeboka. På Sandefjord VGS bruker vi følgende arkiver: a. Nettarkiv – tilgjengelig overalt b. Serverarkiv – på skolen c. USB, Mobil og lignende – elevens backup
PC-styring CMS-system	I et klasserom med stasjonære PCer, bør det være et CMS-program (Classroom Managment System) – som NetOp teacher. Med et CMS-program styrer du hva elevene kan gjøre med PCen, slå av PCene, slå av Internett eller for eksempel la elevene bruke TI InterActive!

Tabell 3: Elementene i en digital løsning

[9] For mer informasjon - se www.fagmateriell.no

B. Tilrettelegging og gjennomføring av kompetanseløftet
Det er satt av betydelige midler for å lykkes med kompetanseløftet. I Vestfold er jeg frikjøpt av fylket for å være lokal kursholder for realistene. Skolene "bestiller" selv de kompetanse-modulene de ønsker. For meg virker det som om ikke alle har forstått "alvoret" og fortsatt ikke har satt kompetansehevingen i system – jfr. behovet. På bakgrunn av dette er mine råd/erfaringer følgende:

a. Mange lærere trenger virkelig mye trening! – ta dette som en utfordring for hele seksjonen. Løft sammen.
b. Krev at alle MÅ på kurs (krav for å få undervise?)
   Hold kursene lokalt – rett etter arbeidstid.
c. Kursmoduler med kort tid mellom hver modul.
   Da får dere mye bedre kontinuitet og har en prosess gående
d. Korte kursmoduler (1.5 – 3 timer)
e. Som kursholder: Tilby innleveringer for videre veiledning. Noen vil alltid arbeide på egenhånd.

Her er et eksempel på hvordan dette kan være tilrettelagt:

Kursdag 1 (15 – 17)	De nye læreplanene Hva menes med digital kompetanse i matematikk? Fylkets/Skolens infrastruktur
Kursdag 2 (15 – 17)	Læringsplattformen - Klasselister/kommunikasjon/informasjon - Nettbaserte mapper - Digitale mapper - Arkivsystemene - Oppfølging av eleven og grupper - Digitale tester - Fravær, karakterføring
Kursdag 3 (15 – 17)	Matematikkplattform I - Produsere matematisk tekst - Matematiske beregninger - Plotting av grafer - Bruk av regneark
Kursdag 4 (15 – 17)	Matematikkplattform II - Geometri (litt Cabri) - Vektorer - Stoff relatert til 2MXMZ og 3MXMZ
Kursdag 5 (15 - 17)	En digital arbeidsform Fagdidaktiske utfordringer Bruk av ebøker (e-elev, ebok, ParAbel) Bruk av klassesystemet NetOp teacher Praktiske råd prøver, retting, innleveringer

Tabell 4: Eksempel på etterutdanningskonsept for lærere i den videregående skolen

C. Finn en digital arbeidsform som fungerer
Vi underviser alle litt forskjellig og vil beherske digitale verktøy på ulike nivåer. Mens noen vil arbeide heldigitalt vil andre foretrekker former hvor elevene kjenner til bruken av for eksempel en grafplotter i tillegg til en kalkulator.

Å arbeide digitalt krever faglig trygghet. Det oppnår den enkelte med egentrening, etterutdanning og samarbeid. Det er derfor å håpe at skolelederne legger til rette for kompetanseheving og at nødvendig utstyr kommer i god tid før skolestart.

Vi matematikklærere har nå en sjelden mulighet til å revitalisere faget og gjøre fallende matematikkinteresse og svake resultater på PISA og TIMMS-tester til skamme!

Det er avgjørende at vi forstår hvordan vi kan ha nytte av både de digitale verktøyene og en digital arbeidsform slik at vi kan bruke det effektivt ift kompetansemålene i læreplanen. I tillegg viser mange erfaringer at faget oppleves som mer motiverende og interessant. (Hirlmann 1996, Kendal 2003, T^3 2004)

Da vil vi lykkes med at matematikken står i fokus og at vi bruker verktøyene til det de er gode til.

Lykke til!

Referanser

Davis, F.B (1986)
Technology Acceptanse Model for Empirically Testing End-User Informaton Systems: Theory and Results
Doctorial dissertation, MIT Sloan School of Management
Cambridge, MA

Hirlimann, A. (1996)
Computer algebra systems in French secondary schools
The International Derive Journal no.3 p. 1-4

Idås, Kjetil (2005)
Hovedfagsoppgave "Matematikklæreres intensjon om å ta i bruk digitale verktøy i matematikkundervisningen"
Høgskolen i Buskerud

Jonassen, T. (2004)
Hovedfagsavhandling "Hvilke faktorer er betydningsfulle for læreres aksept av IT i undervisningen?"
Høgskolen i Buskerud

Kendal, M., Stacey,K. (2003)
CAS, Calculus and Classroom
Department of Science and Mathematics Education
The University of Melbourne

Nilsen, O. N., (2001)
Hovedfagsavhandling "Lærerens møte med Internettgenerasjonen"
Høgskolen i Buskerud

T³ Europa (2004)
The Case for CAS
Westfälishe Wilhelms-Universitët Münster

Utdannings- og forskningsdepartementet (2002)
"Realfag, naturligvis" Strategi for styrking av realfag 2002-2007

Utdannings- og forskningsdepartementet (2005)
Kunnskapsløftet – midlertidig utgave september 2005

Venkatech, V., Morris, M. G., Davis, G. B., Davis, F. D. (2003)
User Acceptance of Information Technologi
MIS Quarterly Vol 27, No. 3 2003 – p. 425 – 478

Anders Sanne

er universitetslektor i matematikk ved Program for lærerutdanning NTNU. Der har han drevet ulike former for nettbasert fjernundervisning i matematikk siden høsten 2003. Anders har tidligere jobbet 2 år som systemutvikler i Clustra AS og 2 år som matematikklærer ved Brundalen videregående skole i Trondheim.

DELTA - Matematikk på nett fra NTNU. Noen erfaringer fra nettbasert videreutdanning av lærere.

DELTA er et nettbasert matematikkstudium, og tilbudet er særlig rettet mot lærere som ønsker undervisningskompetanse i videregående skole. Emnene er de samme som tilbys NTNUs ordinære matematikkstudenter på campus, men undervisninga er tilrettelagt for fjernstudenter. Artikkelen gir en kort presentasjon av DELTA, og forsøker å formidle noen av de erfaringene vi har gjort oss høsten 2005. DELTA mottar støtte fra Norgesuniversitetet for 2006, og artikkelen gir en skisse av dette prosjektet.

1 Om DELTA

NTNU tilbyr fra høsten 2005 årsenhet i matematikk som fleksibel fjernundervisning. Studiet passer bra for lærere som ønsker videreutdanning I matematikk, og de aller fleste av våre studenter er lærere i videregående skole. DELTA er et nettbasert matematikkstudium med frivillige samlinger i Trondheim, og tilbudet gis i et samarbeid mellom Institutt for matematiske fag og Program for lærerutdanning. DELTA er tilrettelagt som et deltidsstudium. Hvert emne er på 7,5 studiepoeng, og de åtte DELTA-emnene utgjør til sammen en årsenhet (se figur 1). Emnene er de samme som Institutt for matematiske fag tilbyr sine studenter på campus. Lærere som følger DELTA og tar 60 studiepoeng, oppnår undervisningskompetanse i matematikk for videregående skole [4].

Som et supplement til pensumbøkene, legger vi ut undervisningsmateriale i form av notater, oppgaver, løsningsforslag og videoforelesninger på nett. Studentene får tett oppfølging med oppgaveregning og veiledning underveis. NTNU bruker it's learning som læringsstøttesystem, og studentene bruker diskusjonsforumet på fagsidene aktivt. Mer detaljert informasjon om DELTA finner du på studiets eget nettsted [2]. Der finner du også noen smakebiter på våre nettbaserte videoforelesninger.

4. semester (vår)	Lineær algebra med anvendelser	Geometri
3. semester (høst)	Lineær algebra og geometri	Statistiske metoder
2. semester (vår)	Analyse II	Sannsynlighetsregning
1. semester (høst)	Analyse I	Tallteori

Figur 1: DELTA er satt sammen av 8 enkeltemner. Hvert emne er på 7,5 studiepoeng. De stiplete linjene i tabellen angir at enkelte emner bygger på hverandre. Studiestart om høsten gir naturlig progresjon.

2 Våre erfaringer

Institutt for matematiske fag har i flere år hatt noen såkalte «poststudenter». Disse studentene har ikke fulgt den vanlige undervisninga på campus, og de har sendt inn regneøvinger med posten til retting. Dette har fungert greit for noen få studenter, men for de fleste studentene var ikke dette tilbudet tilstrekkelig til at de klarte å gjennomføre. Instituttet ønsket derfor å satse mer på fjernundervisning. Program for lærerutdanning har i flere år drevet nettbasert videreutdanning av matematikklærere i grunnskolen.
Erfaringene fra arbeidet med disse kursa danner grunnlaget for utviklinga av DELTA i samarbeid med Institutt for matematiske fag. Vi hadde ingen erfaring med bruk av video i undervisninga, og NTNUs multimediesenter har vært en helt nødvendig støttespiller for oss i den sammenheng.

2.1 Studentene

Ved semesterstart høsten 2005 hadde vi ca 70 påmeldte studenter, og omtrent halvparten av studentene ønsket å ta to emner (15 studiepoeng). De fleste av våre studenter er lærere i videregående skole, og de følger DELTA ved siden av jobb. I løpet av september hadde vi stort frafall. Vi har ikke nøyaktige tall, og kjenner ikke årsakene til frafallet, men overraskende mange (ca 20) av de påmeldte startet aldri studiene. Dette vet vi fordi vi i it's learning kan se når studentene sist var pålogget, og disse ca 20 studentene var aldri innom fagsidene. Opptaksrutinene våre ble derfor justert våren 2006. Vi krever nå at kursavgiften (2000 kr/emne) er betalt før vi gir studentene tilgang til kurssidene i it's learning, og vi håper dermed å unngå og registrere studenter som aldri tar til med studiene.
Av de ca 50 studentene som startet høsten 2005 var det nokså mange som ga opp i forbindelse med den første obligatoriske innleveringsoppgaven. Dessuten var det en del av to-fagsstudentene som opplevde studiet såpass arbeidskrevende, at de valgte å konsentrere seg om kun ett emne.Studentene oppgir at de bruker ca 10 timer på studier per uke på hvert av emnene (7,5 studiepoeng). Vi tror mange av studentene undervurderer arbeidsmengden når de melder seg på, og vi tror dette er en viktig årsak til det store frafallet i starten av semesteret. Rett før eksamen hadde

vi 38 aktive og eksamensklare studenter (figur 2). I vår markedsføring av tilbudet for våren 2006 har vi forsøkt å være tydelige på hvilke arbeidskrav som møter studentene. Vi ser en tendens til at flere av dem som gjennomførte to emner høsten 2005, nå har valgt å melde seg opp i kun ett emne. Våren 2006 opplever vi god etterspørsel fra nye studenter, og vi har derfor valgt å tilby emnet MA6101 Analyse I ekstraordinært også i vårsemesteret. Ved semesterstart har vi 60 studenter fordelt på tre emner (figur 3).

2.2 Undervisning

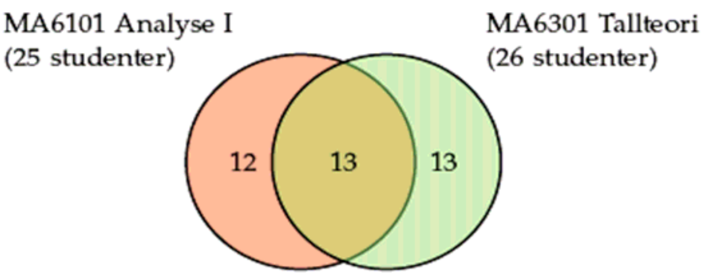
Det er krevende å skape et godt læringsmiljø på nett. Ved semesterstart så vi på dette som en hovedutfordring, og vi fikk Tine Wedege til å dele noen av sine tanker og erfaringer med oss. Hun pekte særlig på fire faktorer som motiverer voksne til å lære [5]:

1. Inkludering — fellesskap og gjensidig respekt

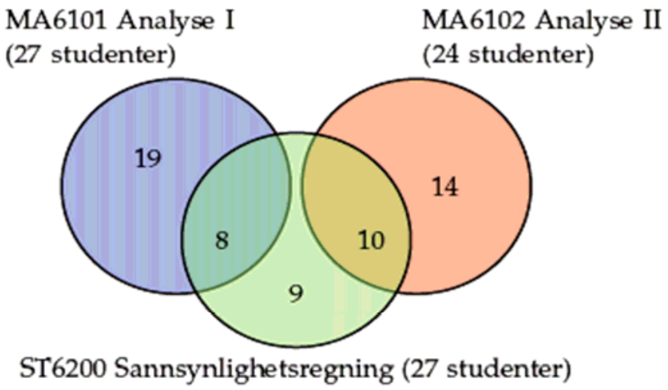
2. Holdninger

3. Mening – studiet må oppfattes som relevant

4. Kompetanse — mestring og selvtillit henger sammen



Figur 2: Studentgruppas sammensetning november 2005. 38 eksamensklare studenter fordelt på emnene MA6101 Analyse I og MA6301 Tallteori.



Figur 3: Studentgruppas sammensetning ved semesterstart våren 2006. 60 studenter fordelt på emnene MA6101 Analyse I, MA6102 Analyse II og ST6220 Sannsynlighetsregning.

Vi arrangerer to frivillige helgesamlinger i Trondheim hvert semester. Litt over halvparten av studentene deltok på siste samling høsten 2005, men vi ser gjerne at enda flere finner veien til Trondheim. Samlingene er viktige for læringsmiljøet og studentenes motivasjon. Vi legger stor vekt på det sosiale i forbindelse med samlingene slik at studentene blir bedre kjent med lærerne og hverandre. En av studentene skriver dette om samlingene:

> Samlingene har vært topp, både sosialt og faglig. Vi har blitt kjent med de andre, og tonen oss imellom student/student og student/lærer har vært lett og humørfylt, slik at læringsmiljøet har vært særdeles godt, noe som har gitt «lav terskel» for å spørre osv.

Til tross for at samlingene er viktige, har vi likevel valgt å la dem være frivillige. Studentene kan ha både praktiske[10] og økonomisk gode grunner for å ikke dra på samling. Vi satser på at samlingene skal være så gode at studentene «gjør alt» for å få dem med seg.

NTNU har valgt læringsstøttesystemet it's learning, og vi bruker det til å sende meldinger og legge ut oppslag. Studentene leverer regneøvinger, og får tilbakemeldinger fra lærerne via it's learning, og vi har våre egne debattsider. Håndskrift er fortsatt mest effektivt når man skal skrive matematikk, og oppgaveinnlevering og -retting via it's learning byr derfor på noen utfordringer. Vi ønsker ikke å belaste studentene med unødig inntasting av besvarelser på data, og vi har i steden valgt å satse på skanning av håndskrevne besvarelser.
Lærerne bruker dessuten skanner i forbindelse med veiledning og retting. Tidligere har vi også brukt telefaks til oppgaveinnlevering, men vi erfarer at det lett blir rot når vi har mange studenter og det er flere lærere som deler på veiledningsjobben. Ved semesterstart var det en del studenter som strevde litt med å skanne besvarelsene sine, men dette fikk de fint til etter hvert.[11] Vi krever derfor at alle leverer via it's learning. Studentene framholder hvor viktig det at at de får raske og gode tilbakemeldinger. En av dem skriver dette:

[10]Vi har for eksempel studenter som følger DELTA mens de er hjemme i fødselspermisjon. Høsten 2005 fikk vi to babyer!

[11]Vi hjelper til med teknologiproblemer så godt vi kan, men hadde nok ikke klart oss like godt uten alle de gode lærerkolleger, kjærester og naboer som hjelper til der det trengs.

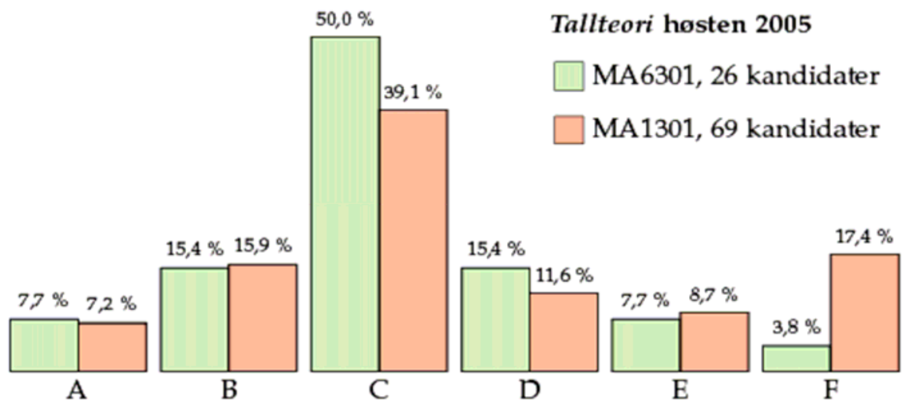
Det at foreleserne gir så kjappe tilbakemeldinger/svar via nettet er viktig, slik at vi lett kan «holde tråden» enten det gjelder forståelse av teori eller oppgaveregning.

NTNUs multimediesenter tilbyr bistand til ideutvikling og produksjon av digitalt læringsmateriell med video, lyd og animasjoner til fagmiljøene på universitetet. Vi bruker deres studio og kompetanse til å lage video. Filmene produseres fortløpende gjennom hele semesteret, og de legges ut som videostrømmer på nett. (Se for eksempel [1].) Uten Multimediesenteret ville videoproduksjon vært en nesten umulig oppgave for oss lærerne. Studentene framhever videoene som svært lærerrike og motiverende. Vi har etter hvert lært oss noe om hvordan mediet kan utnyttes pedagogisk, men vi er helt avhengige av Mediesenterets produksjonsutstyr og kompetanse.

2.3 Evaluering

Vi gjennomførte nettbasert sluttevaluering etter eksamen, og vi fikk svar fra litt under halve studentgruppa. Det hadde vært ønskelig med flere svar, og vi grubler derfor på om undersøkelsen kan ha kommet til feil tid. Neste semester vil vil gjennomføre sluttevaluering like før eksamen. De studentene som svarer, gir i stor grad uttrykk får at de er fornøyde med undervisninga og opplegget. Mange mener at arbeidsmengden i analyse er for stor, og det kan ha en sammenheng med at en del av studentene i analyse vurderer sine egne forkunnskaper som lave i forhold til det faglige nivået. Ved sluttevaluering av kursa hevder likevel samtlige av de studentene som har svart, at det faglige nivået er passe høyt. Vi har et klart inntrykk av at studentene er godt fornøyd med DELTA.

DELTA-studentene avlegger samme avsluttende eksamen som campusstudentene, men de hadde høsten 2005 en annen midtsemestereksamen.
Midtsemestereksamen teller 20 % av sluttkarakteren i faget, og fjernstudentene avla denne som en hjemmeeksamen. Instituttet ønsker ikke å videreføre ordningen med hjemmeeksamen, og fra våren 2006 vil DELTAstudentene kun ha en avsluttende eksamen i hvert emne. Studentene presterer godt i tallteori (figur 4), mens resultatene i analyse (figur 5) tyder på at dette emnet faller vanskelig for mange. Et begynnerkurs i analyse er krevende for studenter som har vært borte fra matematikken i mange år.

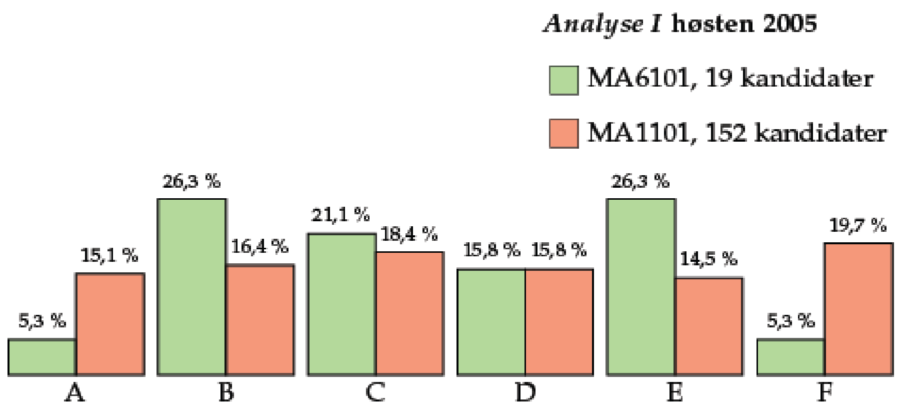


Figur 4: DELTA-studentene (MA6301) har lavere strykprosent enn de ordinære studentene (MA1301). En mulig forklaring kan være at MA6301-studentene har fire obligatoriske innleveringer i løpet av semesteret, mens studentene i MA1301 ikke har obligatoriske oppgaver underveis. Den avsluttende eksamensoppgaven var lik i begge fagvarianter.

Vi ser det som en stor utfordring å lose studentene trygt gjennom de to første analysekursa, uten å senke krava til studentenes faglige prestasjoner. Erfaringene fra MA6101 Analyse I høsten 2005 tyder på at vi har kommet godt i gang, men at vi fortsatt mangler noe for å nå dette målet. Vi ønsker oss mindre frafall og bedre resultater i analyse.

3 Veien videre

Norgesuniversitetet (http://norgesuniversitetet.no/) gir i 2006 til sammen 11,7 mill kroner i støtte til 39 utviklingsprosjekter innenfor fleksibel læring ved norske læresteder. DELTA-prosjektet er et av de utvalgte prosjektene, og vi har fått 500 000 kr fra Norgesuniversitetet for perioden 2006-07. Prosjektets hovedmål er å etablere DELTA som et godt og levedyktig nasjonalt fagtilbud på universitetsnivå. It's learning brukes til publisering av lærestoff, kommunikasjon, veiledning på oppgaver og faglig diskusjon, og læringsmiljøet tilrettelegges så de fire sentrale motivationsfaktorer for



Figur 5: DELTA-studentene (MA6101) har lavere strykprosent enn de ordinære studentene (MA1101), men i analyse var det stort frafall blant DELTA-studentene fram mot eksamen. Den avsluttende eksamensoppgaven var den samme i begge fagvarianter, og begge studentgruppene har levert obligatoriske oppgaver i løpet av semesteret. Det var få kandidater i MA6101 og tallmaterialet bør nok tolkes med forsiktighet.

voksnes læring [5] tilgodeses: inklusjon, holdninger, mening og kompetanse. I tillegg til matematikkfaglig innholdsproduksjon vil DELTA-prosjektet ha særlig fokus på:

1. Gjenbruk og gjenfinning av de digitale læringsobjektene vi utvikler I DELTA vil bli avgjørende for oss etter hvert som prosjektet går over i en mer moden fase. Et viktig element i prosjektet vil derfor være å utvikle gode strategier for merking og gjenbruk av læringsobjekter. Vi ønsker å benytte NORLOM [3], men er avhengig av å finne fram til gode rutiner som gjør publisering, gjenfinning og merking etter denne standarden praktisk mulig. Utdanning.no og NTNUs multimediesenter vil være viktige partnere for vårt fagmiljø i dette arbeidet.

2. Universiteter og høgskoler opptrer i dag som konkurrenter i et marked, men det finnes også eksempler på at aktørene ser seg tjent med å dele. DELTA ønsker å bidra til en «kultur for deling», og de læringsobjekter vi utvikler i prosjektet vil bli gjort allment tilgjengelig på nettstedet Utdanning.no.

3. I matematikkfaget har vi noen spesielle utfordringer i forbindelse med nettbasert fjernundervisning. Matematikklæring fordrer mye egenaktivitet i form av regneøvinger, og det er behov for samarbeid og interaktivitet. Det er tidkrevende å skrive matematikk på data, og håndskrevne formler og figurer er fortsatt helt overlegne når det gjelder skrivehastighet. Det er viktig at studenter og lærere ikke belastes unødig med tidkrevende inntasting av matematikk der dette ikke fremmer læring og samarbeid. Bruk av IKT og LMS har klare begrensinger i forhold til matematikk, og DELTA-prosjektet tar sikte på å finne gode teknologiske og pedagogiske løsninger på disse utfordringene i samarbeid med Learning Lab Denmark.

4 Sluttord

DELTA er ført og fremst et videreutdanningstilbud til lærere som ønsker undervisningskompetanse for videregående skole. Det faglige innholdet I våre kurs er tradisjonelt, og det blir ikke fokusert spesielt på bruk av IKT i matematikkundervisninga. Teknologien letter kommunikasjonen, og gjør det mulig å tilby fleksibel undervisning til studenter som tar videreutdanning ved siden av jobb. Vi forsøker å utnytte de mulighetene teknologien gir oss, og har særlig gode erfaringer med bruk av video i undervisninga.
Den menneskelige kontakten mellom lærer og student og innad i studentgruppa er avgjørende for et godt læringsmiljø. For oss er IKT ikke et mål i seg selv, men vi forsøker å utnytte de mulighetene som teknologien byr oss.

Referanser

[1] Dahl, Heidi og Anette Wrålsen: Kontinuitet. Videoforelesning på nett, 2005. http://multimedie.adm.ntnu.no/Mediasite/Viewer/?peid=a7e179da-11c8-4a46-8d91-a997d_95cd4.

[2] DELTA — Matematikk på nett fra NTNU. Studiets eget nettsted. http://www.ntnu.no/delta.

[3] NORLOM — Norsk applikasjonsprofil av IEEE 1484.12.1-2002, Standard for Learning Object Metadata (LOM). http://www.estandard.no/norlom.

[4] Forskrift til opplæringslova, kapittel 14: Krav til kompetanse hos undervisningspersonalet. http://www.lovdata.no/for/sf/uf/tf-19990628-0722-041.html.

[5] Wlodkowski, Raymond J.: Enhancing Adult Motivation to Learn—A Comprehensive Guide for Teaching All Adults (Revised Edition). Jossey-Bass Inc Publishers, 1999, ISBN 0-7879-0360-4.

Lars Burman
är lektor i matematikens och datateknikens didaktik vid Institutionen för lärarutbildning, Åbo Akademi i Vasa. Han arbetar med utbildning av ämnes- och klasslärare, medverkar i läromedelsprojekt och forskar kring utvärdering inom matematikundervisningen
(Pedagogiska fakulteten, Åbo Akademi, Vasa, Finland)
lburman@abo.fi

Mattekungen - möjligheternas program

Abstract

Erfarenheter av datorstöd inom matematiken i Finland diskuteras och som exempel används programmet Mattekungen som finns utarbetat för klasserna 0-9. Det ursprungligen finskspråkiga programmet översätts till norska som bäst. Vi tar del av programmets möjligheter, t.ex. olika former av tips och hjälp samt animationer. Också läraren har möjlighet att modifiera uppgifter och utveckla programmet för sina ändamål. Som avslutning behandlas olika möjligheter att använda ett dylikt program i undervisningen.

Datorstöd inom matematikundervisningen i Finland

Antalet datorer på en skola spelar en mycket viktig roll när det gäller hur och hur ofta datorer används i undervisningen. En liten gallup i auditoriet under konferensen gav antydningar om att ett flertal av de norska skolorna som var representerade hade en dator per 6-8 elever. Antalet datorer i skolorna i Finland är knappast heller större än motsvarande antal i de norska skolorna.

I båda länderna, ja kanske i hela Norden, används inte datorstöd i matematikundervisningen i den utsträckning som många skulle vänta sig. Den vanligaste förklaringen till detta förutom tillgången på datorer är att man saknar tillräckligt god programvara.

I Finland förbättrades möjligheterna till ett utvecklat datorstöd i matematikundervisningen i årskurserna 0-6 markant när programmet Moppi kom ut på marknaden. Den första versionen kom hösten 1994 och bakom programmet stod Mikrolinna OY i Tavastehus. Sedan dess har programmet successivt utvecklats och antalet uppgifter som ingår i programmet har utökats. Senare kom också en version av programmet för årskurserna 7-9 och man kan räkna med att programmet idag finns i nästan två tredjedelar av de ca 3700 skolorna inom den grundläggande utbildningen (innefattar årskurserna 0-6 och 7-9) i landet. Av dessa är antalet skolor för årskurserna 7-9 en knapp sjättedel. Programmet har uppnått sin goda spridning delvis också tack vare att det säljs i en hemversion. Hemversionen säljs i första hand via de skolor som använder programmet men också direkt till hemmen.

Mattekungen

För några år sedan översattes Moppi till svenska och fick då namnet Mattekungen. Den svenska versionen finns nu i närmare 400 finlandssvenska skolor. Relativt snart efter den finlandssvenska versionen kom också en svensk version för bruk i Sverige.

Det är inte så mycket språkliga orsaker som gör att det behövs två skilda svenska versioner. Den kanske viktigaste orsaken är att det finns många uppgifter där det används pengar och det är naturligtvis viktigt att använda den rätta valutan. När valutorna dessutom skiljer sig från varandra med en faktor som nästan uppgår till 10 uppstår lätt problem med storleksordningen på de tal som används. Kontexten i uppgifterna klarar oftast inte en direkt översättning i sådana fall. Ytterligare en orsak till två versioner är ibland behovet av bekanta ortsnamn och egennamn.

Mattekungens innehåll och möjligheter

När man första gången börjar använda Mattekungen registrerar man sig som användare, oftast inom en bestämd grupp eller klass. Varje gång man sedan vill använda programmet registrerar man sig också men nu på ett enkelt sätt. Ryggraden i programmet är ett stort antal uppgifter som är ordnade i läroavsnitt och uppgiftsgrupper och så att de följer läroplanen. Inom en bestämd uppgiftsgrupp kan det finnas ett varierande men i allmänhet rätt stort antal uppgifter. Totalt finns det flera hundra uppgifter per årskurs.

Programmet är ett gott komplement till läroböcker och andra hjälpmedel i undervisningen. Det innehåller också en särskild lärarversion som kan användas när läraren vill modifiera uppgifter och skapa nya uppgifter. Många uppgifter är försedda med tips som skall ge hjälp om eleven har svårigheter med att lösa uppgiften. Ibland finns det också animationer som åskådligt visar t.ex. hur man använder en algoritm. Det är också möjligt att ta ett rutigt papper eller en inbyggd miniräknare till sin hjälp. I de två första årskurserna är uppgifterna dessutom försedda med ljud eftersom man inte kan förvänta sig att alla elever bekvämt kan läsa.

När en elev jobbar med uppgifter är det möjligt att hoppa över en uppgift och sedan återkomma till den. Man kan också ta om en hel serie av uppgifter. Speciellt för programmet är att uppgifterna i båda dessa fall är försedda med nya talvärden när man kommer till samma uppgift på nytt! Talen väljs av programmet inom de gränser som angetts när uppgiften konstruerades. Därför blir inte uppgifterna ”förbrukade” när de använts en gång.

Tack vare registreringen och det egna användarnamnet kan programmet också ge ut en elevstatistik och den visar hur varje elev (eller en elevgrupp) har lyckats med uppgifterna. Det är t.o.m. möjligt att skriva ut ett diplom över utförda uppgifter.

Fördelar med programmet

Matematikprogram av olika slag kan motivera eleverna och ge läraren möjligheter att variera sin undervisning. Framför allt ger dylika program hjälp när det gäller att individualisera undervisningen. Eleverna kan t.ex. arbeta med olika hastighet och med olika svåra uppgifter och dessutom på olika ställen i kursen. Vidare kan man med hjälp av program beakta att alla elever inte lär sig lika bra på samma sätt.

Allt det som sagts hittills gäller också Mattekungen. När vi går till mera speciella egenskaper hos Mattekungen är det också lättare att hitta starka sidor än svagheter hos programmet. Till svagheterna hör i så fall att en del rutor med tips upprepas rätt ofta och då kanske de inte upplevs ge så mycket hjälp i alla situationer. Naturligtvis kan det också finnas något fel i matematiken som inte upptäckts när det inte gäller alla kombinationer av tal i uppgiften. Någon kanske också upplever att det finns uppgifter som inte placerats på sitt rätta ställe i kursen men ofta kan dessa uppfattningar variera beroende på lärare eller använda läromedel.

Följande lista är ett försök att fånga in programmets starka sidor och de många möjligheterna som finns inbyggda i programmet:

- Tipsen och speciellt en del av animationerna är mycket välgjorda.
- Uppgifterna förbrukas inte när talvärdena förnyas hela tiden.
- Läraren kan modifiera uppgifter och göra helt nya uppgifter.
- Läraren kan följa elevernas framsteg och vissa avsnitt kan repeteras.
- Eleverna får direkt respons och kan t.o.m. ta ut diplom.
- Möjligheterna till individualisering av olika slag är många.
- Programmet är speciellt lämpligt inom specialundervisningen.
- Programmet kan användas hemma tack vare hemversionen.

Referenser

http://www.mikrolinna.fi/swe/

http://www.griegmultimedia.no/

Bengt Åhlander

Numera rektor och tidigare har Bengt varit matematik och fysikadjunkt i 30 år. Han har stor passion för att elever måste förstå matematik.

Bengt är med i SKM, Svenska Kommittén För Matematikutbildning, som är utsedda av KVA i Stockholm. Suppleant i SMDF. Arbetar mycket med KappAbel i Sverige.

Han är T^3 instruktör i Sverige. Teacher Teaching Technology är en världsorganisation under Texas Instruments och håller en hel del kurser för lärare hur man kan använda verktygen för att öka förståelsen

Bättre förståelse i matematikundervisningen med symbolhanterande verktyg.

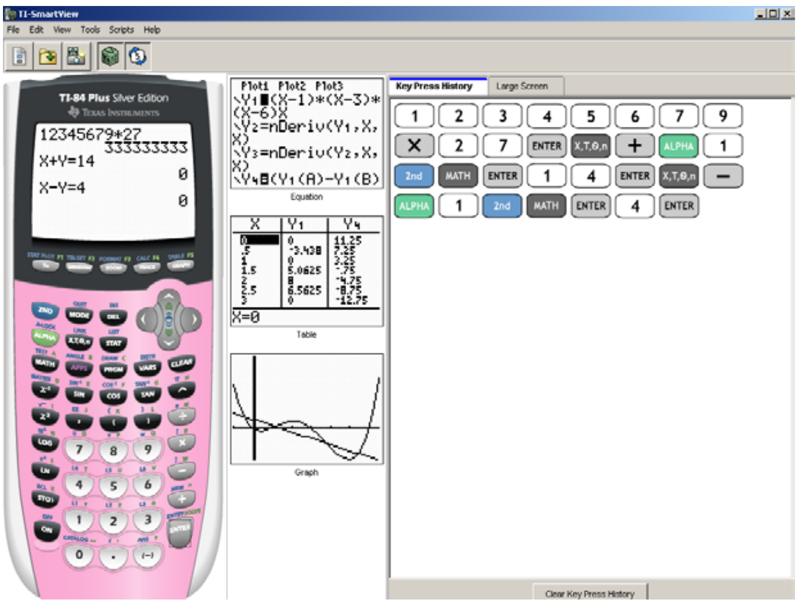
Matematik en utmaning för alla

- Lust att lära
- Förståelse
- Tekniska hjälpmedel redan från början.
- Alla verktyg kan användas rätt eller fel
- Grafritande verktyg
- Symbolhanterande verktyg (Np)
- Dynamiska verktyg som Cabri

Min Bakgrund:
-Jag har undervisat i matematik på gymnasiet där alla studenter använder symbolhanterande program, CAS. (TI89).
-Varje test är delad i två avdelningar. En utan hjälpmedel och en med hjälpmedel. Det 'är viktigt att eleverna kan basfärdigheter med papper och penna.

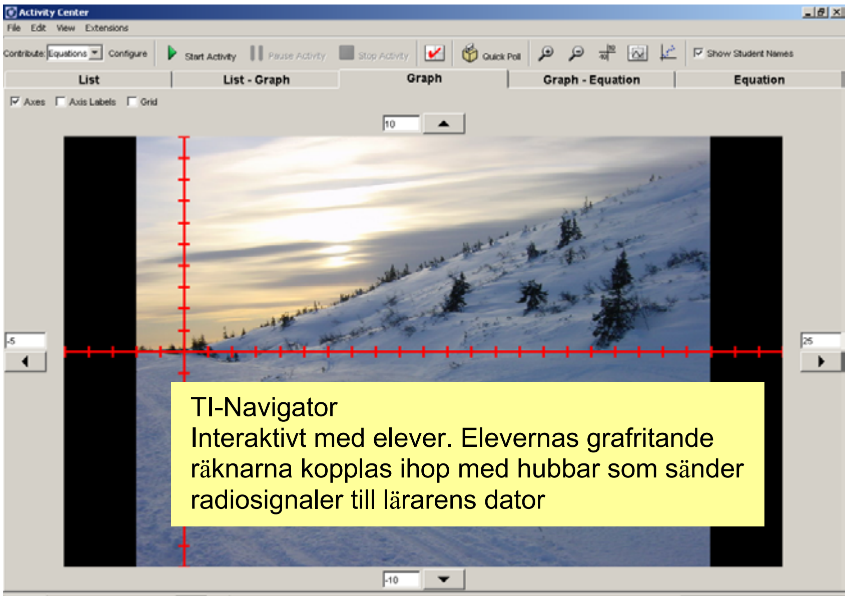
Några olika tekniska hjälpmedel

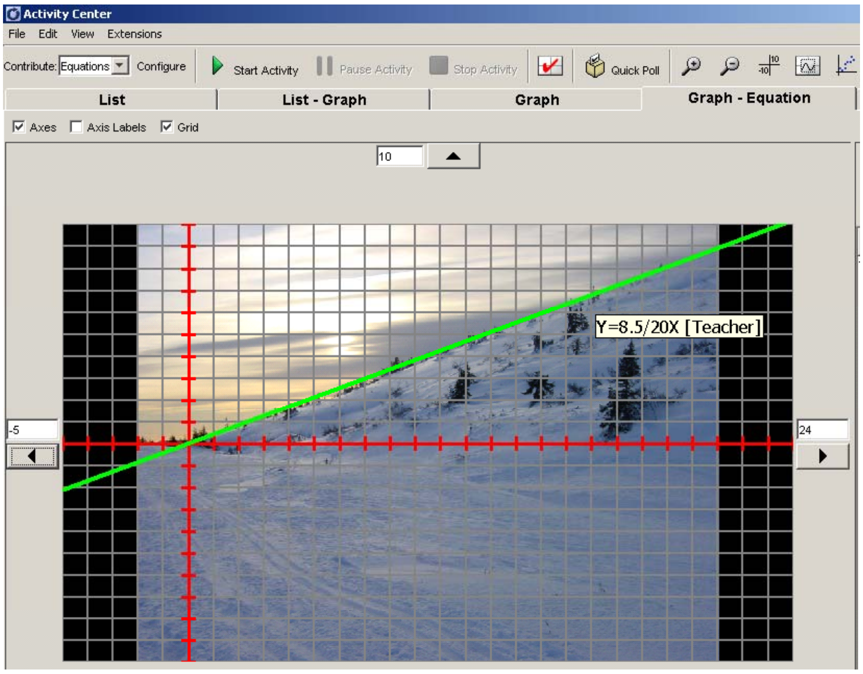
Smartview:
Man låter eleverna se hela tiden vilka knappar man använder och de kan se tabeller och grafer samtidigt



<u>TI_Navigator</u>
Interaktivt hjälpmedel där hela klassen deltar samtidgt med sina grafritande räknare.

Här ska de
Bestämma lutningen på backen.

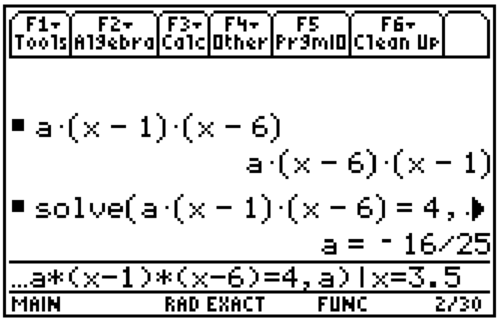




Ett sätt att undervisa på är kanske att låta eleverna få svaren och sedan be dem att ställa rätt frågor till dessa svar. Ett slags "Jeopardy" I matematiken.

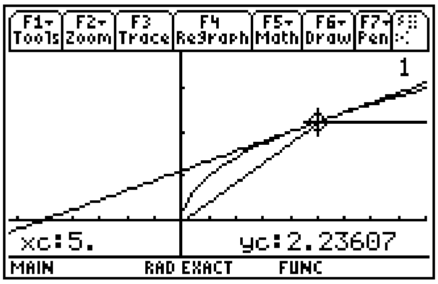
Polynomfunktioner:

- Svaret är: Nollställena är 1 och 6 och maxvärdet är 4.
- Frågan måste då bli:
- Vilka nollställen och vilket maxvärdet kommer
- $f(x) = -\frac{16}{25} \cdot (x-1)(x-6)$ att ha.

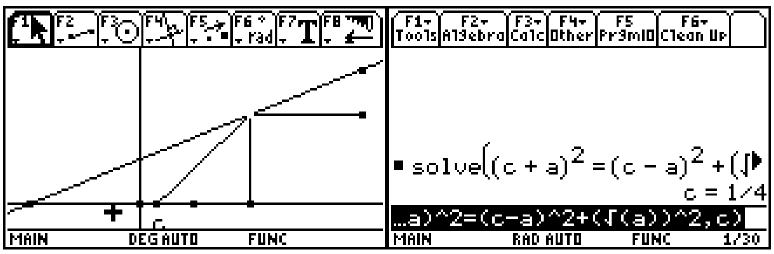


Några laborationer med grafritande räknare

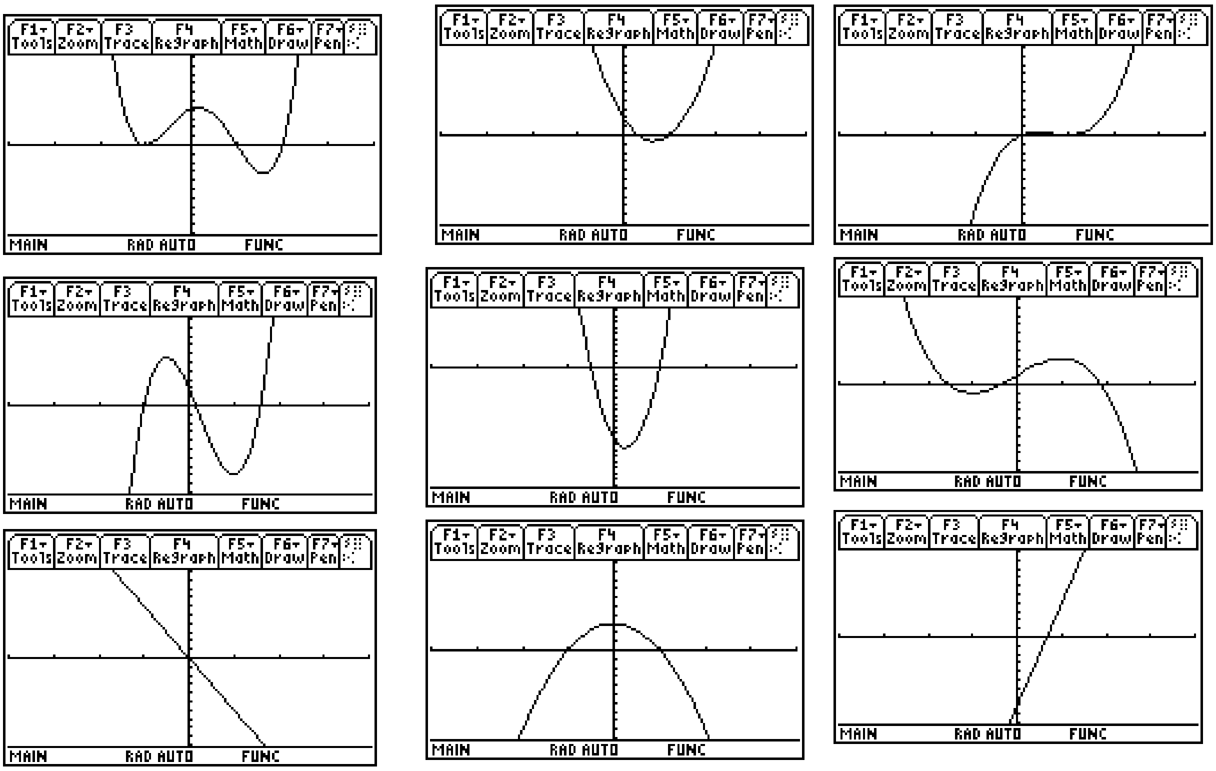
Låt en stråle parallell med x-axeln träffa kurvan och om den speglas i tangenten kommer den att träffa samma punkt oberoende av vilken linje du väljer



Försök nu visa detta algebraiskt

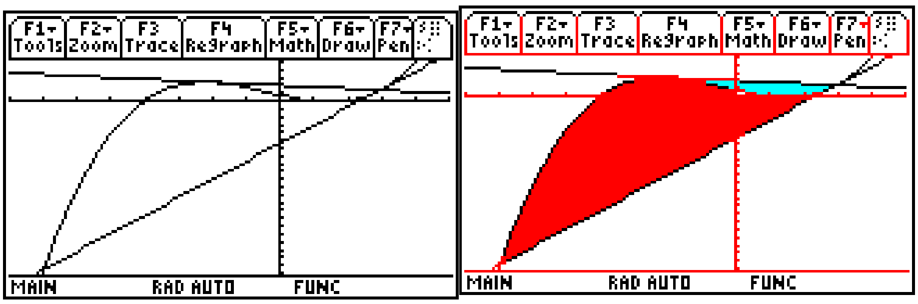


Övningar med funktion dess derivata och dess andra derivata f(x) f´(x) f´´(x)
Para ihop tre funktioner och dess derivator.

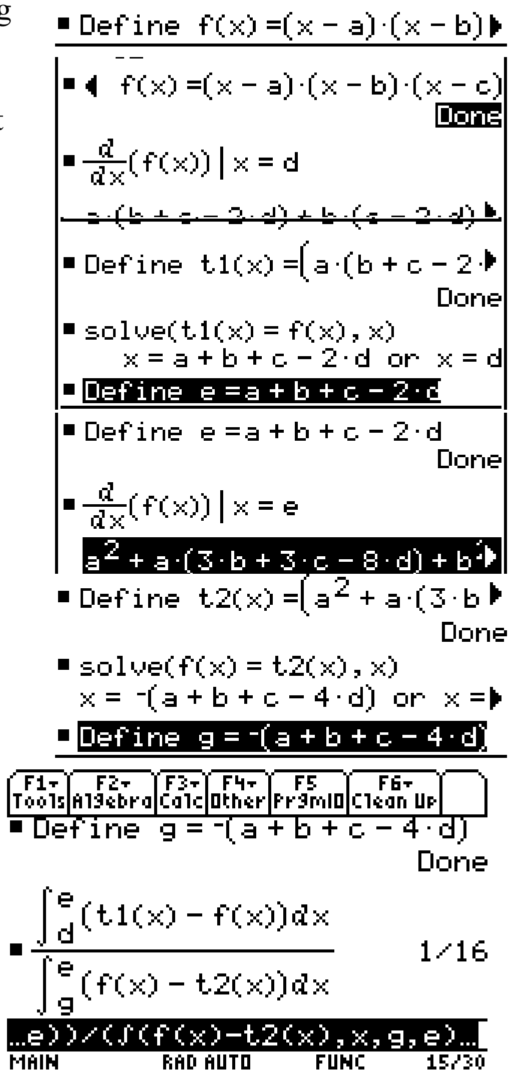


Kul egenskap hos tredjegradsfunktion

- Dra en tangent till en tredjegradsfunktion och markera skärningen med kurvan. I denna skärning drar man ytterligare en tangent. Den nya tangenten kommer att skära kurvan i en ny punkt. De två areorna mellan kurvorna och tangenterna förhåller sig på ett speciellt sätt



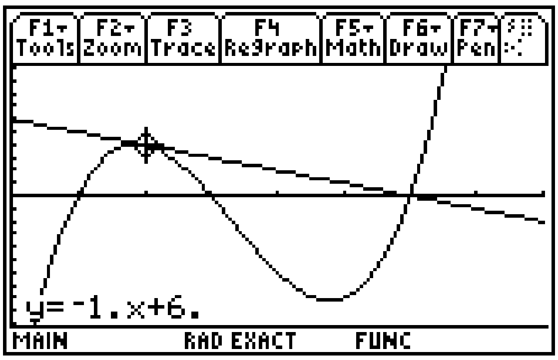
- Här kan man använda symbolhanterande verktyg för att bevisa hur förhållandet alltid blir mellan areorna.
- Här är symbolhanterande verktyg mycket bra att använda.
- Computer Algebra System CAS



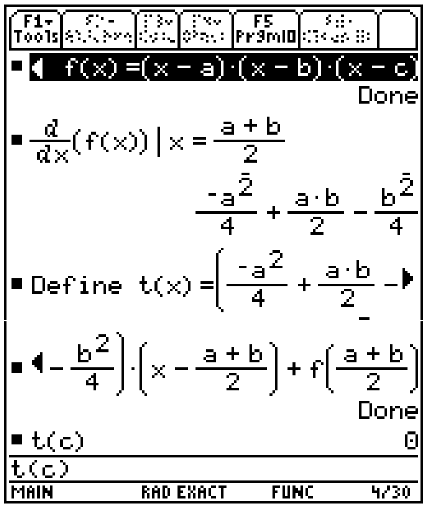
Om vi integrera och jämför areorna ser vi vilket förhållandet är 1/16

Undersökning av tredjegradsfunktioner med derivata . Bra laboration.

- Om du ritar f(x)= (x-1)(x-3)(x-6)=
- =x^3-10x^2+27x-18 upptäcker du tre nollställen. Om du drar en tangent vid medelvärdet av två nollställen kommer den alltid att träffa det tredje!!

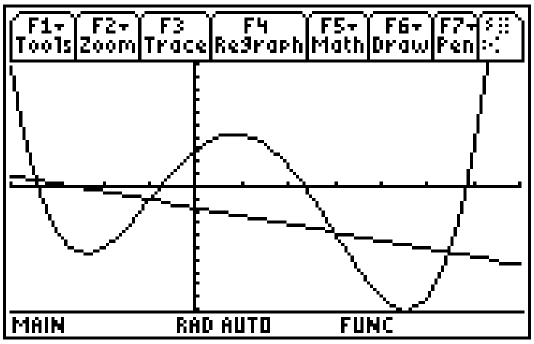


- Efter denna undersökning ber jag mina elever visa att detta stämmer för alla tredjegradsfunktioner med tre reella nollställen.
-
- Här är TI89 verkligen till god hjälp



Laboration med fjärdegradskurva

- Om man har en fjärdegradskurva som har två inflektionspunkter. Två punkter där kurvan går från konkav nedåt till konkav uppåt eller tvärtom. Drar man en linje genom dessa punkter får man tre st avstånd på den linjen.
- Hur förhåller sig dessa avstånd till varandra?
- Försök hitta svaret med CAS



Sammanfattning;

- Uppmana användning av symbolhanterande verktyg på gymnasiet.
- Arbeta för att de tekniska hjälpmedlen används i matematikundervisningen.
- Låt inte eleverna bara räkna i böckerna utan de måste utmanas i tankar och få tid till att samtala om begrepp i matematik

- Some mathematics becomes more important because technology requires it.
- Some mathematics becomes less important because technology replaces it.
- Some mathematics becomes possible because technology allows it.

- \- Bert Waits.

Hege Kaarstein
Prosjektleder, matematikk.org. Har hovedfag i realfagdidaktikk med vekt på matematikk fra Universitetet i Oslo, vært lærer ved Kristelig Gymnasium og rådgiver innen etter- og videreutdanning for lærere ved Matematisk institutt, UiO.

Ivana Celik
Prosjektmedarbeider, matematikk.org. Har hovedfag i matematikk innenfor algebraisk geometri fra Universitetet i Oslo. Medarbeiderstillingen er en deltidsstilling, og den andre delen av jobben er som rådgiver innen etter- og videreutdanning for lærere ved Matematisk institutt, UiO. Jobber også for NITOs matematikkleksehjelp i Oslo.

matematikk.org – bare interaktivt?

matematikk.org

matematikk.org er et samarbeidsprosjekt mellom:

- Universitet i Oslo
- NTNU, Trondheim
- Universitet i Bergen
- Universitet i Tromsø
- Høyskolen i Agder
- Høgskolen i Oslo

Nettstedet eies av Universitetet i Oslo v/ Matematisk institutt, og drives med eksterne midler fra BP, Norges Forskningsråd, Abelfondet og Center of Mathematics for Applications.

Hovedmålgrupper

matematikk.org har tre hovedmålgrupper;
- elever
- lærere
- foreldre

Elevgruppen er stor, og vi har valgt å tilrettelegge nettstedet for grunn- og videregående skoles elever og deres lærere. I tillegg er også foreldrene aktive brukere som ønsker å støtte sine barn i deres matematikklæring.

Kjerneoppgaver

Vi ønsker å bidra til at stadig flere skal få en opplevelse av at matematikk er et spennende og nyttig fag. Det langsiktige målet vårt er å øke rekruteringen til faget, og det ønsker vi å få til gjennom å være

- et inspirasjonssenter for matematikklærere
- et sted for enkel og effektiv videreformidling av gode undervisningsopplegg og tips til klasseromsaktivitet
- et verktøy som vekker nysgjerrighet og interesse hos elever
- et opplysningssenter for foreldre med barn i skolen
- et nettsted fylt av levende matematikk for alle

For at terskelen for å benytte seg av nettstedet skal være lav, har vi valgt å ikke ha autentisering og vi jobber hele tiden for at nettstedet skal være åpent og tilgjengelig for alle - alt skal være gratis!

Innhold

matematikk.org består av en hovedside og underliggende sider for hver av målgruppene; lærersider, elevsider og foreldresider.

På lærersidene finnes det flere ulike faste spalter som tar for seg alt fra "Hvorfor må jeg lære matematikk?", via "Hvordan oppdager man elever med matematikkvansker og hva kan vi gjøre for å hjelpe dem?" til matematiske spill, nedlastbare temahefter med ideer for prosjektarbeid, tips til poster/aktiviteter i et matematikktivoli og problemløsningsoppgaver.

Elevsidene er delt i fire forskjellige kategorier; 5 – 10 år, 10 – 13 år, ungdomskole og videregående skole. De minste får bryne seg på ulike spill, mens elever på videregående skole kan finne ideer og bakgrunnsstoff for prosjekter samtidig som de i "Karrieresenteret" kan få råd og tips om studiemuligheter og yrkesvalg med matematikk som fordypningsfag i videregående skole. I Karrieresenteret ligger det også en mulighet for å teste/repetere kunnskapene fra 2MX/3MX i det vi har kalt "Matteknekker'n".

Delen av nettstedet som er tilegnet foreldrene vil fokusere på hva elevene lærer og når de lærer det. Den tar for seg problemer i matematikklæring og den kan gi svar på didaktiske spørsmål. I tillegg får foreldre mulighet til å friske opp sine egne matematikkunnskaper for bedre å kunne hjelp sine barn i deres læring.

matematikk.org – i eller til undervisningen

Siden matematikk.org er et nettsted sier det seg selv at IKT må tas i bruk for at de (matematikk)interesserte skal kunne komme til oss. Hvordan man skal bruke nettstedet vårt er avhengig av de behovene man har. For øyeblikket er matematikk.org et supplement til matematikkundervisningen i form av å være en idébank, et oppslagsverk, et tilbud om mengdetrening gjennom spill og spørsmål og et tilbud til alle om å kommunisere med matematikere via orakelet vårt, som er en spørsmål-og-svartjeneste.

matematikk.org - idébank og oppslagsverk

På nettstedet matematikk.org finnes det biografier og matematiske tekster som elevene kan bruke i prosjektarbeid. Tekstnøtter, oppgaver, undervisningsopplegg, bordspill og ofte stilte spørsmål i "Spør Oraklet" kan brukes til å motivere elevene, drive med differensiert undervisning eller rett og slett bryte monotonien i "den tradisjonelle matematikkundervisningen". Informasjon om matematikkfagene på videregående skole og råd og tips i yrkesvalg i "Karrieresenteret" skal gjøre det enklere for både elever, rådgivere, lærere og foreldre å få oversikt over matematikktilbudet i utdanningssystemet. "Kurs for foreldre" og heftet "Foreldre teller" gjør at foreldre selv kan få hjelp til å motivere barna og hjelpe dem med matematikken.

matematikk.org som idébank og oppslagsverk er basert på at elever, lærere og foreldre bruker IKT ved informasjoninnhenting, men dette byr ikke på mye interaktivitet så vi må over på spill og orakel.

matematikk.org – interaktivt og kommunikasjonsfremmende nettsted

Spill
matematikk.org er kjent for matematiske spill. Gjennom spill får elevene et tilbud om ulike typer av mengdetrening på ulike nivåer. Her får de bry seg på hoderegning, mønstergjenkjenning, taktikk, logikk, planlegging og strategi. Ved å spille spill får de øyeblikkelig tilbakemelding på om det avgitte svaret er riktig eller galt. Det er også mulig å få tips og hint, eller hele løsningsforslag.

Spill kan brukes av læreren på ulike måter som for eksempel:
- mengdetrening
- repetisjon
- belønning
- motivasjon
- tilpasset opplæring

Orakelet
Ved hjelp av Orakeltjenesten kan elevene utvikle evnen til å sette ord på hva de ikke forstår, formulere problemer og kommunisere med en matematiker. Denne tjenesten er hyppig brukt, men ikke bare til matematikk. Av de omtrent 1030 innsende spørsmålene Orakelet har fått inn fra 1. -17. november i år har bare 240 spørsmål vært seriøse henvendelser.

I den nye læreplanen skal "Digital kompetanse" med som et nytt kompetansemål for alle elevene i grunn- og videregående skole, og matematikk.org kan vise mange eksempler på manglende kompetanse hos elever når det gjelder det å kunne kommunisere digitalt.

Eksempler på useriøse spørsmål/meldinger som kommer inn til Orakelet:

hallo ditt dumme orakel skjer a? ditt nek er jeg kul ell. blir jeg fotball spiller! hade a fuck fase!

he du noken gang tenkt på å pule som matte?? foreksempell vist du har pult med ein 7 ganger og ein 14 ganger ka er gjennom snittet da??

Hva heter han i himmelen? jeg har glemt det skjøner du, jeg glemmer det hele tiden. jeg er ikke kristen da rett og slett så driiiiiter jeg i han i himelen. faen å assa!!! dra t hælvete. bæsj å assa. Fitte!!1

er du kjukk og homse eller homo eller puller du hele dan har du dame ell *kommer eg til og bli rik??? sei ja ellers DREPER DEG DIN FORBANNA JÆVEL OM du er job DREPER EG DEG MEIR!!!!!....lykke til på job*

Dette er av de verste meldingene vi får inn, og poenget med å vise dem frem er å vekke dere som lærere. Dere må ta tak i hvordan man skal oppføre seg på nett. I det offentlige arkiveres en e-post på lik linje med brev!

Avslutningsvis ønsker vi å gjøre dere oppmerksomme på følgende;

- vi lager matematisk julekalender hvert år med oppgaver tilpasset 1.-4. trinn, 5.-7.trinn og 8.-10.trinn. Lærere som ønsker å forberede seg til desember kan sende en e-post merket "Julekalender" til *post@matematikk.org* og få tilsendt utskriftsvennlige versjoner av julekalenderen allerede fra 1. november.

- innsendte undervisningsopplegg, matematiske tekster, biografier e.l. som publiseres på matematikk,org honoreres. Honoraret varierer - for et ordinært undervisningsopplegg utbetales vanligvis 250 kroner.

Kontakt oss: post@matematikk.org, 22 85 58 90 / 22 85 58 81
Postadresse: matematikk.org, Matematisk institutt, Pb 1053 Blindern, 0316 Oslo

Morten Misfeldt
er adjunkt ved Learning Lab Denmark på Danmarks Pædagogiske Universitet. Morten's primære forskningsinteresse er studiet af hvordan nye medier skaber ændrede rum for matematisk læring og kreativitet. Det overordnede mål er at ændre fokus for brugen af teknologi i matematikundervisningen, væk fra at computere skal støtte abstrakte læreprocesser frem imod at se computere som et vigtigt medie for kommunikation og matematisk kreativitet.
mmi.lld@dpu.dk

Matematiske skriveprocesser og IT

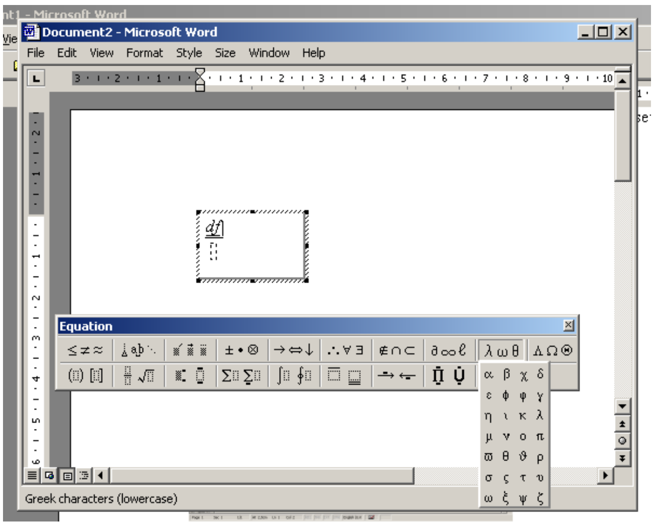
Dette paper er en kort sammenskrivning af mit ph.d. projekt, der henvises til afhandlingen (Misfeldt 2006) for mere fyldig redegørelse for forskningen.

Introduktion

Computeren er i stigende grad det foretrukne medie til at udtrykke sig skriftligt. Der er mange grunde til at det er tilfældet. Computeren tillader at tekst løbende omorganiseres med meget få omkostninger ligesom at et pænt trykt udtryk kan opnås umiddelbart. Desuden foregår en stigende del af skriftlig kommunikation elektronisk, enten helt papirløst (fx emails) eller ved elektronisk distribution med henblik på printning (fx pdf formatet). Muligheden for at dele elektroniske dokumenter forbedrer også infrastrukturen for samarbejde.
Digitaliseringen af skriftlighed er en bevægelse der har været i gang i hvert fald i tyve år og status nu er at mange børn lærer at udtrykke sig skriftligt med en computer sideløbende med at de lærer håndskrift, og for de fleste professionelle og universitetsstuderede er computeren det helt naturlige medie til skriftlig aktivitet. Denne bevægelse har ikke skabt de store problemer, børn kan stadig lære at stave på trods af at de altid har adgang til stavekontrol, skolen sikrer også at børn lærer håndskrift stadig og det virker ikke som om at det at kunne skrive i hånden er en kompetence der er på vej ud. I det hele taget virker det som om at digitaliseringen af skriftligheden er en succeshistorie, aldrig har så mange mennesker skrevet så meget. Det er lettere at skrive, rette og trykke tekster.
Når det kommer til matematisk aktivitet er historien en lidt anden. Matematisk notation er vanskelig at skrive på en computer fordi de mange symboler og strukturer som matematik benytter sig af ikke fremgår af et typisk tastatur. Inventaret af tegn der benyttes indenfor matematik er simpelthen for stort til at det kan fremgå af et tastatur, og tastaturet er historisk udviklet til en computer der kun kunne håndtere tekst-strenge og tal. State-of-the-art computere har dog i en del år været fint i stand til at håndtere både matematisk notation og grafik. Til at støtte grafiske interfaces er tastaturet blevet suppleret med musen og andre pegeredskaber, disse redskaber muliggør at man kan vælge imellem forskellige matematiske symboler og således også skrive matematiske tekster på en computer.
De empiriske kendsgerninger er dog at den digitalisering der er sket af skriftsproget ikke har slået an indenfor matematik. Det giver sig fx udslag i at digitale samarbejdssystemer til støtte af matematik undervisning enten ikke slår and (Guizdial et al. 2002) eller bygger meget på håndskrift (Sande, 2005).

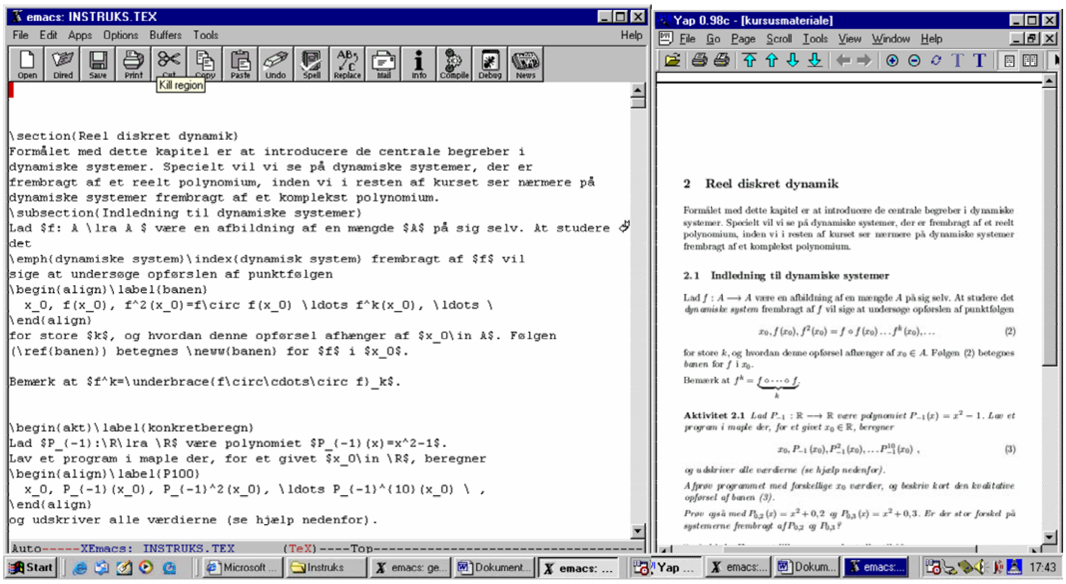
Dette er baggrunden for at gennemføre en empirisk undersøgelse af den matematiske skriveproces. Jeg vil forfølge spørgsmål som følgende: Hvordan ser matematiske skriveprocesser ud? Hvordan indgår forskellige medier, specielt computere og pen og papir, i denne proces? Er der dele af denne proces som computere er særligt gode eller dårlige til at støtte? Man kan spørge hvorvidt det er fornuftigt at beskæftige sig med det grundlæggende spørgsmål om naturen af matematiske skriveprocesser samtidigt med at man forsøger at finde ud af hvordan denne proces støttes af eksisterede teknologi. Det er klart at der er tale om en dobbelt hensigt; dels at blotlægge naturen af den matematiske skriveproces og dels at se hvordan eksisterede teknologier støtter denne proces, men disse to mål kan ikke adskilles.
Denne artikel vil introducere to empiriske studier (blandt matematikforskere og universitetsstuderende) der er gennemført med henblik på at belyse ovenstående spørgsmål. Men før undersøgelserne introduceres og beskrives vil jeg lige opsummere hvilke skriveredskaber der anvendes blandt matematikere.

Matematiske skriveværktøjer
De væsentligste måder at interagere med matematisk tekst på computer er enten vha af kommandoer eller ved hjælp af musen. Der er en del forskellige formeleditorer på markedet, men en af de mest anvendte er equation editor der et en del at Microsoft Word, det mest anvendte tekstbehandlingsprogram. Her vælges matematiske tegn og strukturer med musen eller ved hjælp af genvejstaster som fx Ctrl + f for brøk. De forskellige strukturer og tegn er organiseret i kategorier (se figur 1) og når en kategori er valgt med musen kan et symbol eller struktur vælges tilsvarende.



Figur 1: equation editor i MS-word.

Et program der nok er mindre udbredt generelt, men meget ofte anvendt i forbindelse med matematik er LaTeX. LaTeX er et komando-baseret system hvor der skrives en kildekode i en tekst editor, der ved at køre LaTeX programmet på kildekoden formateres til en print fil der så kan skrives ud eller ses i en previewer (ala acrobat reader).



Figur 2: LaTeX teksteditor og previewer

Skrivning i LaTeX foregår ved at en bruger skrive $\int_a^b f(t)dt=F(b)-F(a)$ for at opnå at intergral og differential regningens hovedsætning står i prinfilen, koden vil processeseres til:

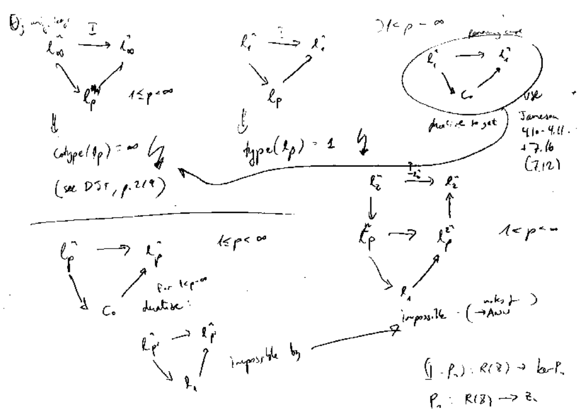
$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a)$$

Spørgsmålet for denne artikel er så hvordan disse programmer, papir, tavler osv. anvendes og evt. influerer den matematiske skriveproces.

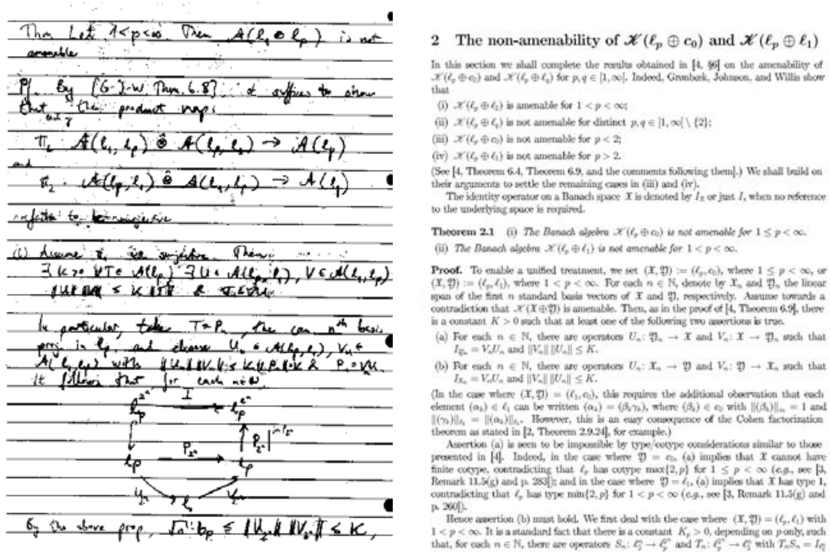
Forskeres skrivning

I efteråret 2002 gennemførte jeg en undersøgelse af matematikeres skriveprocesser. Undersøgelsen baserede sig på interviews. Forskerne forklarede mig om deres skriveproces og om hvordan de anvendte forskellige medier til at støtte denne proces.

Et eksempel på en matematisk skriveproces kan opsummeres i følgende case, hvor en mandlig matematiker forklarer om sin arbejdsproces og hvordan han anvender sine arbejdspapirer (figur 3 og 4). Der er tre forskellige typer af dokumenter i spil: kladde-papir (figur 3), linieret indskrivningspapir og elektroniske dokumenter (figur 4). Nedenfor er eksempler på den mandlige matematikkers arbejdspapirer og hvad han forklarer om dem.



Figur 3. Skrible papir: “du kan kigge på bordet der, typisk har jeg nogle papirer som jeg sidder og tegner diagrammer og skriver ting op sådan meget hurtigt for at se om det her overhovedet virker…”



2 The non-amenability of $\mathscr{K}(\ell_p \oplus c_0)$ and $\mathscr{K}(\ell_p \oplus \ell_1)$

In this section we shall complete the results obtained in [4, §6] on the amenability of $\mathscr{K}(\ell_p \oplus c_0)$ and $\mathscr{K}(\ell_p \oplus \ell_q)$ for $p, q \in [1, \infty]$. Indeed, Grønbæk, Johnson, and Willis show that

(i) $\mathscr{K}(\ell_p \oplus \ell_2)$ is amenable for $1 < p < \infty$;

(ii) $\mathscr{K}(\ell_p \oplus \ell_q)$ is not amenable for distinct $p, q \in]1, \infty[\setminus \{2\}$;

(iii) $\mathscr{K}(\ell_p \oplus c_0)$ is not amenable for $p < 2$;

(iv) $\mathscr{K}(\ell_p \oplus \ell_1)$ is not amenable for $p > 2$.

(See [4, Theorem 6.4, Theorem 6.9, and the comments following them].) We shall build on their arguments to settle the remaining cases in (iii) and (iv).

The identity operator on a Banach space $\mathfrak{X}$ is denoted by $I_{\mathfrak{X}}$ or just I, when no reference to the underlying space is required.

Theorem 2.1 (i) *The Banach algebra $\mathscr{K}(\ell_p \oplus c_0)$ is not amenable for $1 \leq p < \infty$.*

(ii) *The Banach algebra $\mathscr{K}(\ell_p \oplus \ell_1)$ is not amenable for $1 < p < \infty$.*

Proof. To enable a unified treatment, we set $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := (\ell_p, c_0)$, where $1 \leq p < \infty$, or $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) := (\ell_p, \ell_1)$, where $1 < p < \infty$. For each $n \in \mathbb{N}$, denote by $\mathfrak{X}_n$ and $\mathfrak{Y}_n$ the linear span of the first n standard basis vectors of $\mathfrak{X}$ and $\mathfrak{Y}$, respectively. Assume towards a contradiction that $\mathscr{K}(\mathfrak{X} \oplus \mathfrak{Y})$ is amenable. Then, as in the proof of [4, Theorem 6.9], there is a constant $K > 0$ such that at least one of the following two assertions is true.

(a) For each $n \in \mathbb{N}$, there are operators $U_n \colon \mathfrak{Y}_n \to \mathfrak{X}$ and $V_n \colon \mathfrak{X} \to \mathfrak{Y}_n$ such that $I_{\mathfrak{Y}_n} = V_n U_n$ and $\|V_n\| \|U_n\| \leq K$.

(b) For each $n \in \mathbb{N}$, there are operators $U_n \colon \mathfrak{X}_n \to \mathfrak{Y}$ and $V_n \colon \mathfrak{Y} \to \mathfrak{X}_n$ such that $I_{\mathfrak{X}_n} = V_n U_n$ and $\|V_n\| \|U_n\| \leq K$.

(In the case where $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = (\ell_1, c_0)$, this requires the additional observation that each element $(\alpha_k) \in \ell_1$ can be written $(\alpha_k) = (\beta_k \gamma_k)$, where $(\beta_k) \in c_0$ with $\|(\beta_k)\|_\infty = 1$ and $\|(\gamma_k)\|_{\ell_1} = \|(\alpha_k)\|_{\ell_1}$. However, this is an easy consequence of the Cohen factorization theorem as stated in [2, Theorem 2.9.24], for example.)

Assertion (a) is seen to be impossible by type/cotype considerations similar to those presented in [4]. Indeed, in the case where $\mathfrak{Y} = c_0$, (a) implies that $\mathfrak{X}$ cannot have finite cotype, contradicting that ℓ_p has cotype $\max\{2, p\}$ for $1 \leq p < \infty$ (e.g., see [3, Remark 11.5(g) and p. 283]); and in the case where $\mathfrak{Y} = \ell_1$, (a) implies that $\mathfrak{X}$ has type 1, contradicting that ℓ_p has type $\min\{2, p\}$ for $1 < p < \infty$ (e.g., see [3, Remark 11.5(g) and p. 260]).

Hence assertion (b) must hold. We first deal with the case where $(\mathfrak{X}, \mathfrak{Y}) = (\ell_p, \ell_1)$ with $1 < p < \infty$. It is a standard fact that there is a constant $K_p > 0$, depending on p only, such that, for each $n \in \mathbb{N}$, there are operators $S_n \colon \ell_2^n \to \ell_p^{m}$ and $T_n \colon \ell_p^{m} \to \ell_2^n$ with $T_n S_n = I_{\ell_2^n}$

Figur 4. Linieret blok og LaTeX version: "Hvis jeg tror på at noget virker så tager jeg så et andet stykke papir og skriver det sådan lidt pænere op og prøver på at tjekke om detaljerne hænger sammen. … Så på et tidspunkt, der hvor jeg så prøver at skrive flest muligt detaljer ned for virkeligt at se at der her nu er rigtigt at der ikke er et hul et eller andet sted, og så når jeg så er tilfreds med det så kommer det så ind i computeren på et tidspunkt, men det er så i langt kortere form, altså for at passe til en artikel".

Resultaterne af undersøgelsen pegede på at der er fem vigtige funktioner som skrivning støtter. De fem funktioner er *(1) heuristisk treatment, (2) kontrol treatment, (3) at gemme information, (4) kommunikation, og (5) produktion,* nedenfor gennemgås funktionerne en for en.

Heuristisk treatment er eksemplificeret ved arbejdspapiret afbilledet i figur 3. Denne funktion betegner anvendelsen af eksterne repræsentationer til at støtte ide-udvikling og er karakteriseret ved at arbejdspapirerne støtter her og nu tankegang og derfor sjældent gemmes. Arbejdspapiret der er afbilledet til venstre på figur 4 kan siges at støtte funktionerne kontrol treatment og at gemme information. Jeg siger at arbejdspapiret støtter kontrol treatment fordi de detaljerede beregninger og den logiske linie i argumentationen er støttet af dette arbejdspapir. Respondenten er slet ikke sikker på sine konklusioner før han har skrevet det ned på de linierede indskrivningspapir. De linierede ark gemmes i et arkiv af A4 mapper, og derfor støtter disse papirer funktionen at gemme information. Kladde papiret (figur 3) er stærkt personligt og vil ikke blive vist til andre, derimod kan det godt ske at indskrivningen på de linierede ark vises til samarbejdspartnere og kolleger, dvs. støtter kommunikationsfunktionen. LaTeX dokumentet (figur 4 til højre) støtter også kommunikationsfunktionen, men det egentlige motiv for at skrive resultaterne ind i LaTeX er at producere et forskningspapir.

Det var tydeligt fra undersøgelsen at alle de interviewede brugte håndskrift til at støtte heuristisk treatment. De fleste foretrak også det medie til at støtte kontrol treatment, men tre af de elleve der blev interviewet brugte også computerværktøjer til at støtte kontrol treatment. Omkring halvdelen af de interviewede gemte konsekvent håndskrevne kladder, fælles for dem var at der var et vist overlap imellem den skrivning de anvendte til kontrol treatment og til at gemme information. Fælles for dem der hovedsageligt gemte deres skriftlige arbejde i elektronisk form var en mere cyklisk skriveproces hvor der konstant veksles imellem arbejde med blyant og papir, især udskrifter, og løbende indskrivning i LaTeX.

Skriveproces og matematik

Hvordan kan de to funktioner heuristisk treatment og kontrol treatment fortolkes teoretisk? At skriveprocessen i sig selv kan spille ind på dannelsen af nye ideer er undersøgt i forbindelse med almindelige alfabetiske skriveprocesser. To væsentlige og til dels modstridende ideer om hvordan skriveprocesser kan give anledning ny viden kan beskrives som ideen om skrivning som en retorisk problemløsningsproces og skrivning som en opdagelsesproces.

Hvis skrivning betragtes som en retorisk problemløsningsproces tillægges den viden der skabes i denne proces forfatterens evne til at sætte sig i en potentiel læsers sted i formuleringsprocessen (Flower & Haynes, 1982; Bereiter & Scardamalia, 1987). At formulere sig forståeligt for andre kan således henlede forfatterens opmærksomhed på utilstrækkeligheder i den viden han forsøger at formulere.

Betragtes skrivning derimod som en opdagelsesproces så vil den genererede viden tillægges en mere direkte interaktion imellem de skrevne og forfatteren. Det betyder at når en sætning, et ord eller en side er skrevet så vil den provokere forfatteren til at tænke videre, tænke konfliktende påstande osv. Set således vil enhver skriveproces have et element af opdagelsesprocess i sig og de eksterne repræsentationer som skrives er netop det der faciliteter denne proces.

Det er en rimelig hypotese at den funktion der betegnes med heuristisk treatment langt hen ad vejen er en opdagende skriveproces. Når matematikerne sætter ord på skrivning der støtter heuristisk treatment handler det om at se sammenhænge, støtte her og nu tanker og prøve ideer af. Det er sjældent at arbejdspapirer der støtter heuristisk treatment gemmes eller vises til andre. Og derfor er det rimeligt se den vidensskabelse der sker i forbindelse med heuristisk treatment som hovedsageligt hidrørende fra en ret direkte interaktion imellem det tænkte og det skrevne.

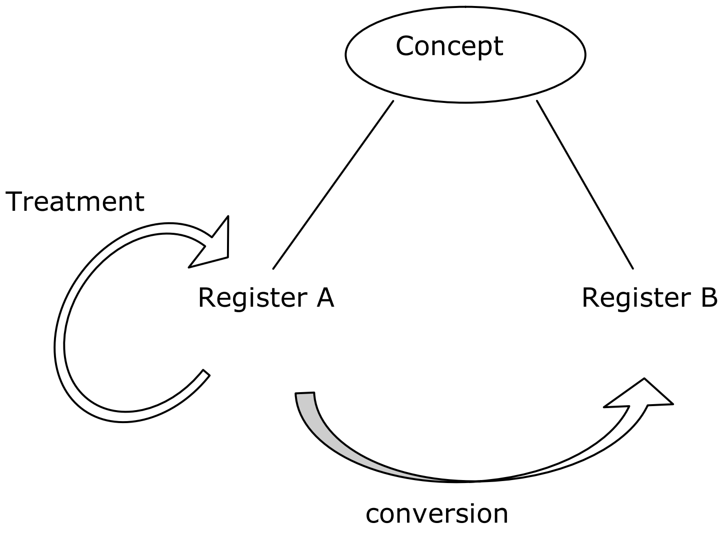
I modsætning til heuristisk treatment er funktionen kontrol treatment karekteriseret af en mere grundig og præcis omgang med skriftlig matematik. Her anvendes regneregler og kæder af logisk argumentation til målrettet at skabe matematisk viden. Det kan diskuteres om denne proces kan ses som en retorisk drevet problemløsningsproces, drevet af matematikerens/forfatterens evne til at sætte sig i en potentiel læsers sted, men det er sikker at denne type skrivning i langt højere grad er afhængig af de genre bestemte regneregler og mere generelt regler for matematisk diskurs en den heuristiske treatment er.

Tegn og tanke

Hvis den direkte interaktion imellem eksterne repræsentationer og tænkning er vigtig i forbindelse med matematik så lad os se nærmere på den. Semiotik tilbyder en måde at se på eksterne repræsentationer på.

Inden for semiotik er det centrale begreb tegnet. Et tegn består af en materiel *betegner* der betegner noget: det *betegnede* (Sassure, 1966). Tegn kommer ofte i tegn-systemer. Systemer af tegn kan for eksempel være ordene, tallene, vejskilte osv. Raymond Duval (2000) taler om en bestemt type af tegnsystemer, nemlig registre. Et register er et tegnsystem hvor det er muligt at udføre treatments (bemærk at dette begreb nok er beslægtet med men ikke lig heuristisk treatment og kontrol treatment) og conversioner til andre registre. Treatments er transformationer af tegn der foregår inden for det samme tegnsystem. Som eksempel kan nævnes at løse et ligningssystem som fx $2x-3=y$ *og* $x+1=y$ ved at gennemføre manipulationer som $2x-3=x+1$ og efterfølgende $x=4$, hvorfor $y=4+1=5$. Disse transformationer foregår inden for det *algebraiske register*. Problemet kan også angribes ved at foretage en conversion til registret af kartesiske grafer. De to ligninger repræsenteres her ved to rette linier og skæringspunktet $(4,5)$ er løsning til problemet.

Samspillet imellem matematisk begrebsdannelse og semiotiske repræsentationer (i.e. tegn) beskrives af Duval med følgende figur (Duval, 2000)



Figur 5: From Duval (2000) figure 6.

det er en vigtig pointe hos Duval at registerskift/conversion er essentielt for begrebsforståelsen, lidt forsimplet kan hans figur udlægges sådan at et matematisk begreb, i hans teori ikke er en afgrænset kognitiv enhed, men snarere en afart af frihedsgrader overfor forskellige repræsentationer af "det samme".
Raymond Duval har undersøgt empirisk hvor vanskelige forskelige conversioner/registerskift er for gymnasieelever. Han finder for eksempel at det er langt vanskeligere for elever at finde ligningen hørende til en ret linie end det er at gå den anden vej og tegne grafen for en lineær funktion. På den baggrund udvikler Duval begreberne congruente og noncongruente conversioner. En congruent conversion defineres som en conversion hvor repræsentationen i det register der skiftes fra er umiddelbart genkendelig i det register der skiftes til. Et typisk eksempel på at en conversion er congruent hhv. non congruent er spørgsmålet om rækkefølgen af tegn er bevaret ved registerskift som fx overgangen fra en opgave formuleret i naturligt sprog til at sætte en ligning op.
Som et vigtigt eksempel på et register vil vi her se på kommutative diagrammer, der er en type af matematiske repræsentationer der anvendes meget inden for abstrakt matematik. Kommutative diagrammer anvendes til at repræsentere afbildninger fx imellem algebraiske strukturer eller geometriske/topologiske rum. Figur X viser at f er en afbildning fra X til Y, g en afbildning fra A til B, φ en fra X til A og endelig ψ en fra Y til B. at diagrammet er kommutativt betyder at $g \circ \varphi = \psi \circ f$.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & Y \arrow[d, "\psi"] \\ A \arrow[r, "g"] & B \end{tikzcd}$$

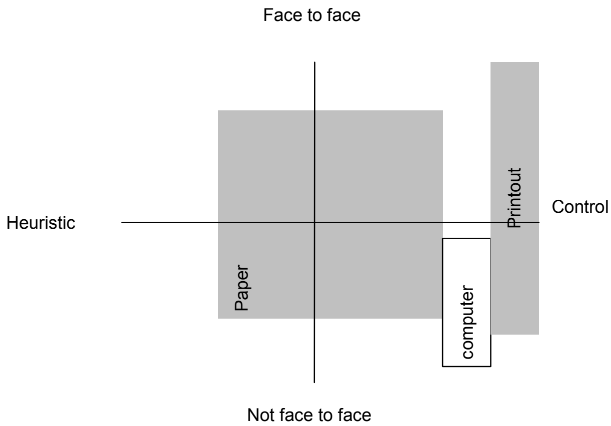
Figur 6: et kommutativt diagram.

At komutative diagrammer faktisk udgør et register kommer ud på om det er muligt at udføre treatments indenfor registret og om conversion til et andet register er muligt. Det er oplagt muligt at skifte til et andet register, de to linier lige over Figur X er netop en anden repræsentation af det samme system af afbildninger og rum. At det faktisk er muligt at gennemføre treatments vil jeg ikke gøre rede for her se evt. (Misfeldt 2004). Det er en vigtig pointe at det typisk ikke er muligt at lave en congruent conversion imellem registret af kommutative diagrammer og et helt lineært register, diagrammet har fx ikke nogen start og slutning.

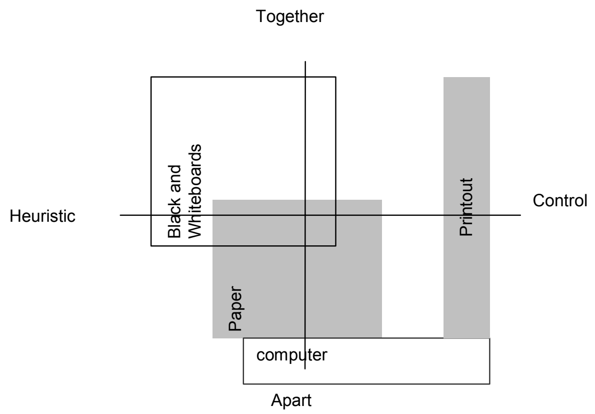
Registret af kommutative diagrammer viser nogle helt andre egenskaber end typiske lineære repræsentationer. Hele systemer af afbildninger og rum kan ved hjælp af kommutative diagrammer betragtes som ét objekt, og dermed åbner dette register op for en helt ny måde at anskue systemer af afbildninger imellem rum på. Sideløbende med introduktionen af kommutative diagrammer indenfor matematik ses da også fremvæksten af en helt ny disciplin, nemlig kategori-teori (Mac Lane, 1971).

Studerendes fælles skrivning
Matematisk skrivning udfolder sig også i sociale fællesskaber, under matematiske diskussioner skrives der ofte flittigt og typisk er det der bliver skrevet en vigtig del af meningsdannelsen i kommunikationen. Derfor omhandler den anden empiriske undersøgelse skrivning i forbindelse med matematiske samtaler. Den empiriske setting er et andet års kursus på Københavns Universitet hvor de studerende som en del af deres eksamen skriver nogle korte temaopgaver i mindre grupper (Grønbæk, Misfeldt Winsløw, to appear). Den empiriske tilgang var video observation af to gruppers møder, samt et dagbogsstudie.
Der var tre væsentlige temaer der blev observeret i de studerendes samarbejde: brugen af gestikulering til at pege på matematiske begreber, de studerendes måde at koordinere deres arbejde på og et fænomen jeg har betegnet med nedbrud i samtale. Fænomenet betegner at de studerendes samtaler nogle gange udfordres af at fx en af de studerende vil arbejde tilbagetrukket fra gruppen. Ved at nærstudere en videooptagelse af et eksempel på nedbrud i samtale, ses det at skrivning har to vigtige men konfliktende funktioner i matematisk skrivning: en ostensiv funktion, det vil sige skrivning der benyttes til at vise de andre i gruppen noget, og en privat funktion der støtter skabelsen af et privat rum i forbindelse med den matematiske samtale. Udfra data er det en rimelig hypotese at nedbrud i samtale hænger sammen med at de to funktioner, privat og ostensiv, sammenblandes.

Matematik medier og møder
Ved at sammenligne resultaterne fra de to undersøgelser kan man få et indblik i forskellen på hvordan de professionelle matematikere og de studerende samarbejder. Adspurgt udtrykker de professionelle matematikere at de er vigtigt at være ansigt til ansigt i visse dele af det matematiske samarbejde. Samtidigt fortæller de at der bestemt også er dele af forskningsprocessen der gøres bedst alene. Nogle matematikere forklarer at de tager eksplicit hensyn til at de skal være sammen i forbindelse med opstart et projekt. Men samtidigt er det vigtigt at kunne arbejde hver for sig i forbindelse med fælles projekter. Hvis vi ser på hvilke medier de forskellige matematikere bruger til at støtte individuelt og kollaborativt arbejde, får vi følgende to billeder:



Figur 7: De studerendes medie brug, papir anvendes til at støtte mange funktioner. Computeren anvendes udelukkende i private arbejdssituationer, og kun til indskrivning.



Figur 8: Forskeres medie brug. Bemærk at forskerne ofte anvender tavle til at støtte fælles skrivning.

Den mere differentierede anvendelse af medier man finder hos forskerne kan måske være inspiration til at undervise mere direkte i samarbejdsstrategier omkring matematik.

Konklusion

I dette paper har jeg forsøgt at fremlægge mit ph.d. projekt. For en fyldestgørende redegørelse for arbejdet henvises til afhandlingen (Misfeldt 2006).

De væsentligste bidrag fra afhandlingen kan opsummere som en taksonomi af funktioner der beskriver den matematiske skriveproces og viden om hvilke medier der støtter disse funktioner. Vi har set at håndskrift er meget anvendt i forbindelse med matematisk skrivning der støtter tænkning. Vi har set at skrivning spiller en central men ikke uproblematisk rolle i forbindelse med studerendes samarbejde og set at de fysiske rammer som at have tavler, kan have indflydelse på mulighederne for at samarbejde om matematik.

Litteratur

Bereiter, C., & Scardamalia, M. (1987). *The Psychology of Written Composition*. Hilsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum.

Duval, R. (2000). *Basic Issues for Research in Mathematics Education.* Paper presented at the The 24 th. Conference of Psychology of Mathematics Education, Hiroshima, Japan.

Flower, L. S., & Haynes, J. R. (1980). The Cognition of Discovery: Defining a Rhetorical Problem. *College Composition and Communication, 31*, 21-32.

Grønbæk, N., Misfeldt, M., Winsløw, C. (to appear). Assessment and contract-like relationships in undergraduate mathematics education. In O. S. e. al. (Ed.), *University science and Mathematics Education. Challenges and possibilities.*

Guzdial, M., Lodovice, P., Realf, M., Morley, T., & Carroll, K. (2002). *When Collaboration Doesn't Work.* Paper presented at the The 5th. International Conference of the Learning Sciences, Seattle.

Mac Lane, S. (1971). *Categories for the Working Mathematician*. New York: Springer Verlag.

Misfeldt, M. (2004). Computers as Media for Mathematical Writing: a model for semiotic analysis. Plenary address in Topic Study Group 25, on Language and Communication, ICME 10, DTU Copenhagen. Available from http://www.icme-10.dk/.

Misfeldt, M (2006). *Mathematical Writing.* Ph.D. Dissertation, The Danish University of Education.

Sande, A. (2005). DELTA - matematikk på nett fra NTNU, foredrag ved Navemberkonferensen, NTNU Tronheim.

Saussure, D. (1966, 1916). *Course in general linguistics*. New York: McGraw-Hill.

Scardamalia, M., & Bereiter, C. (1993). Tecnologies for Knowledge Building Discourse. *Communications of the ACM, 36*(5), 37-42.

Øistein Gjøvik er Cand. Scient med hovedfag i matematikk fra NTNU, 2002. Han har siden da jobbet som lektor ved ved Hetland videregående skole, Stavanger og som høgskolelektor ved Høgskolen i Sør-Trøndelag, avdeling for lærer- og tolkeutdanning. Han har også undervist ved NKI Fjernundervisningen siden 2000. Nå har han begynt på et stipendiat i matematikkdidaktikk knyttet til parAbel-prosjektet ved HiA. Interesseområder er bruk av IKT i matematikkundervisningen og forskning.
Hvordan benytte IKT på en mest mulig hensiktsmessig måte i undervisningen?

Funksjoner og algebra ”live” i klasserommet med dynamisk programvare

Programvare beregnet til bruk i matematikk og matematikkundervisning har vært tilgjengelig en god stund. Vi kan dele disse programmene inn i noen hovedgrupper, geometriprogrammer, regneark og CAS-verktøy (Computer algebra software). Det er ikke klare skiller mellom disse, for eksempel kan det være regneark innbygd i CAS-programmene. Nedlastinger og eksempler på alle disse typene finner dere lenker til bakerst i dokumentet.
CAS-verktøy er den gruppen som foreløpig har minst utbredelse i skolen i Norge. Dette er programmer som støtter symbolbehandling og som regel har de også muligheter for å behandle funksjoner og å lage grafiske framstillinger. Noen kalkulatorer har også muligheten for symbolbehandling, eksempler på slike er CASIO Classpad og TI Titanium.
Jeg skal nå vise noen eksempler med CAS-programmet TI Interactive! viser her noen eksempler for TI Interactive!.

Kort om programmet TI Interactive!

Å kunne se forandringer umiddelbart, og å være interaktiv med et dokument er noe som brukere av geometrisk programvare og regneark er kjente med. Dokumentene er hele tiden dynamiske, slik at endringer et sted påvirker det som er avhengig av endringene andre steder. I CAS-programmet TI Interactive! har vi imidlertid en frisk måte å se dynamikk på også i algebra og funksjonslære. Uttrykk og grafer er ”levende” slik at endringer i for eksempel en funksjon et sted, vil føre til at grafen til denne automatisk oppdateres.
TI Interactive! er ment å være relativt selvinstruerende, slik at man kan komme i gang på egen hånd. Kort fortalt er dette et program som gir deg muligheten til å lage interaktive dokumenter eller arbeidsark, der de matematiske hovedområdene er algebra, funksjonslære, tallære og statistikk.
Det kan være flere bruksområder for slike interaktive dokumenter. Å illustrere en formel eller et begrep er en mulighet. Vi kan da lage et dokument som for eksempel viser sammenhengen mellom en sinuskurve og enhetssirkelen. Eller vi kan lage et dokument som viser hvordan tangenten til en graf forandrer seg etter hvert som vi beveger oss langs grafen. En annen mulighet er å lage aktiviteter med innlagte arbeidsoppgaver for elevene. TI Interactive!-dokumentene kan lastes ned på elevenes datamaskin hjemme og utføres hvor som helst.
De tre eksemplene jeg vil trekke fram her, viser for det første muligheten til å importere datalister fra Internett og utføre regresjoner og analyser på disse. Dernest følger et eksempel på hvordan man kan bruke dynamikken i programmet til å se sammenhenger mellom matematiske uttrykk. Til sist kommer et eksempel på hvordan man kan formulere og løse oppgaver med CAS-verktøy.

Regresjon med data fra Internett

TI Interactive! har en innebygd nettleser man kan bruke for å finne datakilder på nettet. Slike fins det jo mange av, for eksempel fra Statistisk sentralbyrå. Man kan merke et datasett og hente det inn i TI Interactive! for å kunne analysere det.

Temperatur-sammenlikning

Målt på Flesland og Tyholt:

Mnd	Tyholt	Flesland
1	-3.2	0.8
2	-2.5	0.7
3	0	2.3
4	3.2	4.8
5	8.7	9.3
6	12	12.1
7	13.1	13.3
8	13	13.3
9	9.3	10.6
10	5.8	8
11	0.7	3.9
12	-1.6	1.8

Utfører to sinus-regresjoner for å finne ut hvordan temperaturene svinger gjennom ett år på Flesland og Tyholt:

Flesland:

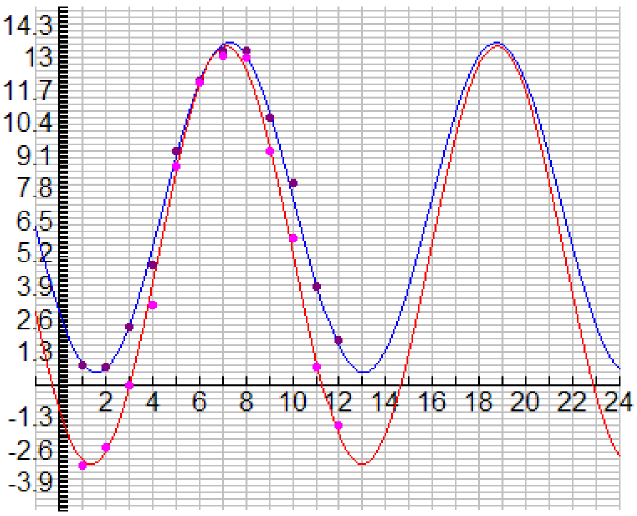
Sinusoidal Regression

regEQ2(x) = 8.29546*sin(.542965*x+-2.32505)+5.15401

Tyholt:

Sinusoidal Regression

regEQ(x) = 6.54874*sin(.552*x+-2.47254)+7.04668



Hva sier dette oss om middeltemperaturene i Bergen og Trondheim? Hvor er vintrene hardest?

Her ser vi at vi kan sette inn både datasettet, regresjonsfunksjonene og grafen til disse i ett og samme dokument. Et viktig poeng her er at fokus flyttes fra det å være i stand til å utføre matematikken til det å kunne se hva matematikken gjør oss i stand til å tolke. Regresjoner (og flere typer av disse) har vært del av pensum i matematikk i videregående skole, og kommer fortsatt til å stå sentralt.

Dynamiske brytere

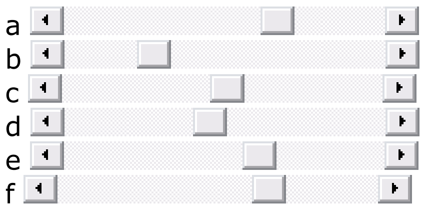
En mulighet som har blitt godt mottatt i TI Interactive! er det å justere variabler med glidebrytere. Dette støtter også oppunder et av de viktigste konseptene i matematikken, det å se hva som er avhengige og uavhengige variabler, eller hva som er en funksjon av hva. I aktiviteten gjengitt nedenfor ser du hvordan parametrene til to funksjoner justeres og grafen til summen av de to funksjonene oppdateres også automatisk. Funksjonene *g(x)* og *h(x)* i eksemplet kan endres til hva som helst. Dette kan være interessant å trekke inn da det ofte er slik at fenomener (fysiske, økonomiske, biologiske…) er sammensatt av flere funksjonsuttrykk. Glidebrytere gir oss fin anledning til å få en "følelse" av matematiske konsepter på en ny måte, en måte å oppleve funksjoner og variabelsammenhenger på.

En måte å se sammenhengen i addisjon av funksjoner

Definer først en funksjon sammensatt av to andre,

$g(x) := d\cdot\sin(e\cdot x - f)$ og $h(x) := a\cdot\sin(b\cdot x - c)$.

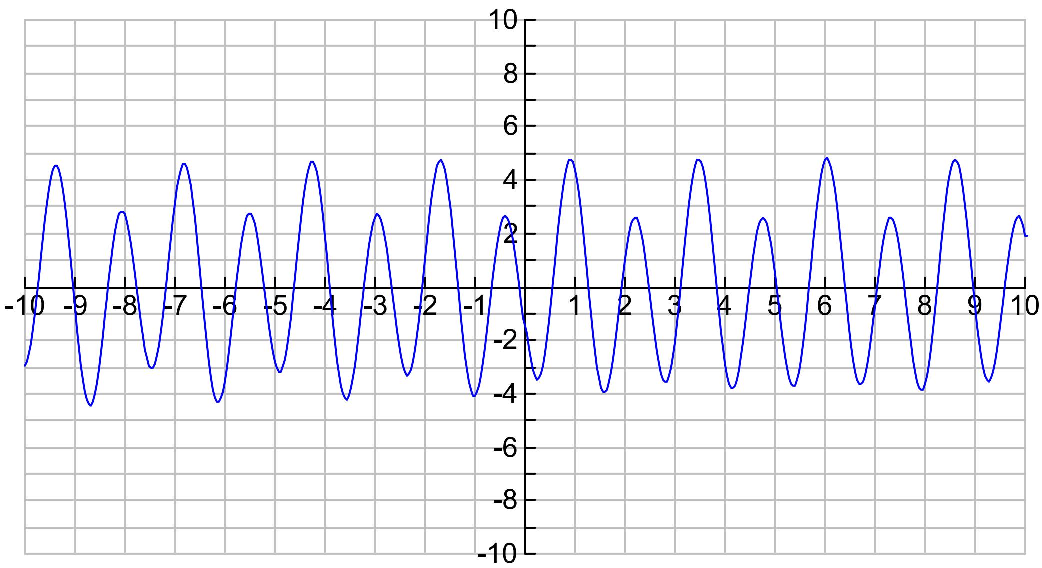
Juster parametrene ved å dra i disse glidebryterne:



Får da uttrykkene $g(x)$ $-1.1\cdot\sin(2.4\cdot x - 3.5)$ og $h(x)$ $-3.7\cdot\sin(4.9\cdot x + .3)$.

... og så tegner vi til slutt grafen for summen av disse to:

$i(x) := g(x) + h(x)$ "Done"



Prøv med andre funksjoner, f.eks. h(x)=d*x^2 el.l.

En CAS-aktivitet

Til slutt skal vi se et eksempel der vi bruker de symbolbehandlende mulighetene i programmet. Her ser vi hvordan man kan lage et opplegg der både instruksjoner og besvarelser og grafisk illustrasjon er inkludert i dokumentet. Funksjonen kan endres slik at man først kan se at en påstand stemmer for en del bestemte funksjoner, mens man senere kan vise ved algebra (som er litt tungvint å gjøre for hånd) at påstanden gjelder generelt.

Et sammentreff med tredjegradsfunksjoner[12]

Vi definerer først en tredjegradsfunksjon. Denne kan vi endre senere.

$f(x) := 2 \cdot x^3 + 6 \cdot x^2 - 4.5 \cdot x - 13.5$

Vi trenger å vite hvor vi finner nullpunktene til denne. Dette er fort gjort:

$\text{zeros}(f(x), x) \quad \{-3, -1.5, 1.5\}$

Vi tegner så inn tangentlinjen til funksjonen ved middelverdien av to av røttene:

$$\frac{-1.5 + 1.5}{2} \rightarrow x1 \qquad 0.$$

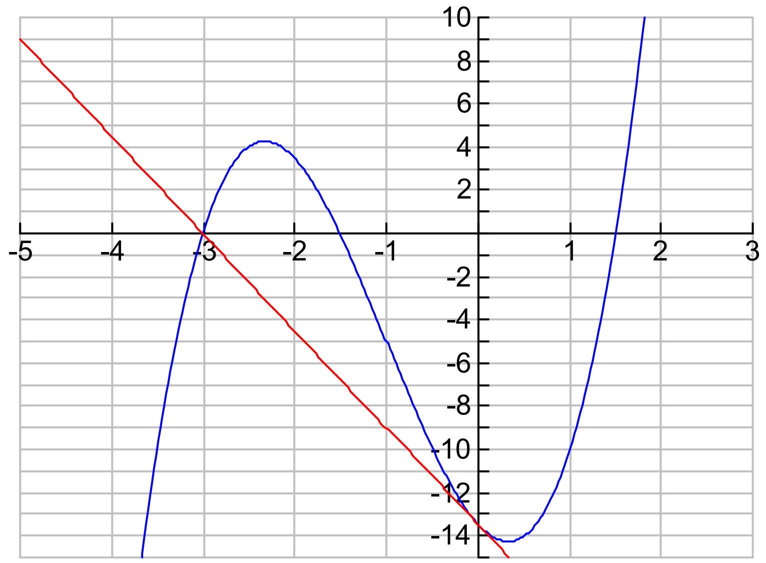
Vi har da altså punktet vi skal ha tangenten i, nemlig $(x1, f(x1))$. Vi trenger også stigningstallet: Det finner vi raskt ved derivasjon

$$\frac{d}{dx}(f(x)) \mid x = x1 \rightarrow m \qquad -4.5$$

Vi kan da sette opp funksjonsuttrykket *t(x)* for tangenten:

$t(x) := m \cdot (x - x1) + f(x1)$

Tegner så opp funksjonen og tangenten i et koordinatsystem:



Ser du noe spesielt med denne grafiske fremstillingen?

[12] Denne aktiviteten er opprinnelig utformet av Sally Fishbeck (Rochester Institute of Technology) og Ray Barton (Olympus High School)

Oppgaver:

1. Gå tilbake og prøv å gjenta prosessen med to andre røtter.
2. Prøv og finn ditt eget polynom med tre røtter (forskjellige røtter) og gjør det samme.
3. Vis at det generelt er slik.

Løsningsforslag til Oppgave 3:

Definerer først en funksjon som har nullpunktene a, b og c.

$f(x) := k\cdot(x - a)\cdot(x - b)\cdot(x - c)$ "Done"

Utvider denne:

$\text{expand}(f(x))$ $k\cdot x^3 - a\cdot k\cdot x^2 - b\cdot k\cdot x^2 - c\cdot k\cdot x^2 + a\cdot b\cdot k\cdot x + a\cdot c\cdot k\cdot x + b\cdot c\cdot k\cdot x - a\cdot b\cdot c\cdot k$

Lagrer så middelverdien av to av nullpunktene i variabelen x1: $\frac{a+b}{2} \to x1$

Vi skal finne likningen for tangenten som går gjennom punktet x1,f(x1). Deriverer da f for å finne stigningstallet, og lagrer stigningstallet som m:

$\frac{d}{dx}(f(x)) \mid x = x1 \to m$ $\frac{-(a^2 - 2\cdot a\cdot b + b^2)\cdot k}{4}$

Tangenten har da likningen: $t(x) := m\cdot(x - x1) + f(x1)$ "Done"

Til slutt ser vi at denne tangenten skjærer y-aksen i det tredje nullpunktet til funksjonen (Vi tok utgangspunkt i a og b):

$\text{zeros}(t(x), x)$ $\{c\}$

Lenker:

Eksemplene nevnt ovenfor kan lastes ned fra http://ti.oisteing.com

CAS-verktøy :

Scientific-serien : http://www.mackichan.com/
Mathcad: http://www.mathcad.com/
TI Interactive!:
http://education.ti.com/educationportal/sites/US/productDetail/us_ti_interactive.html
Casio Classpad: http://www.classpad.org/index.php

Regneark:

Microsoft Excel :
http://office.microsoft.com/en-us/FX010858001033.aspx
StarOffice: http://www.sun.com/software/star/staroffice/index.jsp

Geometriprogrammer:

Cabri Geometry II+ : http://www.chartwellyorke.com/cabri.html
Geometer's Sketchpad: http://www.keypress.com/sketchpad/
Cinderella: http://cinderella.de/tiki-index.php
GeoNext: http://geonext.uni-bayreuth.de/
Geogebra: http://www.geogebra.at/

Andre lenker:

Statistisk sentralbyrå: http://www.ssb.no/
Alfasoft (forhandlere): http://www.alfasoft.no

Anna Kristjánsdóttir
skrev i 1972 sin hovedopgave om brug af datamaskiner i matematik læring for 13-18 årige. Hun initierede i 1978 til og ledte til 1986 undervisningen om brug af IT i fagene for lærere og lærerstuderende i Island. Hun har udforsket brug af IKT i matematik læring og undervisning på mange måder. Anna Kristjánsdóttir er ansat ved Høgskolen i Agder fra 2002 og inden for flere af hendes forskningsprojekter spiller IKT en væsentlig rolle.

Forskellige perspektiver på IKT i matematikundervisning støtter forskellige muligheder

Anna Kristjánsdóttir professor
Høgskolen i Agder og
Islands Pædagogiske Universitet

Abstrakt:

Det er ikke nyt, men til stadig tiltagende, at læseplaner indeholder mål for skolen angående brug af IKT i matematikundervisningen. En mængde undersøgelser viser alligevel at denne brug er lille, især på ungdomstrinet. Der gives i artikkelen en kort udviklingshistorisk oversigt. Endvidere rapporteres fra en omfattende undersøgelse blandt lærere og elever og det analyseres hvilke lærere det er som ifølge disse resultater bruger IKT regelmæssigt i sin matematikundervisning. Som redskab for analyse af situation i udviklingen, og mulige retninger, præsenteres der tre forskellige perspektiver på IKT i matematikundervisningen, eksistens-perspektiv, integrerings-perspektiv og elev-perpektiv. Det understreges at for at imødekomme ønsker om brug af IKT i matematikundervisningen må skoler være inde i en fase som kan betegnes som lærende organisationer, ikke kun en samling af lærende individer.

Indledning

Det norske Matematikksenters novemberkonference 2005 har sat fokus på *Brug af IKT i matematikundervisningen – muligheder og begrænsninger.* Et aktuelt tema og vigtigt for skolen, som nu står over for nye læseplaner fra og med skoleåret 2006-2007, hvor digitale kompetencer bliver blandt de grundlæggende færdigheder. Men er ikke dette tema allerede fremkommet i et eller andet format adskillige gange over en længere tidsperiode inden for Norge såvel som i andre lande? Der har været mange begrundelser for nødvendigheden af at gentage engageringsprocessen blandt lærere, så som at der ikke har været tilstrækkelig udstyr på skolerne. I skoleåret 2005-2006 er der 6,3 elever per datamaskine i gennemsnit i Norge, mens tallet var 8,1 året før (Utdanningsstatistikk, 2005). Udstyr i den udstrækning kan man bruge til mangfoldig læring. Men samtidig fremgår det af ITU Monitor 2005 at elever i norske skoler kun i ringe grad bruger datamaskiner og brugen har ikke tiltaget fra 2003. Over 70% af elever på 7.-9. klassetrin bruger datamaskiner mindre end en time i ugen i skolen. Der må være noget andet man bør se på end mangel på udstyr. Michèle Artigue (1998) har identificeret nogle levedygtige hindringer for integrering af IKT i matematikundervisningen i Frankrig og nævner specielt det som hun kalder datateknikens begrænsede legitimitet i uddannelse, undervurderingen af datamaskinernes transpositive processer og modstriden mellem den tekniske dimension og den begrebsmæssige dimension i matematisk aktivitet.

Rapporten *E-learning Nordic 2006* (Rambøll Management, 2006) taler om at lærerne har et behov for en høj grad af tryghed før de integrerer IT i deres undervisning (s. 88). [Den danske betegnelse er IT, den norske IKT]. Der står også at selv om to tredjedele af de nordiske lærere, som undersøgelsen når ud til, har deltaget i kompetenceudvikling inden for de sidste tre år, er der kun een tredjedel som føler sig sikker i forhold til anvendelsen af IT (s. 79). Lærere som oplever den største positive effekt af IT, anvender IT på de mest projektorienterede, samarbejdsorienterede og eksperimenterende måder (s. 62). Der er indikationer på at skoleledernes ansvar og muligheder for at påvirke i hvilken udstrækning potentialet i IT udnyttes er vigtig (s. 50). Og undersøgelsen viser at lærerne er mere fokuserede på at anvende IT når det understøtter det faglige indhold i deres undervisning end de er på at anvende IT til at understøtte deres pædagogiske metoder (s. 48). Samtidig viser undersøgelsen at resultaterne indikerer at jo mere IT anvendes, desto større er effekten (s. 40).

Der stilles store forventninger til udviklingen i disse år og disse kommer godt til udtryk i *Program for digital kompetanse 2004-2008* (UDF, 2004). Målet er, at senest i 2008 skal digital kompetence stå centralt i oplæringen på alle niveauer (s.7). Inden 2008 skal alle norske uddannelsesinstitutioner udnytte IKTpå en pædagogisk og innovativ måde i læringsarbejdet. Inden udgangen af 2008 skal faglig og pædagogisk personale i undervisningssektoren – herunder skoleledere – være digitalt kompetente og lærere og lærende skal have den digitale kompetence til at kunne efterspørge, udnytte og være medudviklere af digitale læringsresurser (s. 32). Det er høje mål, men hvor realistiske og hvor stimulerende er de til et fagligt engagement? Før jeg nærmer mig det spørgsmål er det vigtigt at se på hvor ny brugen af IKT i matematikundervisningen egentlig er.

Hvor ny er IKT i matematikundervisningen?

Den nye læseplan for den norske skole, som snart træder i kraft, er ikke den første som lægger vægt på brug af IKT inden for matematikundervisningen, selvom betegnelsen til stadighed ændres. M87 inspirerede til brug af regneark, visualisering af lærestoffet i matematik og simuleringer. L97 giver en stor mængde indslag på hvordan IKT kan og bør bruges i matematikundervisningen, både inden for forskellige dele af matematikken og i arbejdet med elever på forskellige alderstrin. Ganske vist bruges ikke betegnelsen IKT, men der tales om teknologi, datamaskiner, informationsteknologi og elektroniske hjælpemidler. Det er tydeligt at sigtet er mod at integrere brug af disse naturligt i matematikundervisningen. En udførlig evaluering af matematikfaget som eksempel på de ændringer og den udvikling som er tilknyttet L97-reformen, er blevet foretaget (Alseth, Breiteig, Brekke, 2003). I denne rapport sammenlignes kort (s. 37-40) hvordan brug af IKT i matematikundervisningen er blaevet præsenteret i læseplaner. Af uforklarlige årsager mangler der dog i denne rapport en grundig evaluering af indføringen af IKT i matematikundervisningen. Kun to ungdomsskolelærere nævner dette i interviewer, men til trods for at forskerne identificerer det som de kalder stærke præciseringer i L97 og nævner f.eks. udforskning og eksperimentering, praktiske situationer og realistiske problem, kreative evner og fantasi og matematikkens rolle i kultur og videnskab (s. 187), hvilket ud fra mit perspektiv kan alt forstærkes ved brug af IKT, så ser forskerne kun IKT i en meget snæver forstand og under det som de kalder nytteaspektet (s. 188).

Det er, ud fra ovenstående, som om ”IKT i matematikundervisningen” ikke rigtig er nået ind i matematikundervisningen. Dette bekræftes også ved en kursusbeskrivelse som blev fundet velegnet og meget brugt for at ”lancere” L97 blandt lærere (Kleve, Brucker, 1998). Der forekommer IKT-brug inden for matematikundervisningen ikke på programmet, men i en bemærkning nævnes det at hvis regneark skal ind i efteruddannelsen af lærere må der mange steder tilbydes et ”knottekursus” for at få lærerne i gang (lignende det at lære at bruge tastatur og mus). I lyset af at regneark på det tidspunkt havde været generelt tilgængelige i samfundet over en ti års periode og inden for skolens undervisning lige så længe, kan man tvivle stærkt på at denne tilnærmelse ville hjælpe. Bør man undervurdere lærere i den grad at de ikke kan gå direkte ind i en diskussion om meningsfuld brug af regneark i matematikundervisningen samtidig med at udforske reelle muligheder, er der grund til at spørge. Vi har gentagne erfaringer for at regneark kan man umiddelbart tage i brug, hvis opgaverne er meningsfulde, med helt ned til 10-11-årige børn (Kristjánsdóttir, 2000).

Norge er dog ingenlunde det eneste land hvor IKT i matematikundervisningen har haft svært ved at blive taget alvorligt og som en naturlig del af matematikundervisningen. De store bøger som giver oversigt over matematikundervisning, som *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Grouws, 1992) og *International Handbook of Mathematics Education* (Bishop et al., 1996) havde således specielle kapitler om brug af datamaskiner eller IKT og andre om lommeregnere (som jeg vælger at mene bør inkluderes i IKT). Men kapitler som behandlede det matematiske indhold i matematklæring og -undervisning, og forskellige aspekter angående begge dele, var uden berøring med IKT hvis ikke de enkelte forfattere var specielt engageret deri. Det var først med *Handbook of International Research in Mathematics Education* (English, 2002) at IKT blev naturligt integreret i behandlingen af forskellig aspekter inden for matematikundervisningen. Årsagen skal ikke diskuteres her, men vil blive taget op senere i sammenhæng med perspektiver på IKT i matematikundervisningen.

Udvikling af IKT i matematikundervisning – det er vigtigt at kende rødderne

IKT i læring og undervisning har internationalt set en lang historie under mange forskellige navne. Der var allerede tegn på det omkring 1970 i det nordlige Europa. Programmeringssprog kendetegnede 1970'erne, og selvom de ikke var ikke helt enkle at omgås, var det alligevel gennem programmeringssprog at jeg - og sikkert mange flere - blev klar over datamaskinernes muligheder for at udforske matematiske sammenhænge og problemer. **Dette var intet mindre end en milepæl**. Pludselig havde vi et redskab som kunne være vores tjener i at udforske med stor hastighed, arbejde samtidig med en mængde data og sammensætte på et stort antal måder. Dette var tidligere i verdenshistorien helt ukendt i matematiklæring og -undervisning.

Det kan siges at 1980'erne bragte os IKT for matematiklæring med fuld fart. PC'ere til overkommelige priser gav skolerne muligheder for at starte et sted og i flere lande producerede man datamaskiner med sigte på skolen, bl.a. i Norden. Programmeringssprogene blev gennem LOGO (Papert, 1980) mere fokuseret på læring og programmering havde sin blomstringstid som redskab for konstruktion og kreativitet inden for mange felter. Mikroverdener blev skabt for at støtte den slags arbejde (Noss & Hoyles, 1996). Innovativt arbejde i matematikundervisning i England i 1960'erne og 1970'erne blev i 1980'erne brugt som grundlag for små matematikprogrammer som gik på udforskning af matematiske fænomener ("investigations"). Og det nordiske samarbejde startede om produktion af programmer til brug for skolen. Regneark kom først frem sidst i 1970'erne med Visicalc og viste sig tidligt at være spændende at bruge til både omfattende udregninger og udforskning af matematiske sammenhænge. Og sidst i 1980'erne gjorde den Euklidiske geometri et "come back" efter nogle års udviklingsperiode med Cabri geometri (Laborde, 1999). Sidst i 1980'erne kom også tilgangen til elektronisk kommunikation (e-mail), som naturligvis kunne bruges i matematiklæring såvel som i andre fag.

Rødderne til dagens situation ligger således for det meste i 1980'erne. Regneark har mange flere funktionaliteter i dag, men grundtanken forbliver den samme. Cabri kan meget mere nu og er mere attraktiv og tilgængelig, men også her er grundtanken den samme, d.v.s. at elever og lærere kan udforske inden for forskellige geometrier på en tilgængelig vis og på den måde komme frem til hypoteser, argumenter og "beviser". LOGO bruges stadigvæk men har også inspireret til mange varianter og mikroverden-begrebet bruges inden for mange projekter i matematiklæring som f.eks. i ARI-LAB (Bottino, 2004). Regneark betegnes nu som en grundlæggende kundskab for alle men der ser ikke ud til at være forsket specielt i måden at præsentere regneark inden for kurser. Elektronisk eller digital kommunikation har fået mange ansigter og mange muligheder og er naturligvis den af de nævnte teknologier fra 1980'erne, som har vokset mest. Men selv om man kan udføre meget mere og kapaciteten er vokset eksponentielt var det fundamentale kendt for tyve år siden. Og det var allerede i nogen grad nået ind i skolen, selvom det generelt ikke var kommet med i læseplanerne. Inden for læreruddannelsen i Island var alt dette, undtagen Cabri, allerede i brug sidst i 1980'erne.

Til trods for at 1980'erne frembragte fundamentale tanker og redskaber vedrørende IKT i matematikundervisning, findes der i forskningsbibliografien for IKT og matematiklæring ikke meget fra disse år foruden Mindstorms (Papert, 1980). Men meget af det som er publiceret i 1990'erne handler om design, udvikling og forskning som begyndte i 1980'erne (se Jones, 2004).

Hvorfor går det så sent at forstå værdien af IKT midler?

Hvis grundtankerne med IKT i matematikundervisningen har eksisteret så længe og redskaberne samtidig er blevet enklere at omgås og bedre møder kravene til visuelle effekter og den hastighed som tilhører nutiden, kan man spørge hvad det er som bør behandles og diskuteres i sammenhæng med novemberkonferencen 2005. Svarene vil nok være afhængige af de perspektiver man hver især har på IKT i matematikundervisningen. Fra litteraturen kendes mange måder at identificere forskellige perspektiver på matematiklæring og matematikundervisning. Alligevel mener jeg at det er nødvendigt at definere specielt hvilke perspektiver kunne anvendes ved at analysere IKT i matematikundervisningen. Jeg ser kun på situationer hvor man ser nogen forbindelse mellem IKT og matematikundervisningen. Ud fra mange grunde vælger jeg følgende perspektiver og forklarer dem noget nærmere i teksten:

- eksistens-perspektiv
- integrerings-perspektiv
- elev-perspektiv

Eksistens-perspektivet har fået, og får stadigvæk, den største opmærksomhed. Til det hører selvstændigt at opdage og efterfølgende forsøge at overbevise andre om at IKT kan bruges med fordel i matematikundervisningen, at der eksisterer gode og spændende IKT-redskaber for matematikundervisning, at elever opnår interessante resultat og at de er engagerede i arbejdet. Eksistens-perspektivet holdes konstant i live via forskere som laver digitale redskaber, via producenter, kursusholdere og engagerede matematiklærere. Eksistens-perspektivet er altid åbent for det nye som kommer eller "er lige om hjørnet". Det er et grundlæggende perspektiv angående nye områder eller fænomener, men ingenlunde tilstrækkelig begrundet for at have en afgørende indflydelse i retning af regelmæssig brug af IKT i matematikundervisningen. Eksistens-bevidsthed kalder ikke på ansvar, er ikke nogen kontrakt om at involvere sig og stiller ingen krav om nærmere granskning eller fordybning.

Integrerings-perspektivet er mere kompliceret fordi det er viser ikke kun retning en vej, men fokuserer på problem som opstår ved et møde mellem to kulturer. Hvor stærkt disse varierer for den enkelte lærer er ganske vist afhængigt af denne lærers opfattelse af matematik og hvilke aspekter som anses for at være vitale i matematiklæringen. Integrerings-perspektivet kræver at man på samme tid ser på det som allerede eksisterer, endda på accepterede traditioner og ubemærkede normer i matematikundervisningen, og på det nye som eksistens-perspektivet baner vejen for. Integreringen er ikke kun at integrere det nye i det som er, det er også at integrere det som allerede findes i det miljø som IKT lægger til rette. Integrerings-perspektivet kræver derfor større omtanke, skaber større risiko, kræver bredere overblik og desuden en konstant refleksion og genforståelse. Man kommer hverken let til eller let igennem at tilegne sig integreringsperspektivet alene.

Navnet elev-perspektivet, bruger jeg for at betegne et perspektiv som er endnu mere udfordrende end de to andre perspektiver. Det er ikke et nyt navn på det velkendte "sætte eleven i fokus" eller lægge op til et arbejde i et "elev-venligt miljø". Elev-perspektivet er at tage elevens liv uden for skolen alvorligt til hver en tid, selv om samfundsændringerne kan være store og bryder med meget af det som har kendetegnet skolens arbejde. Elev-perspektivet omtales mere tydeligt senere i denne artikkel.

Det kan påstås at årsagen til, at vi behøver om og om igen at satse specielt på brug af IKT i matematikundervisningen, er at langt de fleste lærere og fagligt kyndige er så optaget af eksistens-perspektivet: At vise det fine og spændende ved IKT i sammenhæng med enkelte dele af matematikundervisningen og at fokusere på det *per se* og isoleret fra andre dele af matematik eller hvad kan genkendes af eleverne som meningsfuldt ud fra sine omgivelser. Integrerings-perspektivet får langsomt større opmærksomhed, men det er ikke nok med idéer i læseplaner eller præsenteret på enkelte kurser. Integrationen må finde sted inden for selve arbejdspladsen, inden for den enkelte skole. Og den kræver samarbejde og målrettet opbygning.

Integrerings-perspektivet er ikke let at tilegne sig. Det har indflydelse på indholdet i skole-matematikken, elevernes læringsmåder, lærernes rolle, timernes planlægning, elevernes produkter, diskussionens indhold og evalueringen af arbejde. Det kræver at man ikke bare ser efter det som man som lærer oplever som nyt, man må også kunne se hvad som skal udgå, og hvorfor det skal afløses af noget som er vigtigere. Integrerings-perspektivet inkluderer hele matematiklæringen og udelukker derfor ikke at eleverne skal få lov og anledning til at se sammenhæng i matematikken, skal se hvordan matematik har spillet en rolle gennem tiderne og hvad den har betydet, hvordan matematik bruges i dag omend på en stærkt skjult måde, hvor underliggende matematiske modeller styrer processer som det burde være en demokratisk ret at kunne forstå noget af.

Matematik er endvidere et redskab for kreativitet blandt kunstnere og for granskning blandt forskere, som ikke så matematikkens nytte på samme måde før, som f.eks. i biologi og genetisk forskning. Måske er det netop de muligheder som brug af IKT åbner for den slags indsigt i matematik, som er allermest skræmmende for nogle lærere fordi den er så fjern fra den rolle man har haft som matematiklærer gennem tiden. Derfor skal man dog ikke afvise den. Men det kræver samarbejde inden for skolerne og faglig vejledning på skolernes præmisser at sikre at elever lærer matematikken at kende som det den er, ikke et skyggebillede af den.

Hvordan er situationen inden for skolerne?

I mit arbejde ved Høgskolen i Agder de sidste år har jeg gennem min forskning haft anledning til at få indblik i situationen inden for skolerne med hensyn til IKT i matematikundervisningen. Det begyndte med at Kristiansand kommune bestemte at starte et kompetenceudviklingsprogram fra 1. august 2002. I maj 2002 modtog Matematisk Institut ved Høgskolen i Agder en forespørgsel om Høgskolen ville medvirke i projektet. Med så kort varsel valgte Høgskolen at gennemføre et eget forskningsprojekt tilknyttet kompetenceudviklingsprojektet og at formidle resultater under projektets levetid såvel som ved afslutning (se nærmere i Kristjánsdóttir, 2005b).

Forskningsprojektet forsøger at identificere de opfattelser af matematik og af matematiklæring, som lærere har, men også de syn, som elever og forældre har derpå. Der tales om *triaden i matematiklæring* (lærer, elev, forældre) og kommunikationskanaler mellem disse om matematik og matematiklæring. Via spørgeskemaer på internettet i løbet af foråret 2003 samlede vi data anonymt fra 668 lærere og elever og deres forældre i 2 klasser på hvert alderstrin (20 klasser totalt). Spørgsmålene omfattede matematiklæring og matematikundervisning i bred forstand og indeholdt derfor spørgsmål angående brug af IKT inden for dette fag. Svarprocenten fra lærere var over 70% og i gennemsnit 20 elever og 14 forældre svarede fra hver klasse.

Elevspørgsmål:

Til eleverne (4.-10. klasse) stillede vi inden for denne kategori især to spørgsmål:

1. Har du brugt datamaskine i matematikklæringen?
   ____ ja, tit
   ____ ja, enkelte gange
   ____ nej

2. Hvor megen tid bruger du med datamaskine i det hele taget (ikke specielt i matematik)?
   ____ mere end fire timer per dag
   ____ hver dag, men ikke så meget som fire timer
   ____ nogle gange i ugen
   ____ nogle gange i måneden
   ____ sjældent eller aldrig

Følgende tabel viser hvordan elevernes svar fordelte sig på de 3*5 mulige kombinationer.

Datamaskine brugt i matematiklæring

	Svar i % tal	*Tit*	*Enk. g.*	*Sj./ald.*	
	Mer end 4 timer per dag		3	4	7
Brug af datamaskine	*Hver dag men kortere*	1	11	9	21
	Nogle gange i ugen	1	30	12	43
	Nogle gange i måneden		10	6	16
	Sjælden/aldrig		7	6	13
		2	61	37	

Svarmulighederne til det første spørgsmål var tre og til det andet fem. De elever som f.eks. bruger datamaskine hver dag, men ikke så meget som fire timer, og sjældent eller aldrig har brugt datamaskine i matematiklæringen er 9% af hele elevgruppen som svarede (totalt 281 elev). Det kan også ses at den største gruppe, 30%, siger at de bruger datamaskine nogle gange hver uge men at de har i sit skoleforløb brugt datamaskine i matematikundervisningen kun enkelte gange.

Dette er elever fra 4.-10. klasse. Hvis man specielt ser på 8.-10. klasse så siger 76% af gruppen at de bruger datamaskine hver dag (mere eller mindre end fire timer) eller nogle gange i ugen. Samtidig siger 46% af gruppen at de sjældent eller aldrig har brugt datamaskine i matematiklæringen. Datamaskinerne er et naturligt redskab i deres liv til noget som de finder meningsfuldt. Men matematikken står sandsynligvis uden for dette fordi læring af matematik er for så mange bundet ved skolen alene. Når ITU Monitor så oplyser at brug af datamaskiner i skolen ikke har tiltaget fra 2003 (da denne dataindsamling fandt sted) må situationen betegnes alvorlig i lyset af de mål myndigheder har sat.

Lærerspørgsmål:

Det centrale spørgsmål angående IKT i matematikundervisningen var her det følgende:

De sidste år har brug af IKT i fagene fået en forøget opmærksomhed.

	Hver uge	Hver måned	Mindre/aldrig
1 Har du haft mulighed for at bruge IKT direkte i matematikundervisningen?	____	____	____
2 Har du brugt IKT i undervisningen?	____	____	____

Vi vælger at fortolke svarene til nr. 2 så at det er matematikundervisning lærerne har brugt IKT inden for men ikke en anden undervisning (fordi hele spørgeskemaet gælder matematikundervisning), men det er muligt at vi på grund af formuleringen har fået lidt flere bekræftende at de har brugt IKT en reelt henviser til matematik.

Resultatet fra disse spørgsmål gengives også i et skema:

Svar i % tal	*Muligt*	*Bruger*
Hver uge	17%	6%
Hver måned	11%	15%
Mindre/aldrig	34%	41%
Svarer ikke	37%	38%

Den høje procent som svarer ikke skyldes til dels det at lærere som ikke underviser i matematik var med i nogen grad. De svarer i det fald ud fra sine meninger men undlader at svare spørgsmål om erfaring. Det vigtige her er på den anden side det som viser sig i øverste linie, d.v.s. at kun omtrent en tredjedel af de lærere, som havde mulighed for at bruge IKT i matematikundervisningen hver uge, gjorde det. Dette viser meget tydeligt at den fokus som er blevet sat på udstyrsbehov, og forklaringer ud fra mangel af udstyr, er ikke rigtig gyldige. Der er andet og mere på færde her, som også Artigue skrev i 1998.

Totalt 115 lærere sagde at de havde mulighed for at bruge IKT i matematikundervisningen hver uge. De kom fra 33 skoler ud af de 36 som deltog i forskningen. Af disse svarede 39 at de brugte IKT i matematikundervisningen hver uge. I stedet for at fokusere på dem som kunne men ikke benyttede muligheden, vil vi fokusere på denne gruppe på 39 lærere, som brugte IKT hver uge i matematikundervisningen. De bruger IKT så tit at det kan være på vej til at ”tilhøre hverdagen” men ikke noget man ser på som helt specielt og ikke som en del af de daglige rutiner.

For det første bør det bemærkes at disse lærere er ikke en gruppe i den almindelige forstand. De kommer fra 17 skoler ud af de 33 som havde muligheder for at bruge IKT. Fra een skole er der 10 lærere, fra åtte skoler er der 2-4 lærere fra hver og de resterende 8 lærere er de eneste inden for sin skole som bruger IKT i matematikundervisningen hver uge. Der er ingen tegn på at de har kontakt speceielt om dette interessefelt.

Skole og samfund generelt har tendens til at lave stereotyper tilknyttet interesseområder og kundskab. Vi så efter om vi kunne se nogle tegn på stereotyper, via følgende grupperede spørgsmål.

1. Er disse lærere unge eller ældre lærere? Er de uddannet for længe siden eller for nylig? Er de koner eller mænd?
2. Underviser de på barnatrin eller ungdomstrin? Satser deres skoler specielt på IKT i matematikundervisningen?

3 Hvad siger disse lærere om lærersamarbejde? Hvad siger de om brug af kilder hvis de vil prøve nogen nyt i matematikundervisningen? Hvad mener disse lærere om brug af konkretiseringsmidler i matematik? (For relation mellem fysiske midler og digitale midler se Kristjánsdóttir, 2005a).

Angående alder er 64% af disse lærere født 1960 eller før, hvorimod 58% af den totale gruppe er i den alder. 54% er kvinder, hvorimod 63% af den totale gruppe er det. Når det kommer til spørgsmål om hvor længe det er siden de blev uddannet som lærere er det svært af sammenligne med den totale gruppe fordi så mange lærere undlader at oplyse om det. Men inden for denne gruppe har 57% fået sin uddannelse 1990 eller før. Det er svært at se at stereotypen unge og nyuddannede passer her.

Skolen med de 10 lærere er en helhedsskole (1.-10. klasse). De andre skoler hvor lærerne arbejder fordeles på følgende måde: Barneskoler (1.-3. eller 1.-7. klasse) er totalt 13, ungdomsskoler (8.-10. klasse) er 1 og helhedsskoler er 2. Det er interessant at se hvor lærerne får det til at bruge IKT regelmæssigt i sin matematikundervisning, hvilken slags miljø gør det lettere. Det er tydeligt at ungdomsskolerne står her langt bag barneskolerne, hvilket åbner for mange spørgsmål. Disse oplysninger giver også anledning til at undersøge nærmere på hvilken måde IKT bruges og i hvilke dele af matematikundervisningen den trækkes ind.

I samtaler som ansatte i den pædagogiske ledelse inden for kommunen havde med rektorer o.a. ved skolerne i Kristiansand skoleåret 2002-2003 fremkommer oplysninger om status, ønsker og fremtidsmål angående matematikundervisningen på skolen (Pedagogisk Senter, 2003). Der siges ikke meget om IKT i matematikundervisningen men enkelte skoler frembringer oplysninger fordi de mener at det tilhører. I nogen tilfælde er der oplysninger om brug af IKT fra de skoler som IKT brugerne arbejder ved, men ingenlunde altid. Og der er en del skoler med IKT-planer, og udstyr som er godt tilgængeligt, hvor ingen lærer bruger IKT i matematikundervisningen hver uge. Samtalerne med skolerne afslørede sådan ikke den reelle brug af IKT i matematikundervisningen.

Med sigte på professional udvikling inden for skolerne blev følgende spørgsmål stillet til alle lærere om hvad de mente om lærersamarbejde i tilknytning til matematikundervisning. De lærere som brugte IKT hver uge mente i højere grad end den totale gruppe at det sparer tid (74% versus 53%). De mente også i højere grad at det giver flere idéer (90% versus 66%). Og de mente at det fordyber lærernes diskussion (69% versus 52%).

Til spørgsmålet om hvorvidt lærerne bruger konkretiseringsmidler i matematikundervisningen svarede 15% af disse lærere at de gjorde det i hver time hvorimod 5% af den totale gruppe opgav det svar. 13% af denne gruppe sagde at de brugte konkretiseringsmidler sjældent, hvorimod 28% af den totale gruppe sagde det.

Det tredje spørgsmål som er af interesse gælder resurser lærerne bruger i sin professionelle udvikling. Spørgsmålet var: Hvis du ønsker at gøre noget i matematik med dine elever som du ikke har gjort før, hvor mener du at du kan finde inspirationskilder og gode idéer? Kryds ved alt du har brugt.

Valgmulighederne var : tidskrifter, bøger, websider, hos andre lærere, i skolens materialsamling, fra LAMIS, på andre kurser, andre steder.

Gruppen som bruger IKT krydser i dette spørgsmål procentvis ved meget mere end den totale gruppe. De enkelte muligheder ses af tabellen. De giver også meget højere grad eksempler på det som de har brugt.

% tal	Alle lærerne	IKT brugerne
Tidskrifter	17	18
Bøger	27	51
Websider	27	44
Andre lærere	52	79
Materialsamling	25	51
LAMIS	11	18
Andre kurser	37	69
Andre steder	6	10

Sammentrukket kan der siges at disse lærere som er spredt, og kun inden for een skole mange nok til at der kan tales om et miljø, har alligevel tydelige fælles træk og satser i sit arbejde på værdifulde aspekter for lærerudvikling som foregår i fællesskab. Det kan også bemærkes at datamaskiner er ikke de eneste redskaber de bruger i nogen eller høj grad fordi de har betydelig mere erfaring af konkretiseringsmateriale en lærerne generelt. Svarene viser tegn på et integreringsperspektiv på IKT i matematiklæringen.

Integrering er begyndt men integrerings-perspektivet er stadigvæk ikke udbredt. Alligevel bør der satses på at komme længere og tage elev-perspektivet nu på alvor. Dette perspektiv belyses nu noget fyldigere end før.

Elev-perspektivet på IKT i matematikundervisning og konklusioner

Elev-perspektivet ser på elevernes liv som centralt i bestemmelser angående indhold og arbejdsmetoder i matematikundervisningen, ikke kun i officielle dokumenter men i selve gennemføringen inden for de enkelte skoler. Elever i nutidens skoler har Prensky (2001) kaldt "digital natives" hvorimod han taler om dem som ikke er indfødt i dagens teknologiske samfund som "digital immigrants" og bruger denne metafor til at forklare forskelle i hvordan man omgås med teknologien og hvorfor "de indfødte" har svært ved at forstå den verden immigranterne kommer fra. Dette støttes af det som står i rapporten *Som elevene ser det* (Skolenytt, 2006). Denne rapport formidler resultater fra Elevinspektøreren 2005. Der siges: "Elevene synes at lærerne tar dem på alvor og behandler dem med høflighed og respekt, men på den andre siden er elevene kritiske til lærernes evne til å gi dem utfordringer med skolearbeidet."

Det at informationsteknologien ville have den stærke indflydelse i samfundet og at det ville influere skolernes arbejde, selv om det blev meget krævende, er ikke noget vi først har set for nylig.

> *Der skal en ny generation til, før datamatens faktor i matematikundervisingen kan analyseres helt ned i dybden, en generation , som selv har oplevet datamaskin som et hjælpemiddel ved begrebsdannelse og problemløsning inden for matematik.*
>
> (Kristjánsdóttir, 1972)

Og grundlaget til det første arbejde med de vel kendte Standards-dokumenter i matematikundervisningen i USA, som begyndte midt i 1980'erne, var netop : "Create a coherent vision of what it means to be mathematically literate both in a world that relies on calculators and computers to carry out mathematical procedures and in a world where mathematics is rapidly growing and is extensively being applied in diverse fields." (Romberg, 2001).

Men en skole som efterlader det til enkelte lærere at udvikle brug af teknologi i undervisningen uden at der er rammer, roller og rutiner inden for skolen for den type udvikling, kan ikke forvente at det sker i nogen videre grad. Situationen som er belyst i denne artikkel viser at, med undtagelse af een skole, var de lærere som brugte IKT regelmæssigt i sin matematikundervisning kun enkeltpersoner og halvdelen af skolerne havde ikke en eneste lærer som gjorde dette. For at ændre det er det vigtigste at miljøerne inden for de enkelte skoler er kompetente til at udvikle i fællesskab en undervisning som imødekommer de "digital infødte" og arbejder både angående indhold og arbejdsmåder i matematik med det som giver "digital indfødte" klar mening. Denne udvikling må ske inden for de enkelte skoler, den vil ikke ske ved at enkelte lærere deltager i kurser og forventes at sprede idéer rundt sig. En grund til dette er at ændringen kan ikke baseres udelukkende på idéer. Der skal til en diskussion og integrering af tanker og opfattelser. Den enkelte skole må blive en lærende organisation med rammer, roller, rutiner og resursforbrug som støtter denne opbygning.

Vi har indenfor forksningsprojektet i Kristiansand set hvor udpræget troen er på at lærerne kan som personer ændre situationen ved at engagere kollegaer rundt sig inden for sine skoler, uden nogen organisatorisk ændring på skolen. Dette er det naivt at tro. Inden for vores forskningsprojekt har vi forsøgt at identificere hvilke traditioner og normer der er inden for skolernes arbejde som hindrer en skoleudvikling i matematikundervisningen og at lægge tilrette for begyndelse og øvelse i skoleudvikling i matematik som kan danne grundlag for opbygning. Vi har skabt det som vi kalder *De netbaserede kurser som redskab for skoleudvikling i matematik.* Kurserne foregår på de enkelte skoler og er et redskab til at de kompetente lærere som vi har i skolen kan, sammen med ledelsen på sin skole, bygge op både syn på og gennemføring af matematikundervisning som bedre imødekommer elever i dag end skolerne har gjort. Ved Høgskolen i Agder er vi nu i anden fase i udviklingen af disse kurser og er begyndt på et samarbejde med to andre høgskoler som vi ved at vil bidrage med vigtig erfaring og syn fra flere steder i landet.

Referencer:

Alseth, B., Breiteig, T., Brekke, G. (2003). *Evaluering av Reform 97. Endringer og utvikling ved R97 som bakgrunn for videre planlegging og justering – matematikkfaget som kasus.* Telemarksforskning – Notodden.

Artigue, M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies. In J.D. Tinsley & D.C. Johnson (Eds.) *Information and Communications Technologies in School Mathematic,* 121-129. IFIP, Published by Chapman & Hall.

Bishop, A., Clements, K., Keitel, C., Kilpatrick, J., Laborde, C. (1996). *International Handbook of Mathematics Education.* Kluwer Academic Publishers.

Bottino, R. M. (2004). The Evolution of ICT-based learning environments: which perspectives for the school of the future? *British Journal of Educational Technologies* 35(5), 553-567.

English, L. (2002). *Handbook of International Research in Mathematics Education.* Lawrence Erlbaum.

Grouws, D. (1992). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* National Council of Teachers of Mathematics.

Jones, K. (2004). Celebrating 20 Years of Computers in Mathematics Education: a research bibliography. *Micromath* Spring 2004.

Kleve, B., Brucker, H.J. (1998) Etterutdanningskurs for lærere i matematikk på mellomtrinnet i forbindelse med innføringen av L97. http://www2.hit.no/efl/mat/nett/aktivit/org

Kristjánsdóttir, A. (1972). *Faglig pædagogisk opgave i matematik: Introduktion af datalogiske emner inden for folkeskolens matematikundervisning og overvejelse af hvordan disse samt anvendelse af datamaskiner kan belyse matematiske problemer.* [Ikke udgivet Cand.pæd. opgave], København, Danmarks Lærerhøjskole, Matematisk Institut.

Kristjánsdóttir, A. (2000). Et værdigt redskab for værdigt indhold. *Matematik & undervisning. Norden 2000*, 154-159. Århus, Matematik - Nämnaren - Tangenten - MAOL - Flötur

Kristjánsdóttir , A. (2005a). Er laborative midler gavnlige? Det afhænger af så meget andet! Tangenten 4/2005, 11-17.

Kristjánsdóttir, A. (2005b). Agder University College and the Southern part of Norway. Collaborative efforts to further and benefit both sides. In R. Lager (Ed.) *Didaktikk, dannelse og data. Artikler om høgskolepedagogikk,* 167-180. Skriftserien nr. 122. Høgskolen i Agder, Kristiansand.

Laborde, C. (1999). Core Geometrical Knowledge for using the Modelling Power of Geometry with Cabri-Geometry. *Teaching Mathematics and its Application.* 18(4), 166-171,

Noss, R. & Hoyles, C. (1996). *Windows on Mathematical Meanings: Learning Cultures and Computers.* Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Papert, S. (1980). Mindstorms, USA: Basic Books

Pedagogisk Senter (2003). *Kristiansand tar ordet! Regn med Kristiansand! Samtaler med alle skolene 2002-2003.*

Prensky, M. (2001). Digital Natives, Digital Immigrants. *On the Horizon* (NCB University Press, 9(5), October 2001).

Rambøll management (2006). E-learning Nordic 2006. Effekten af it i uddannelsessektoren. www.ramboll-management.com

Romberg, T.A. (2001). Mathematical Literacy: What Does It Mean for School Mathematics? *Wisconsin School News.* October 2001.

Skolenytt, 17.01.2006 http://www.utdanningsdirektoratet.no/upload/Rapporter/elevinspektorene/Sammenfatning_Som_elevene_ser_det.pdf

SSB: Utdanningsstatistikk. Elevar i grunnskolen. Førebelsetal, 1. oktober 2005.

Utdanningsdirektoratet (2004). *Forslag til Strategi for digitale læringsressurser i grunnopplæringen 2005-2008.*

ITU Monitor 2005 http://www.itu.no/itu_monitor/1127716502.31/view

Per Jönsson
är docent i fysik vid Lunds universitet och lektor i tillämpad matematik vid Lärarutbildningen, Malmö högskola. Per har mångårig erfarenhet av datorbaserad matematikundervisning och har skrivit flera böcker inom området modellering och matematiska beräkningar.

Praktiskt arbete med matematikdatorprogram

1 Inledning

Betydelsen av matematik ökar hela tiden och tekniken, ekonomin och stora delar av samhällsorganisationen är numera baserad på analyser, simuleringar och övervägande av matematiskt slag.Det är tillämpningarna inom dessa områden som i dag driver utvecklingen av matematiken och som motiverardess starka ställningi skolan [1].

Gemensamt för tillämpningarna är att matematiken kombineras med datorer och att arbetet till stor del utförs med hjälp av olika program i speciella utvecklingsmiljöer. Den enskilde individen har ofta inte kännedom om detaljer, men har fått allmänna och kraftfulla verktyg för at tlösa en mängd problem av matematisk karaktär.Dessa verktyg kan lätt kombineras för att behandla alla delar av stora och komplext problem.

Utvecklingen går rasande fort. På mindre än 10 år har helt nya fält dykt upp och växt sig stora.I dag utbildas biologer som kan sätta upp och analysera matematiska modeller för giftspridning i ekosystem eller som modellerar och försöker förstå hur man bäst skall utnyttja en biologisk resurs utan att på lång sikt hota densamma. Konstruktörer av datorspel använder sig av avancerade matematiska relationer för att räkna ut hur rumsliga strukturer ändrar sig då spelaren rör sig i den animerade världen. Ekonomer använder statistiska och matematiska metoder för att analysera prisutvecklingen av varor och tjänster. Listan på yrkesgrupper (icke-matematiker) som använder avancerade matematiska modeller kan göras hur lång som helst.

2 ÖPS-projektet

Utvecklingen av den datorbaserade matematiken har i stort sett gått skolan förbi. Trots att vi har god tillgång på datorer så bedrivs arbetet i skolan fortfarande nästan uteslutande med papper och penna och med miniräknare. Bristen på förståelse för hur matematiken och datorer används i omvärlden kan på sikt leda till en trovärdighetskris för matematiken i skolan.För att råda bot på detta har vi vid lärarhögskolan i Malmö startat ÖPS-projektet (Öppen Programvara i Skolan) som syftar till att

- dokumentera och göra öppen matematisk programvara tillgänglig i skolan
- ge nya lärare kunskap i datormatematik
- fortbilda lärare
- utveckla undervisningsmaterial i datormatematikbåde på gymnasie- och högskolenivå
- skapa en digital kunskapsbank med exempel på laborationer och projektuppgifter
- följa utvecklingen av datorbaserad matematik i omvärlden

Projektet är omfattande och för att det skall kunna drivas med full kraft behövs stöd av och ett utvecklat samarbete med verksamma lärare och andra lärarutbildningar.

3 Beräkningsprogram

Den dominerande matematiska programvaran i dag ärMatlab, som har mycket stor spridning både inom industrin och högskolorna.Ett problem är att Matlab kostar pengar och att programmet i allmänhet inte är tillgängligt för våra gymnasieelever. Det finns dock fantastiskt bra gratisalternativ i form av GNU Octave och SciLab.
Dessa program kan laddas ner gratis från `http://www.octave.org/download.html` och `http://www.scilab.org/`. Programmen består av ett programmeringsspråk tillsammans med en mängd inbyggda funktioner för att lösa numeriska problem inom alla områden av matematiken.Till programmen hör även kraftfulla kommandon för 2D - och 3D-grafik samt för ljud.GNU Octave och Scilab är mycket lättanvända, varför man kan komma igång med matematikuppgifter nästan direkt. GNU Octave finns dokumenterat på svenska [2] och används av lärarstudenterna i Malmö.

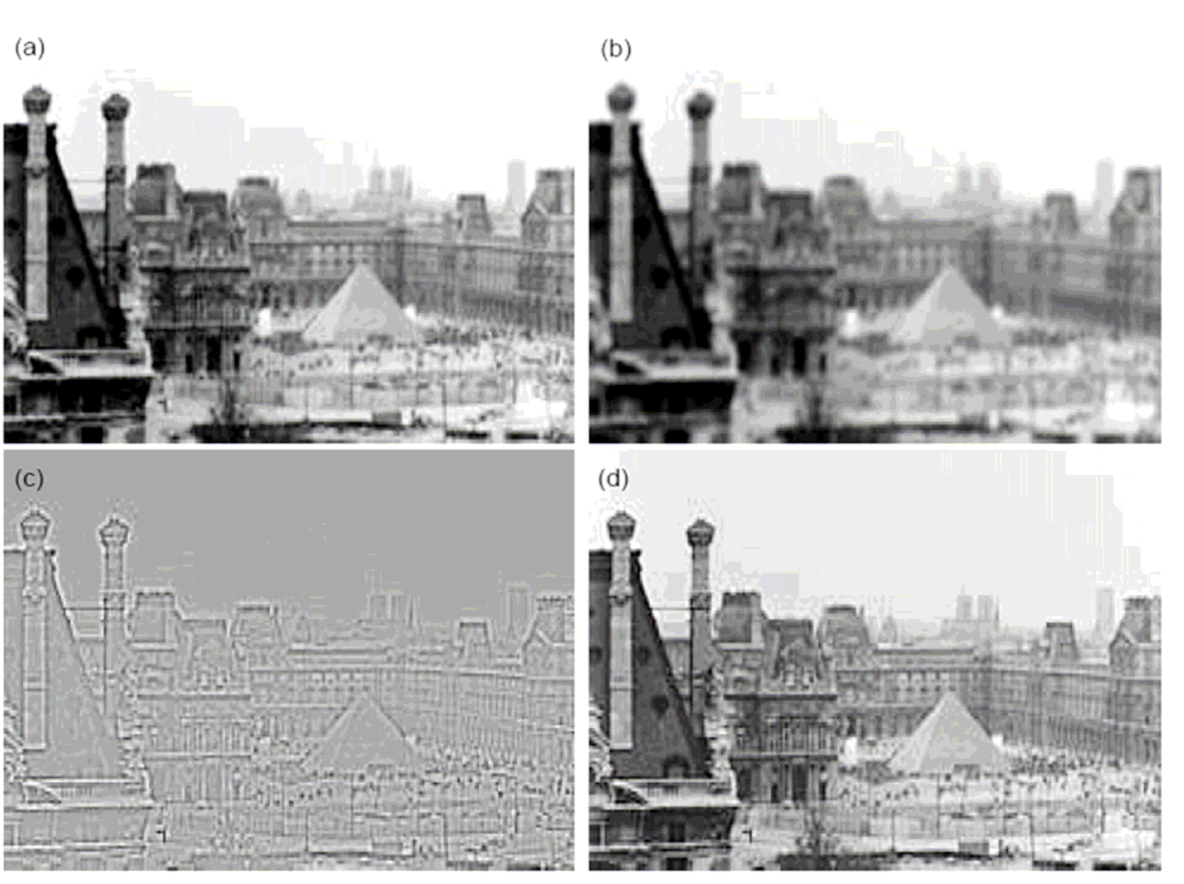
Ett sätt attjobba medberäkningsprogramskullekunna vara attknyta ett matematiskt begrepp eller område i kursen till någon aktivitet som är spännande och som utmanar elevernaskreativitet och experimentlusta.Manlåter elevernajobba med programmet i grupp och sammanfattar sedan deras resultat. Hur ser matematiken ut i det vi har gjort? Speciellt intressant är att jobba med elevernas egna data som de har en relation till. Det kan vara digitalkamerabilder, MP3-filer eller videosekvenser.

4 Bildbehandling

Som ett exempel på en datorbaserad uppgift ska vi titta på digitalkamerabilder. En bild kan ses som en tabell (matris) av tal som anger svärtningen i varje pixel. Vi kan manipulera tabellen med talvärden för att förbättra eller förändra bilden. Linjerna och strukturerna i en bild kan förstärkas genom följande operationer; (1) inläsning och lagring i matrisen B, (2) generation av en ny bild Bm där svärtningen i varje pixel fås som medelvärdet av svärtningen i de intilliggande pixlarna. (3) generation av skillnadsbild D genom subtraktion av Bm från ursprungsbilden B. (4) addition av skillnadsbilden D till ursprungsbilden. Vi skriver ett litet Octave-program som utför operationerna

```
% Det här programmet läser in en bild och producerar en
% linje och strukturförstärkt bild genom subtraktiv utjämning.
B = jpgread('parism.jpg');       % läs in bilden
[m n] = size(B)                  % bestäm storleken på matrisen
colormap('gray')
imagesc(B)                       % plotta ursprungsbilden
Bm = 0*B;                        % nollställ Bm matrisen
  for i = 2:m-1                  % loopa över rader
      for j = 2:n-1              % loopa över kolonner
         Bm(i,j) = mean(mean(B(i-1:i+1,j-1:j+1)));   % medelvärde av
                                                     % omgivande svärtning
  end                            % slut loop
end                              % slut loop
imagesc(Bm)                      % plotta utjämnade bilden
D = B -Bm;                       % generera skillnadsbilden
imagesc(D(2:m-1,2:n-1))          % plotta skillnadsbilden
E = B + D;                       % addera skillnadsbilden
imagesc(E(2:m-1,2:n-1))          % plotta linjeförstärkt bild
```

Då vi kör programmet får vi de fyra bilderna i figuren. Notera hur linjer och strukturer framträder tydligare den sista bilden.



Figur 1: (a) originalbild, (b) utjämnad bild, (c) skillnadsbild, (d) skillnadsbilden adderad till ursprungsbilden.

Det matematiska begrepp vi vill illustrera (och göra lite spännande) är medelvärde. Vi har utöver detta använt en nästlad for-loop som i sig inte är något konstigt eller komplicerat. För den intresserade finns ovanstående exempel, tillsammans med en mängd andra, ingående beskrivet i ref. [2].

Matematiska begrepp som på detta sätt lyfts ut och knyts till tillämpningar har större möjligheter att bli en varaktig del av elevernas kunskapsmassa. Dessutom, och detta är inte minst viktigt, får eleverna genom arbetet med datorprogrammet inblick i hur man rent faktiskt arbetar med matematik i verkligheten utanför skolan. Genom att arbeta med datorer vidgas området vi normalt arbetar med i skolan och den osynliga matematiken finns överallt kan lyftas fram och belysas. Vi måste bli bättre på att visa att matematiken finns, att den är viktig och att den är rolig!

Referenser

[1] H. Wallin, Den osynliga matematiken,Liber, 2005.
[2] P.Jönsson, Modeller och beräkningar med GNU Octave, Studentlitteratur, 2005.

Lärare som vill veta mer om ÖPS-projektet eller få länkar och dokumentation till annan gratis matematisk programvara är hjärtligt välkomna att höra av sig till

Per Jönsson
per.jonsson@lut.mah.se

Patrik Erixon
Gymnasielärare i matematik/fysik på Vägga gymnasiseskola, Karlshamn, Sverige, och vice ordf. i Sveriges Matematiklärarförening.
Jag är mycket intresserad av tekniska hjälpmedel och hur de kan bidra till utvecklingen av matematikundervisningen, se gärna http://www.utb.karlshamn.se/pe/
Har i ett par omgångar kunnat följa gymnasieelever på naturvetenskapligt program under hela deras treårsperiod med CAS som ett hjälpmedel i matematiken. Under tiden har jag kunnat studera deras resultat, nationella prov samt även gjort några jämförande diagnoser som förhoppningsvis ska kunna bli till en rapport i framtiden. Har också deltagit i några projekt kring CAS, dess användning och bedömning.

IKT och matematik: ”My Greatest hits”

Sammanfattning:

Mina ”Greatest hits” innehåller kortfattat några exempel på hur jag arbetar med IKT i min matematikundervisning inom gymnasiet. Delger egna erfarenheter samt avslutar med en förenklad och provocerande jämförelse mellan ”traditionell” matematikundervisning och ett medvetet användande av tekniska hjälpmedel.

Olika IKT-tillämpningar

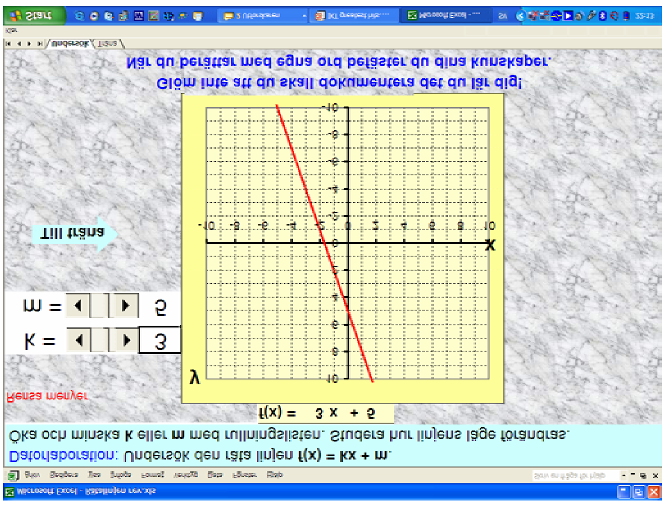
Använder mig av flera olika tekniska hjälpmedel och programvaror t.ex.

- Excel
- Power-point
- Javasimuleringar via internet
- Grafräknare
- Symbolhanterande räknare, CAS

Är en glad användare och väljer framförallt tillämpningar med datorer som är snabba att komma igång med och inte kräver så mycket kännedom om syntax eller kommandon.
Några exempel på tillämpningar:

Excel

Har bl.a. några färdiga filer (se http://www.utb.karlshamn.se/pe/MaB.htm) där eleverna kan undersöka t.ex. linjära funktioner grafiskt.



Vad händer när vi ändrar k- resp. m-värden för den linjära funktionen $y = kx + m$ *?*
Eleverna kan också träna om de förstått genom att ange rätt värden på slumpade linjer.

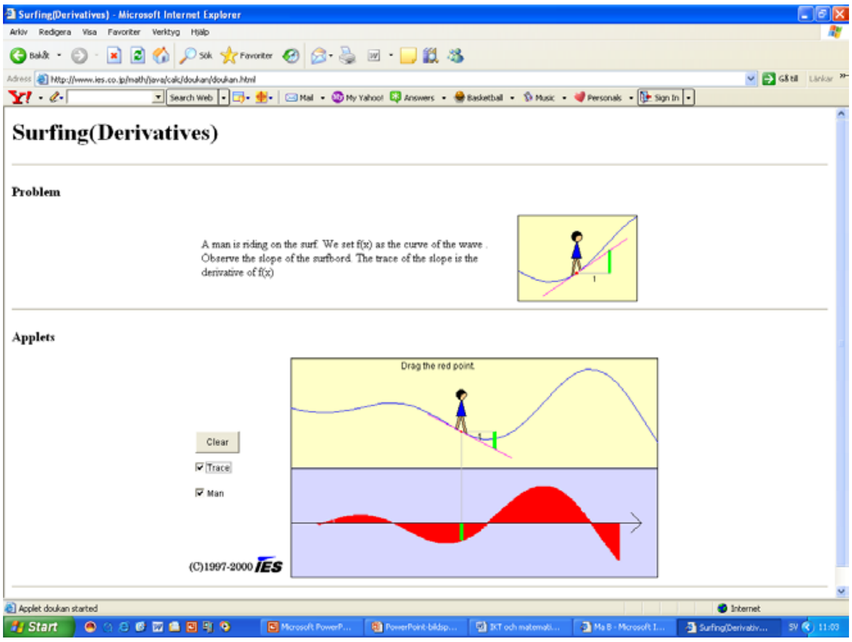
Power-point

Power-point är utmärkt för sammanfattningar och repetition. Eleverna kan klicka sig igenom och följa t.ex. en lösning steg för steg.

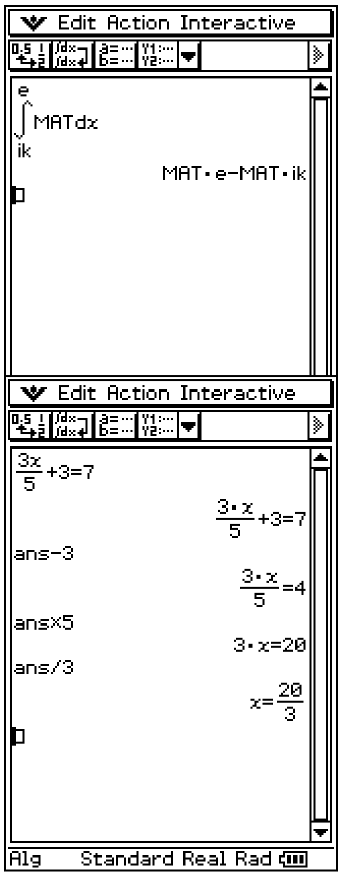
Simuleringar via Internet

Via internet kan en mängd matematiksimuleringar nås. Den stora fördelen med dessa är att eleven själv interaktivt kan undersöka, se samband, dra slutsatser osv. De tillför ytterligare en dimension som saknas t.ex. i den tryckta boken.

Exempel (http://www.ies.co.jp/math/java/calc/doukan/doukan.html)



Vilket samband finns mellan en grafs utseende och dess derivata?
När är derivatan positiv, negativ, noll?
m.m.



Grafräknaren

Utmärkt för att studera grafers utseende, numerisk ekvationslösning, regression vid modellering m.m. m.m.
"Vad händer om vi ändrar koefficienten till ett positivt värde? Undersök, förklara!
Förklara med hjälp av grafen varför ekvationen saknar lösningar, Hur ser grafen till x^n ut?"

Låt eleverna själva upptäcka!

Symbolhanterande räknare, CAS

CAS, computer algebra system, ger nya möjligheter att laborera och undersöka algebra.
Programvarorna är dessutom mycket kraftfulla vilket ger möjlighet att kontrollera resultat och "upptäcka" ny matematik. Fler elever får dessutom möjlighet att hitta svaret och lösa problem.

Exempel

- Vad blir 0,12 i bråkform? Varför?
- Beräkna $\sqrt{\frac{25}{9}}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{0{,}01}$ och $\sqrt{a^2}$ exakt,
  förklara resultatet !
- Träna ekvationslösningens grunder enligt intill
- Undersöka algebriska samband, gäller likheterna?
- Finn deriveringsregler för polynom, produkter m.m. kvoter m.m.
- Vilka lösningar har ekvationen? Antal lösningar?
- Ange en ekvation som har lösningarna ….
- m.m m.m

Ett kraftfullt hjälpmedel är utmärkt till att också träna mycket grundläggande matematik på. Möjligheten att växla mellan exakt presentation och närmevärden är nyttig vid många olika typer av undersökningar.

”Att tänka på”

- Saknar läromedel, brist vid arbete samt ger att uppgifter kräver planering
- Kräver tydliggörande av baskunskaper och prov med räknarfri del
- Behöver finnas som ett kontinuerligt hjälpmedel, för bl.a. handhavandets skull
- Kan presentera resultat på ”oväntat” sätt

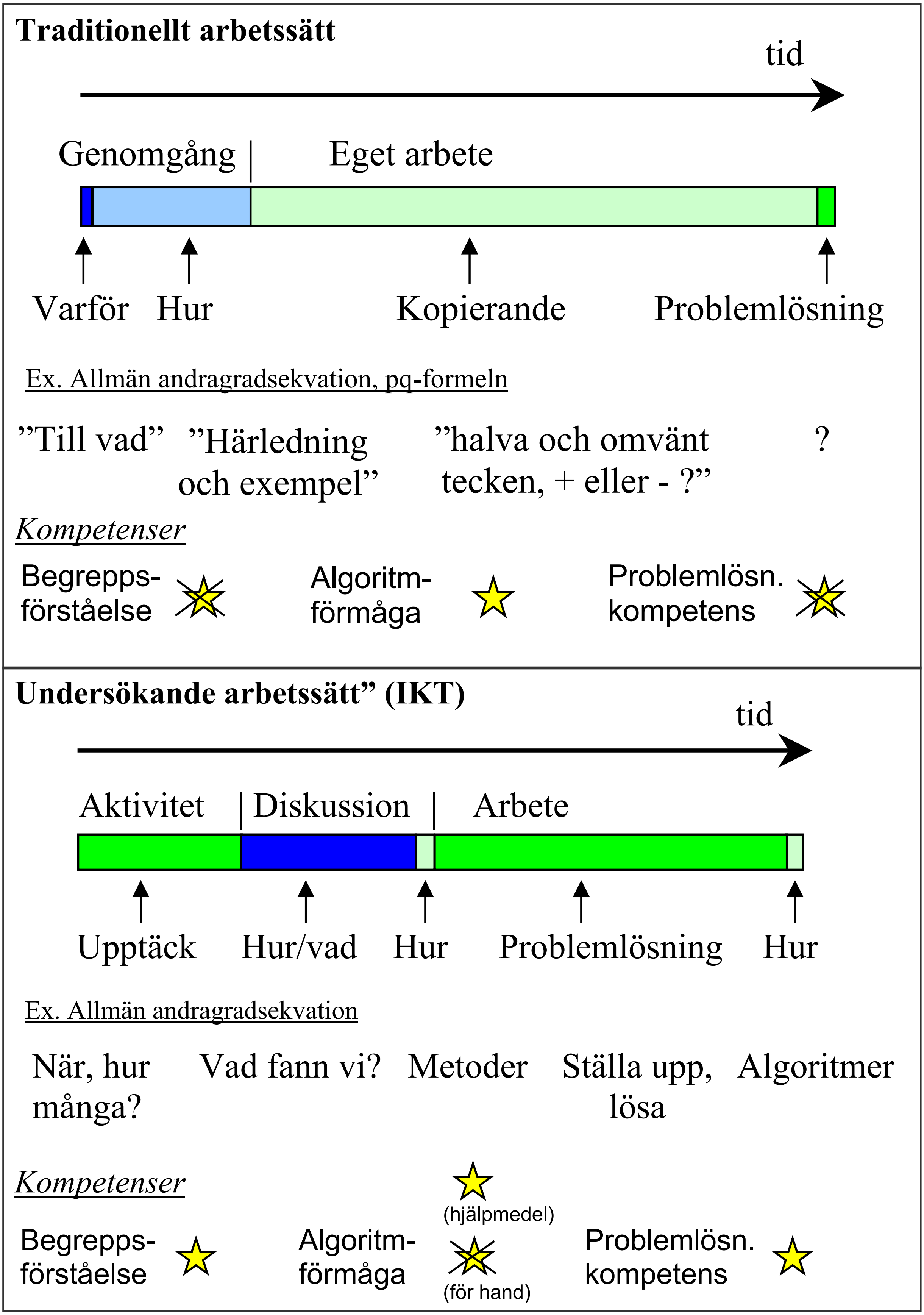
Varför IKT?

- Ger nya möjligheter till undersökande arbetssätt, att själv upptäcka regler och samband
- Stimulerar till diskussion
- Omväxlande
- Roligt!

Kom ihåg!

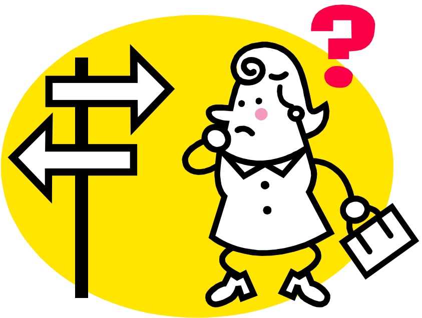
Bromsa upp! Dokumentera! Var tydlig!
Många elever har en datorvana som innebär snabba klick och högt tempo. Ett lärande måste få ta tid varför det är viktigt att bromsa upp eleverna, låta dem diskutera och dokumentera.

En jämförelse av arbetssätt *(VARNING: medvetet provokativt!!)*
Förutsättning: Elev med knappa förkunskaper som förväntas precis klara momentet.



Traditionellt	Undersökande
"……= 0! "	*"Hur många lösningar?"*
" x = 1·x? "	*"Vilka mått ska vi välja?"*
"-p/2"	*"Högsta höjd ?"*
"±"	*"Möjliga värden på x?"*

Vilken väg
ska vi välja?



Min "sanning" kring IKT-användande

Vi har lite att förlora! Dagens tidningsrubriker handlar allt oftare om bristande matematikkunskaper. Verkningsgraden i en "traditionell" matematikundervisning är för låg!

Flera undersökningar och egna erfarenheter visar att manuella färdigheter inte försämras samtidigt som begreppsförståelsen förbättras. Vi vinner definitivt mer än vi förlorar!

Problemlösning åt fler! Förståelse och lust stimuleras!!

"It is unworthy of excellent men to lose hours like
slaves in the labour of calculation, which could be
safely relegated to anyone else if machines were used"
(Leibniz 1671)

Har ni frågor/synpunkter. Hör gärna av er eller besök min hemsida!

patrik.erixon@utb.karlshamn.se
http://www.utb.karlshamn.se/pe/

Håvard Johnsbråten

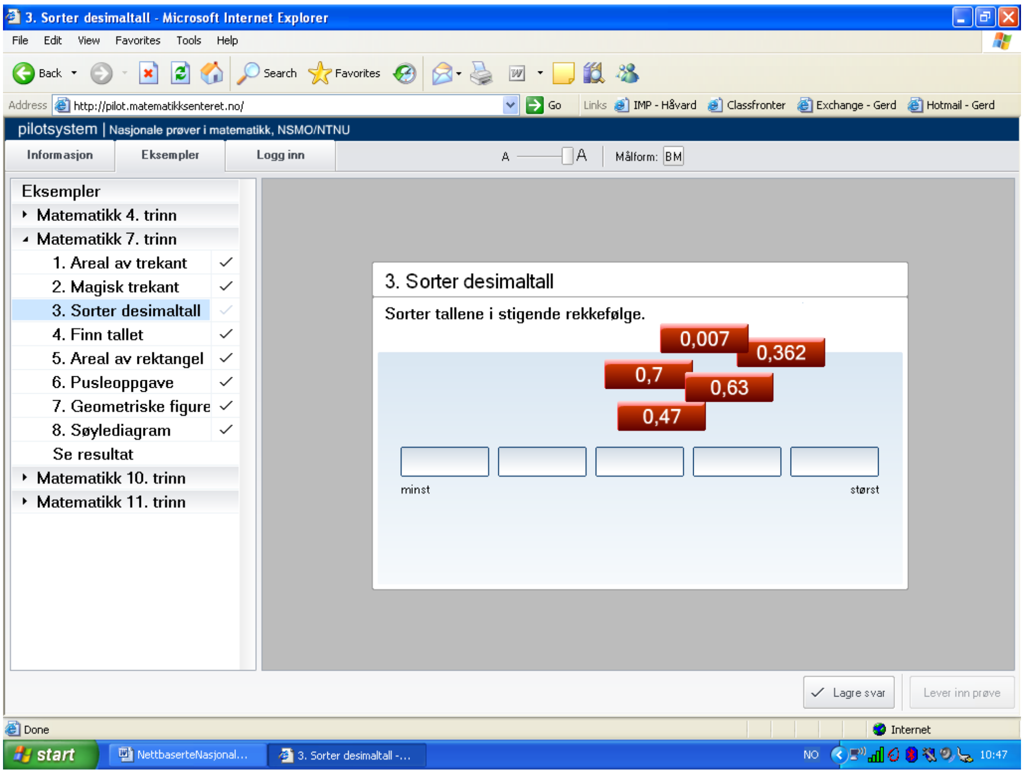
er førsteamanuensis i matematikk ved Høgskolen i Telemark. I mange år har han vært faglig leder av fjernundervisningen i matematikk ved høgskolen. Forrige og inneværende skoleår er han frikjøpt av Matematikksenteret i 50 % stilling for å være med på utviklingen av de nettbaserte nasjonale prøvene i matematikk.

Nettbaserte nasjonale prøver i matematikk

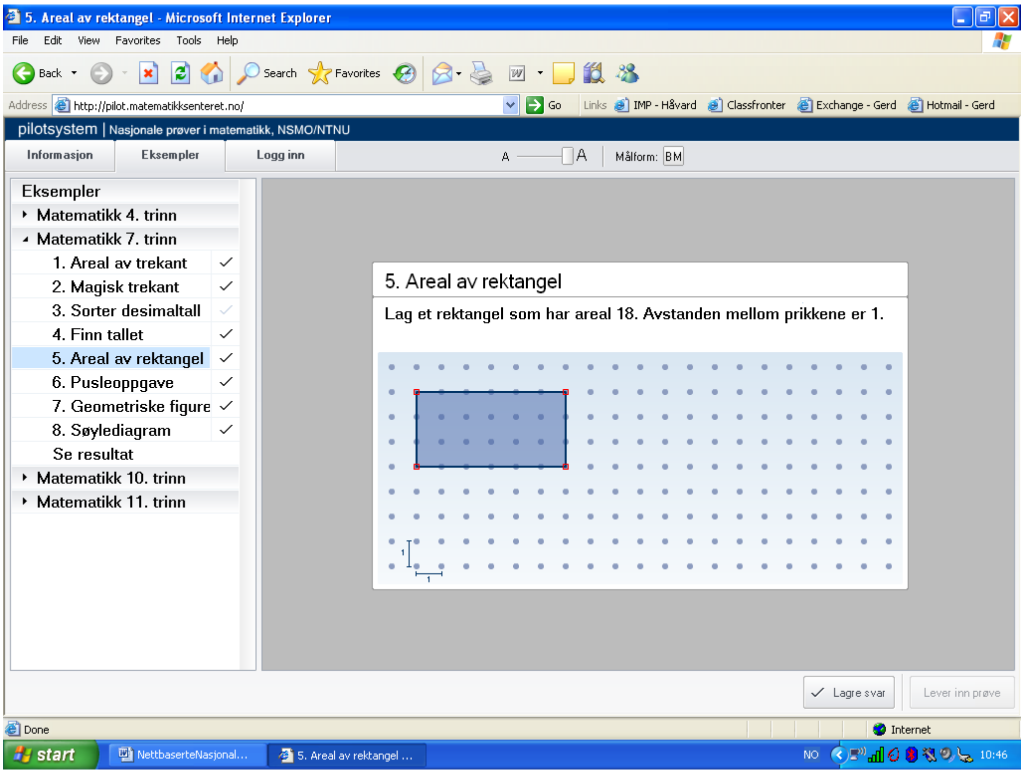
Innledning

Våren 2004 ble det for første gang gjennomført obligatoriske skriftlige nasjonale prøver i matematikk på 4. og 10. trinn, og året etter var omfanget av de skriftlige prøvene utvidet til også å omfatte 7. og 11. trinn (første trinn i videregående skole). Våren 2005 ble det i tillegg tilbudt en frivillig nettbasert prøve på 7. trinn.

På Novemberkonferansen 2005 ble den nettbaserte prøven for 7. trinn presentert og drøftet i en parallellsesjon. I slutten av oktober hadde Ole Johansen ved Matematikksenteret en tilsvarende sesjon (Oktoberkonferansen i Oslo), og hovedinnholdet i PowerPoint-presentasjonen er hans. Denne korte artikkelen inneholder hovedpunkter fra min presentasjon på Novemberkonferansen, men teksten er ajourført primo april 2006.



Figur 1: Eksempeloppgave 3



Figur 2: Eksempeloppgave 5

Nettbasert prøve på 7. trinn våren 2005

Den nettbaserte prøven var beregnet til å ta 45 minutter og ble tilbudt til alle elever på 7. trinn. Prøven ble pilotert i mars for 335 elever. Selve utprøvingen foregikk over en 14-dagers periode i mai, og det kom inn 9365 elevsvar fra 491 skoler.

På nettet lå det 8 eksempeloppgaver som elevene ble anmodet om å se på før de avla selve prøven. Fjorårets versjon av eksempeloppgavene er ikke lenger tilgjengelig, men oppgavene kan sees i en ny versjon på nettadressen

http://pilot.matematikksenteret.no/

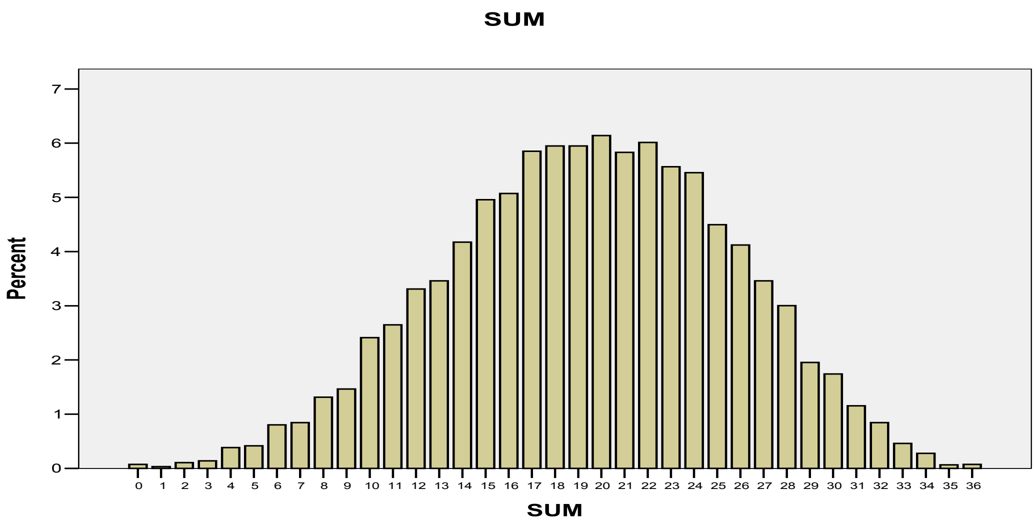
Et par av disse eksempeloppgavene er gjengitt ovenfor.

På Novemberkonferansen 2005 ble de fleste oppgavene fra den nettbaserte prøven vist fram og kommentert. Disse oppgavene vil ikke bli offentliggjort, i og med at det kan være aktuelt å bruke noen av disse oppgavene ved senere prøver. Derfor gir vi ikke flere eksempler på slike oppgaver her.

Vi vil imidlertid nevne at på prøven var applikasjonen (dvs. organiseringen av oppgavene på skjermen og strukturen for lagring av resultatene via nettet) ganske lik den som eksempeloppgavene viser, der oppgaveoverskriftene står listet opp til venstre og selve oppgaven vises til høyre. Elevene kunne fritt velge i hvilken rekkefølge oppgavene skulle besvares, og de kunne gå tilbake til oppgaver de tidligere hadde lagret svar på og eventuelt svare på ny. Oppgaver som var besvart ble angitt med en hake. De oppgavene som inneholdt tall ble laget ”dynamisk” ved at tallene ble variert noe fra elev til elev. Dette gjorde at elevene ikke kunne skrive av hverandres svar.

Resultater fra utprøvingen

Prøven inneholdt 23 oppgaver som til sammen kunne gi 36 poeng. I gjennomsnitt skåret elevene 19,5 poeng, noe som tilsvarer vel 54 % av maksimal poengsum. Dette viser at prøven var av passe vanskegrad. Fordelingen av poengsummer var også meget god, slik det framgår av diagrammet nedenfor.



Figur 3: Prosentvis fordeling av poengsum på den nettbaserte prøven

Elev- og lærererfaringer

Gjennom intervju med elever og lærere har følgende reaksjoner kommet fram:

- Morsomt å gjøre oppgaver på data
- Fint å få resultatene umiddelbart
- Fint for lærer å slippe retting
- Positivt med dynamiske oppgaver der tallene endres fra elev til elev
- Elevene likte å kunne manipulere flyttbare objekter på skjermen
- Ren, enkel og problemfri bruk av applikasjonen
- Svært få tekniske problemer
- Positivt å velge hvilken rekkefølge oppgavene kunne besvares i
- God oversikt over hvilke oppgaver som var blitt besvart
- Positivt å kunne gå tilbake i settet for å endre svar
- Svarene er lagret selv om systemet går ned
- Mange elever begynner å manipulere objekter på skjermen før de leser oppgaveteksten
- Ønskelig med flere eksempeloppgaver
- Lærere vil ha tilgang til prøven
- Elever og lærere vil se hvilke oppgaver elevene svarte feil på

Muligheter og utfordringer

Vi ser mange muligheter for å gjøre slike nettbaserte prøver gode. Momenter:

- Eksempeloppgaver bør gis på alle trinn
- Dynamiske oppgaver bidrar til å hindre juks
- Det er lett å justere vanskegraden på prøven
- Prøven kan lages slik at en del av den må besvares før elevene får utdelt kalkulator
- Det kan lages en egen modul slik at læreren får tilgang på prøven og på hver enkelt elevs svar på samtlige oppgaver
- Læreren og elevene kan få rask tilbakemelding av resultatene.

Det å lage gode nettbaserte prøver innebærer mange nye utfordringer. Eksempler:

- En bør prøve å unngå oppgaver som like gjerne kunne vært gitt på papir
- Det bør utvikles et verktøy for skriving av matematiske symboler
- Å skrive ned regneprosessen på dataskjermen ved f.eks. løsning av likninger vil være en ny utfordring for elevene
- Det er mulig, men neppe ønskelig, å utvikle et verktøy for "konstruksjon med passer og linjal" på skjermen. Det samme gjelder også "praktiske målinger" på dataskjermen
- Fare for utveksling av informasjon mellom elever pga lang prøvetid ved den enkelte skole
- Maskinparken på skolene gir sterke begrensninger. På 7. trinn måtte oppgavene utformes slik at de kunne løses på en 800×600 skjerm.

Planlagt utvikling videre

Tidlig på høsten 2005 hadde gruppen som lager nasjonale prøver i matematikk følgende plan for nettbaserte prøver skoleåret 2005/06:

- 4. trinn: frivillig nettbasert prøve med en tidsramme på 30 minutter, i tillegg til obligatorisk skriftlig prøve
- 7. trinn: frivillig nettbasert prøve med en tidsramme på 90 minutter, i tillegg til obligatorisk skriftlig prøve
- 10. og 11. trinn: de skriftlige prøvene erstattes av obligatoriske nettbaserte prøver høsten 2006, hver med en tidsramme på 120 minutter.

Som kjent ble de nasjonale prøvene midlertidig stanset inneværende skoleår, og vi vet ikke når de eventuelt kommer i gang igjen. Vi som arbeider med utviklingen av matematikkprøvene har observert hvor godt den nettbaserte prøven for 7. trinn ble mottatt både av lærere og elever. Så dersom de nasjonale prøvene settes i gang igjen, ønsker vi at det blir satset på en overgang fra skriftlige prøver til nettbaserte prøver.

Pedagogisk etterbruk

Dersom de nasjonale prøvene blir gjeninnført, har vi som står bak utviklingen av nettbaserte prøver i matematikk følgende ønsker:

- Vi ønsker å lage en stor database med dynamiske oppgaver innen hvert trinn
- Noen oppgaveideer skal måles på tvers av trinn
- Noen oppgaveideer skal være "gjengangere" fra år til år
- Oppgavene skal følges opp av gjennomarbeidede veiledninger for de forskjellige emneområdene i matematikken
- Vi ønsker at de nasjonale prøvene først og fremst skal fungere som et pedagogisk verktøy for læreren
- Data fra prøvene bør kunne lagres lokalt på skolen
- Lærerne får tilgang på egne elevers resultater og svar på enkeltoppgaver
- Lærerne bør kunne sammenlikne egne elevers resultater på individ-, gruppe- og nasjonalt nivå og få svar på spørsmål av typen: "Hvilke kompetanseområder er godt/svakt utviklet hos mine elever?"

Joakim von Wright
Jag har i tre år undervisat matematik, fysik och datateknik vid Vasa övningsskola. Skolan är knuten till den finlandssvenska lärarutbildningen vilket betyder att jag också handleder blivande matematiklärare. Tidigare arbetade jag med forskning inom datateknik, speciellt programmeringsalgebra och användning av datorstöd för att bevisa egenskaper hos datorprogram. På fritiden ägnar jag mig åt musik och utomhusliv – så här på hösten är svampplockning mitt främsta nöje.

Strukturerade härledningar – en datorstödd metod för presentation av matematik

Matematik med lite logik
– strukturerade härledningar i skolmatematiken

Ralph-Johan Back (Åbo Akademi)
Joakim von Wright (Vasa övningsskola)

Vi visar hur lösningen på en matematikuppgift kan framställas som ett strukturerat matematiskt dokument, en *strukturerad härledning* [1,2]. En sådan härledning åskådliggör hela lösningsprocessen och synliggör logiska sammanhang och slutledningar, med hjälp av ett litet mått logisk symbolik. Strukturerade härledningar kan efteråt analyseras och korrigeras, och de kan publiceras på webben i en form som man kan bläddra i. Användningen av strukturerade härledningar har testats systematiskt i fyra år vid en finsk gymnasieskola, med goda resultat.

Vad är en strukturerad härledning?

Studerande i gymnasieskolan har ofta svårt att motivera matematiska slutsatser och att strukturera bevis. Om man jämför dagens gymnasiekurs[13] i matematik med hur kursen såg ut för 30-40 år sedan har betoningen på bevis klart minskat. Detta trots att det finns starka argument för att träna rigorös argumentering [5,6]. Logikens symboler används ytterst lite, och då logik ingår i kursen är det som ett eget studieobjekt snarare än som ett verktyg för matematisk problemlösning. Lösningar till matematikuppgifter skrivs på ett ostrukturerat och informellt sätt. Detta gör det svårt för elever att få en klar uppfattning om när en uppgift är löst på ett tillfredsställande sätt, och det är också svårt att efteråt diskutera en lösning. Inom vissa specifika områden finns det klart strukturerade standardsätt att skriva lösningar – det främsta exemplet är ekvationslösning, men också där är ofta oklart för studerande tex varför en ekvation saknar lösningar om man lyckas härleda $0 = 1$ från den. Den nya gymnasieläroplanen i Finland [9] betonar att matematisk information har en logisk struktur och uppställer som mål att studerande skall kunna välja problemlösningsmetoder och motivera exakta slutsatser. Det är alltså motiverat att satsa på välstrukturerade argument och att undvika ad-hoc-metoder i matematikundervisningen.

[13] Begreppet ”gymnasium” syftar här på den finländska gymnasieskolan, närmast jämförbar med de teoretiska linjerna i den svenska gymnasieskolan.

Inom datateknisk forskning har ett kalkylerande sätt att skriva bevis och härledningar vunnit insteg under de senaste två decennierna [3]. Det kalkylerande bevisparadigmet har också använts vid undervisning i diskret matematik för datateknikstuderande [4]. Strukturerade härledningar är en vidareutveckling av detta bevisparadigm. Två enkla exempel visar idén bakom kalkylerande bevis och strukturerade härledningar. Det vänstra exemplet är en ekvationslösning och det högra en algebraisk förenkling.

$2x - 1 = 5$	$(x-y)(x+y)+y^2$
⇔ {addera 1 till båda sidor}	= {konjugatregeln}
$2x = 6$	$x^2 - y^2 + y^2$
⇔ {dividera båda sidor med 2}	= {förenkling}
$x = 3$	x^2

Några centrala egenskaper hos härledningsformatet är:

- härledningen utgår ifrån ett givet uttryck som stegvis ändras
- varje version av uttrycket skrivs på en ny rad
- varje steg leder framåt via en relation (här ekvivalens och likhet)
- vid varje steg skrivs motiveringen inom klamrar

Vi har avsiktligt placerat ekvationslösningen och polynomförenklingen bredvid varandra för att understryka parallellen mellan ekvivalenssymbolen och likhetstecknet. De olika ekvationerna är relaterade genom ekvivalens, på samma sätt som de olika polynomuttrycken är relaterade genom likhet. Eftersom både ekvivalens och likhet är transitiva så relaterar härledningarna också det första och det sista uttrycket. Att det sista uttrycket är ett ”svar” motiveras av att de uppfyller ett allmänt accepterat enkelhetskriterium.

Logik som verktyg

Strukturerade härledningar förutsätter att ett litet mått grundläggande logik är bekant. I praktiken kommer man långt med symboler för sant och falskt (*T* och *F*), konnektiverna och, eller och inte ($\wedge$, $\vee$ och $\neg$) samt relationssymbolerna ekvivalens ($\Leftrightarrow$). Implikationen ($\Rightarrow$) kan lämnas till något senare, när de studerande lärt sig hantera de grundläggande symbolerna. Därtill bör man kunna använda de tre konnektivernas sanningsvärdestabeller samt regler ur den booleska algebran, i stil med

$$p \vee F \Leftrightarrow p \qquad \neg p \vee p \Leftrightarrow T \qquad p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

Viktigt är att logiken ses som ett verktyg för matematiken, inte som ett eget studieobjekt. Följande ekvationslösningsexempel visar hur logikens symboler kommer till praktisk användning.

$x(x^2+1)=0$
⇔ {nollproduktregeln}
$x=0 \vee x^2+1=0$
⇔ {en kvadrat kan inte vara negativ}
$x=0 \vee F$
⇔ {logikens regler}
$x=0$

I det andra steget används att ekvationen $x^2+1=0$ är falsk för alla värden på x, dvs den är ekvivalent med F. Märk att vi i varje steg har ett aritmetiskt-logiskt uttryck som är ekvivalent med den ursprungliga ekvationen.

Delhärledningar

Delhärledningar är en viktig del av strukturerade härledningar. En delhärledning är indragen högerut och den motiverar ett steg i den yttre härledningen. Vid behov kan delhärledningar döljas så att man ser en mindre detaljerad version av hela härledningen. Följande exempel visar en fullständig härledning till vänster och samma härledning med delhärledningarna dolda till höger.

$|x-3|=2x$
⇔ {egenskaper hos absolutbelopp}
$x \geq 0 \wedge (x-3=2x \vee x-3=-2x)$
⇔ {lös ekvationerna}
- $[\, x \geq 0 \,]$
  $x-3=2x$
  ⇔ {subtrahera x från båda sidor}
  $-3=x$
  ⇔ {utnyttja $x \geq 0$ }
  F
- $[\, x \geq 0 \,]$
  $x-3=-2x$
  ⇔ {addera $2x+3$ till båda sidor}
  $3x=3$
  ⇔ {dividera båda sidor med 3}
  $x=1$

... $x \geq 0 \wedge (F \vee x=1)$
⇔ {logikens regler}
$x \geq 0 \wedge x=1$
⇔ {förenkling}
$x=1$

$|x-3|=2x$
= {egenskaper hos absolutbelopp}
$x \geq 0 \wedge (x-3=2x \vee x-3=-2x)$
= {lös ekvationerna}
... $x \geq 0 \wedge (F \vee x=1)$
⇔ {logikens regler}
$x \geq 0 \wedge x=1$
⇔ {förenkling}
$x=1$

Början på en delhärledning anges här med en fylld punkt (•) och återgången till den yttre härledningen med tre punkter (**...**). Exemplet ovan visar också hur en delhärledning kan använda *kontextuell information*: vi utnyttjar informationen $x \geq 0$ då vi löser de ekvationer som bildade en konjunktion med uttrycket $x \geq 0$.

I den högra härledningen ovan visas den plats där det finns en dold delhärledning genom att motiveringen är understreckad. Då härledningen publiceras på webben skall understreckningen tolkas som en länk – då man klickar på motiveringan så ”viks” delhärledningarna fram.

Den pedagogiska aspekten

Vår pedagogiska tes är att en systematisk användning ett strukturerat skrivsätt kan bidra till att förbättra inlärningsresultaten i gymnasiematematiken. Metoden tvingar den studerande att motivera varje steg och att se lösningen som en helhet. Dessutom ger den lösningar som i efterskott kan läsas och förstås, diskuteras och korrigeras. Möjligheterna att publicera lösningarna i ett dynamiskt format på internet gör också att de kan vara till stor nytta i samband med webbaserad distansundervisning. Strukturerade härledningar kan inte ersätta kreativitet och djup förståelse, men de kan hjälpa studerande att uppnå den dubbla kompetens (kombinationen av begreppsförståelse och räknefärdighet) som konstaterats vara kritisk för effektivt matematiklärande [7].

Strukturerade härledningar har sedan år 2001 använts i ett undervisningsexperiment vid gymnasieskolan Kupittaan lukio i Åbo [8]. En experimentgrupp undervisades genom hela den långa matematikkursen med användning av strukturerade härledningar. En kontrollgrupp undervisades parallellt med traditionell metod av en annan lärare. Randomiserade grupper hade varit idealet, men av praktiska orsaker var det inte möjligt. I stället utgjordes försöksgruppen av studerande som valt datateknisk inriktning, och resultaten skall därför tolkas försiktigt. I försöksgruppen användes datorstöd för att presentera lösningar med dolda delhärledningar, men de studerande skrev lösningarna med papper och penna. Tabellen till höger visar de två gruppernas medelresultat, dels i avgångsbetyget från grundskolan (BEC), dels medelresultatet i de tio obligatoriska matematikkurserna (C1-10) och dels provresultatet i studentexamen (MEP), omvandlade till en skala där de godkända vitsorden går från 5 till 10.

	Experiment	Kontroll
BEC	9,73	9,17
C1-10	8,30	6,75
MEP	8,77	7,17

Också om man inte kan dra långtgående slutsatser av resultaten är de uppmuntrande, och de preliminära resultaten från följande årskurs visar samma trend. En negativ effekt är att några elever i försöksgruppen uppenbart led av att man använde ett traditionellt kursmaterial som inte var anpassat till strukturerade härledningar. Trots det är också de kvalitativa resultaten uppmuntrande: enligt läraren som utfört experimentet var de studerandes inställning till metoden positiv och deras lösningar var lättare att korrigera [8].

Slutord

En utförligare beskrivning av hur strukturerade härledningar används inom olika delområden inom gymnasiematematiken hänvisas till [2]. Metoden utvidgas där till att hantera härledningar med påståenden i textform, hänvisningar till figurer och tabeller, och användning av kvantorer. Där ingår också lösningar till alla uppgifter i det långa matematikprovet i den finska studentexamen 2003 och ett exempel på hur en kort kurs i talteori kan läggas upp.

Referenser

[1] R-J. Back and J. von Wright. Refinement Calculus – a Systematic Introduction. Springer-Verlag 1998.

[2] R-J. Back och J. von Wright. Matematik med lite logik. Manuskript 2005.

[3] E.W. Dijkstra and C. Scholten. Predicate Calculus and Program Semantics. Springer-Verlag 1990.

[4] D.Gries and F. Schneider. Teaching math more effectively through calculational proofs. *American Mathematical Monthly*, pp 691–697, October 1995.

[5] G. Hanna and H. N. Jahnke. Proof and application. *Educational Studies in Mathematics*, 24:421–438, 1993.

[6] C. Hoyles. The curricular shaping of students' approaches to proof. *For the Learning of Mathematics*, 17(1):7–16, February 1997.

[7] F. Marton och S. Booth. Om lärande. Studentlitteratur 2000.

[8] M. Peltomäki and T. Salakoski. Strict Logical Notation Is Not a Part of the Problem but a Part of the Solution for Teaching High-School Mathematics. Proceedings of Koli Calling 2004, pp. 116-120. Helsinki University of Technology, 2004.

[9] Grunderna för gymnasiets läroplan. Utbildningsstyrelsen (www.edu.fi) 2003.

Anne Berit Fuglestad
er høgskoledosent i matematikkdidaktikk ved Høgskolen i Agder. Hun har i mange år arbeidet med lærerutdanning i matematikk, informatikk og i bruk av IKT i matematikkundervisningen. De siste årene har hun arbeidet mest med veiledning for master- og doktorgradsstudenter og ledet FoU prosjekter: IKT kompetanse i matematikk ungdomsskolen og fra 2004 KUL prosjektet IKT og læring i matematikk, med støtte fra NFR.

IKT-verktøy i matematikk - elevers valg, løsninger og vurderinger

I et treårig prosjekt med IKT i matematikkundervisning i ungdomsskolen var målet å utvikle elevenes kompetanse til selv å kunne velge hvilke verktøy de ville bruke for å løse en gitt oppgave, IKT verktøy eller andre hjelpemidler. Dette har bakgrunn i læreplanens mål (L97) om å utvikle elevenes selvstendighet og evne til å vurdere forskjellige verktøy. I en arbeidsperiode over 6 – 10 timer i slutten av prosjektet fikk elevene et hefte med 12 forskjellige oppgaver. De fikk velge hvilke oppgaver de ville løse og hvilke dataprogrammer eller andre hjelpemidler de ville bruke. Like etter arbeidsperioden besvarte de et spørreskjema der de bl.a. fikk begrunne sine valg av verktøy for noen oppgaver de arbeidet med og lignende spørsmål om noen nye oppgaver. I denne artikkelen vil jeg presentere resultater fra arbeidsperioden; fra spørreskjema og noen av elevenes løsninger.

To gutter diskuterer og arbeider
Tom og Hans arbeidet side om side med en oppgave de hadde valgt å løse av 12 mulige. Det dreide seg om en klassetur med buss der de skulle se på pristilbud fra tre busselskap, velge blant tre ulike reisemål og så vurdere hva de ville gjøre. Det var ingen spørsmål så de måtte selv se på hva de burde beregne og finne ut av med tanke på en slik klassetur.

> *Klassetur med buss*
> Elevene ved Lie skole skal på klassetur sammen med tre lærere. De ber om pristilbud fra tre selskap: *Ryenruta* gir dette tilbudet: 1100 kr i fast avgift og 5,50 kr per kilometer. *Lie turservice* gir dette tilbudet: 9 kr per kilometer. *Hagenruta* tilbyr fast pris: 4000 kr for turer opp til 800 km
> Elevene vurderer tre mulige turer:
> Kristiansand Dyrepark ca 200 km en veg,
> Tusenfryd ca 140 km en veg og
> Hunderfossen ca 320 km en veg

Figur 1 Oppgave 10

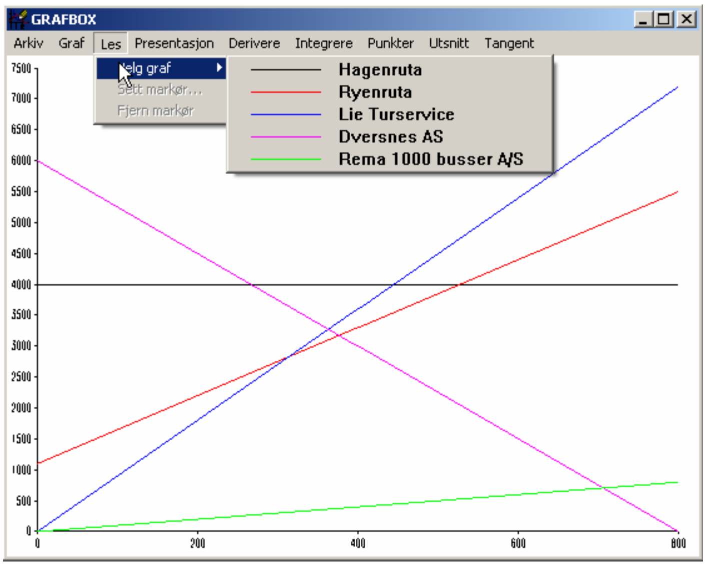
De to guttene satt ved siden av hverandre med hver sin datamaskin og diskuterte livlig. Begge hadde sine bestemte valg av verktøy og ble ikke enige. Tom valgte Grafbox og sa han likte dette fordi han hadde gjort noe lignende før og hadde "teken" på det. Han valgte Grafbox: *Fordi på det programmet kan du også få oversikten på oppgave 10 som gjelder om når det er lønnsomt å bruke forskjellige ting. Men, på den oppgaven syns jeg Kurvetegningsprogram egner seg best.* Han brukte Grafbox først men løste også oppgaven med Excel.

Guttene diskuterte og sammenlignet løsninger. Tom fikk et overraskende resultat i første omgang og trengte litt hjelp til å velge riktig skala på aksene. Han hadde brukt multiplikasjon i stedet for addisjon i formelen, og med automatisk justering av aksene ble den ene linja "usynlig". Da han fikk hjelp til å justere aksene, forstod han sammenhengen og kunne rette opp dette. Han viste at han behersket Grafbox godt, og laget sine egne modeller, litt utradisjonelt, at det ble billigere ved flere kilomenter ved å bruke negativt stigningstall. Han kommenterte. *Jeg kan slå dem alle. Jeg blir ikke rik av dette men det er gøy å lage den.*

Kunne de finne igjen svarene fra Grafbox i løsningen på regnearket? Hans løste oppgaven med regneark først, og beregnet bare for de bestemte avstandene som var oppgitt for noen reisemål i oppgaven. Dermed ble det vanskelig å sammenligne i første omgang og det ga også grunnlag for spørsmål og videre diskusjon for å finne sammenhengen (Fuglestad, 2005).

Oppgave 3 som mange likte dreide seg om å planlegge salg fra en kiosk. Hvorfor likte du den? En elev svarte: *Den var enkel på den måten at jeg skjønte den, men kanskje også litt vanskelig på den måten at den var en liten utfordring også. Det at jeg i det hele tatt klarte å løse oppgaven var det som gjorde at jeg likte den.*

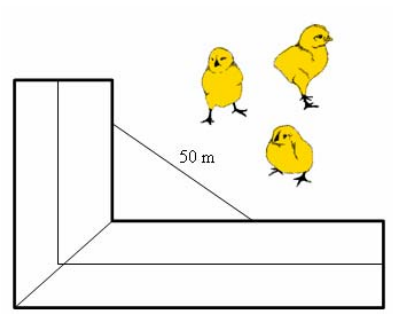
Eleven brukte Excel i løsningen: *Fordi det er mye lettere å sitte med regnearket på PC' en enn å sitte å streve i evigheter for å regne ut store stykker. Jeg så liksom regnearket for den beste løsningen.* Mer om denne oppgaven senere.



Figur 2 Toms løsning i Grafbox

En annen oppgave i heftet (oppgave 8) var om å planlegge et gjerde for hønsegård inn til et hus, slik som på figuren: Hønsegården lages slik at arealet blir en trekant der låvebygningen danner to av sidene, og det 50 meter lange gjerdet er den tredje sida.

Det var bare tre elever som valgte denne oppgaven som en de likte godt. En elev skrev: *Pga da var Cabri veldig greit å bruke. Det er gøy å prøve seg fram i slike programmer. Mixe å trixe som du føler.* Og videre skriver han om hvorfor:
Pga jeg jobber bedre med disse hjelpemidlene, syntes også det er lettere. På spørsmål hva han lærte var svaret: *At du kan bruke Cabri til veldig mye.* Og en annen elev som likte denne sier han brukte Cabri og Excel: *Jeg brukte cabri for jeg tenkte det egnet seg best til oppgaven, men når jeg var ferdig i cabri fant jeg ut at jeg også kunne bruke exel*



Figur 3 Hønsegården

Det var få elever som valgte oppgaver der det var naturlig å tenke geometrisk og bruke Cabri. Dette kan ha sammenheng med at det var lite bruk av Cabri i mange av klassene. Det viste seg underveis at programmet var lite kjent blant lærerne og dermed ble det også lite brukt i klassene. Cabri og ideer til bruk ble tatt opp i prosjektmøtene og det ble gitt et lite kurs for lærerne i Cabri.

IKT kompetanse prosjektet - å kunne bruke og kunne velge IKT verktøy
Oppgavene som er omtalt her er fra en oppsummeringsperiode i prosjektet IKT kompetanse i ungdomsskolen. Et mål i prosjektet var at elevene etter hvert skulle utvikle sin kompetanse til å bruke dataverktøy og forstå og eksperimentere med sammenhenger slik at de selv kunne velge hvilket verktøy de ville bruke for en bestemt matematikkoppgave (Fuglestad, 2003a). For å oppnå dette var et åpent læringsmiljø med samarbeid og muligheter for elevenes egne valg en forutsetning.

Med IKT verktøy tenker jeg her på dataprogrammer som er åpne og fleksible, ikke laget for en bestemt oppgave, men kan brukes i forskjellige sammenhenger og gjør det mulig for brukeren selv å planlegge og bestemme hva som skal gjøres. Programmet må gi muligheter for å representere matematiske begreper og sammenhenger. Det er en styrke om programmene kan integrere flere forskjellige representasjoner og stimulere til refleksjon og diskusjoner om matematiske sammenhenger. Valg av programvare tok utgangspunkt i dette. I klassene som var med i prosjektet ble det arbeidet med IKT verktøy: regneark, Excel eller regneark i Open office, dynamisk geometriprogram, Cabri og graftegneren Grafbox.

Prosjektideen har bakgrunn i læreplanen, L97, som slår fast at elevene skal *ha kjennskap til bruk av IT og lære å vurdere hvilke hjelpemidler som passer i en gitt situasjon* (KUF, 1996). I fagplanen er det videre understreket et konstruktivistisk syn på læring, som innebærer at elevene konstruerer selv sine kunnskaper i interaksjon med omgivelsene. Utforsking og eksperimentering med matematiske sammenhenger og samarbeid med andre elever, diskusjon og refleksjon over erfaringer er viktige elementer i arbeidet. Det var et mål å bruke oppgaver som utfordret elevenes til egne valg og ideer til løsninger.

I læreplanen som nylig er vedtatt er det å kunne bruke digitale verktøy en av fem grunnleggende ferdigheter i matematikk som i andre fag (UFD, 2005). I matematikk dreier det seg om å kunne bruke digitale hjelpemidler til spill, utforsking, visualisering og publisering. Videre å vite om, kunne bruke og å kunne vurdere digitale hjelpemidler til problemløsning, simulering og modellering. I tillegg er det viktig å kunne finne informasjon, analysere, behandle og presentere data med passende hjelpemidler, samt forholde seg kritisk til kilder, analyser og resultater. Vi ser at ideene fra L97 er videreført når det gjelder å kunne vurdere og å bruke digitale verktøy.

Seks klasser med lærere deltok i prosjektet som gikk over 3 år. De første årene med vekt på utvikling av lærernes kompetanse og gjennom prosjektmøter hvert semester med diskusjon av undervisningsideer og erfaringer fra egne klasser. Prosjektlederne, en erfaren lærer og jeg, presenterte ideer og undervisningsmateriell i form av datafiler og arbeidsark for elevene. Etter hvert utviklet også lærerne egne datafiler med oppgaver til elevene. Det ble ikke gitt ferdige planer og lærerne hadde selv fullt ansvar for hva de ville bruke i undervisningen. På den måten mente vi som prosjektledere at det ville gi varige resultater angående bruk av IKT i klassene, som lærerne ikke bare brukte for å tilfredsstille behov i prosjektet, men fordi de selv hadde gjennomtenkt ideene.

I første del av prosjektet var vekten på utvikling av måter å bruke IKT verktøy i matematikkundervisningen med åpne oppgaver og muligheter for elevenes egne valg. Det siste året var det også vekt på forskning for å vurdere om målet var nådd. Hvilke oppgaver liker elevene å arbeide med? I hvilken grad kan elevene utnytte IKT verktøy og gjøre fornuftige valg for en bestemt oppgave eller et problem i matematikk? Hvilke grunner gir de for sine valg?

Spørreskjema – hvilke oppgaver elevene kommenterte

I siste semesteret i mars - mai, da elevene var i 10.klasse, ble det satt av 6 - 8 undervisningstimer der elevene fikk arbeide med et heftet med 12 oppgaver med varierende vanskegrad og tema. Noen av oppgavene hadde klare spørsmål, mens andre var mer åpne og elevene måtte selv finne ut hva de skulle bruke informasjonene til, slik som oppgaven om klassetur med buss som Tom og Hans arbeidet med. Datamaskiner med programvare var tilgjengelig i alle timene. De kunne velge hvilke oppgaver de ville løse og i hvilken rekkefølge, og om de ville bruke IKT verktøy eller løse oppgavene på andre måter. Elevene kunne samarbeide med hverandre og kunne stille spørsmål. Slik ble det en god arbeidsperiode. I denne perioden ble elevene observert, det ble tatt lyd eller videoopptak og en del datafiler fra arbeidet ble samlet inn.

Kort tid etter denne arbeidsperioden ble elevene gitt et spørreskjema på Internett der de fikk spørsmål knyttet til oppgavene de løste. Bare noen av spørsmålene er kommentert her. For en oppgave de likte godt skulle de angi hvorfor de likte den, hvilke verktøy de brukte og hvorfor. Se figur 4. Tilsvarende spørsmål ble også stilt angående en oppgave de ikke likte så godt å arbeide med.

Hva valgte du?

Tenk på de oppgavene dere har arbeidet med i matematikk de siste ukene. Du kan se i heftet.

A Angi en oppgave du likte godt, oppgi oppgavenummer: __________

Hvorfor likte du godt denne oppgaven:

Hva slags hjelpemidler brukte du i den oppgaven? Kryss av en eller flere:
☐ Papir og blyant, ☐ Lommeregner, ☐ Regneark, ☐ Cabri, ☐ Grafbox

Andre hjelpemidler: ______________

Hvorfor brukte du dette hjelpemidlet?
____

Hva mener du at du lærte du av denne oppgaven?

Figur 4 Fra spørreskjema på web

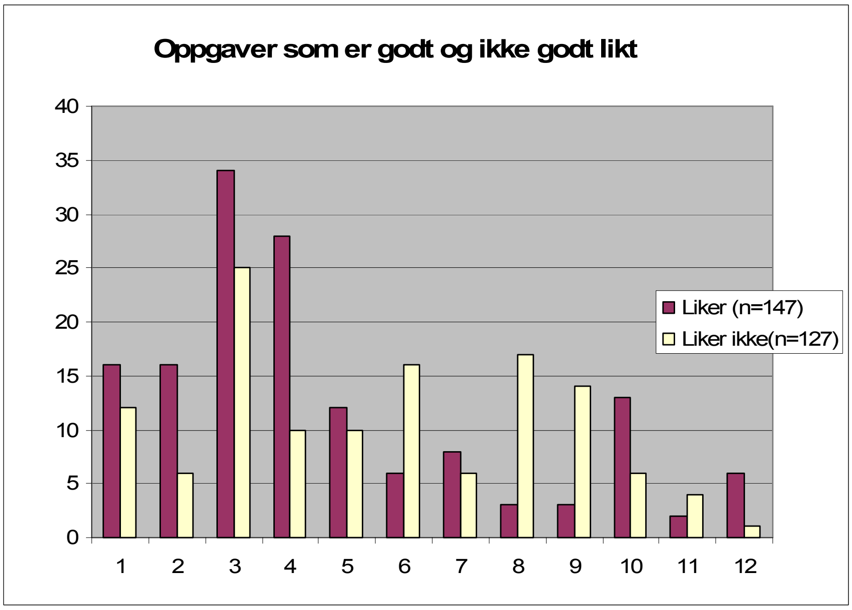
Elevenes valg av løsninger og hvorfor

En oversikt over valgene for hver av oppgavene viser ganske store variasjoner fra oppgave til oppgave med hensyn til om elevene liker dem eller ikke. Se diagram på Figur 5, på neste side. Oppgave 3 om å planlegge salg i en kiosk, var godt likt av mange, 34, men det var også 25 som ikke likte den så godt. En annen godt likt var oppgave 4 om beregne hvordan en kapital vokser med renter over noen år. Den ble valgt som en de likte godt av 28, men ble ikke godt likt av 10 elever. Oppgave 8 om hønsehuset som bare 3 likte godt var det 12 som ikke likte. Oppgaven om busstur, som Tom og Hans diskuterte ivrig var godt likt av 13 elever, men 6 likte den ikke så godt.

Det var også noen forskjeller mellom gutter og jenter, der gutter likte bedre oppgave 4 mens jenter likte bedre oppgave 3 og 10. Se egen artikkel i denne konferanserapporten om gutters og jenters valg (Fuglestad, 2006).

Det er vanskelig å trekke bestemte konklusjoner på grunnlag av variasjonene. Det kan være flere oppgaver elevene likte, og her skulle de velge ut en som de skulle kommentere. Tilsvarende for oppgaver de ikke likte. En elev svarte for eksempel slik på oppgaver han ikke likte: *Likte alle* og en annen svarte *Egentlig var det ingen jeg absolutt ikke likte, men det må vel bli denne jeg likte minst av de jeg gjorde* (om oppgave 3).

Noen begrensinger i valg kan skyldes at en del elever ikke rakk å arbeide med alle oppgavene eller at det i noen klasser ble arbeidet mindre med Cabri. Derfor ble det mindre aktuelt å arbeide med de oppgavene der Cabri kunne være et naturlig verktøy, som oppgavene 8, 9 og 11. Hensikten her er ikke å rangere oppgavene etter popularitet, men å se på elevenes begrunnelser for hva de likte og ikke, og hvilke typer oppgaver de kommenterte. I det følgende vil jeg gi eksempler på oppgaver og elevenes løsninger og kommentarer.



Figur 5 Oversikt antall oppgaver

Frimerkeproblemet

Den første oppgaven i heftet var en enkel oppgave der ideen er å kombinere et antall av hver verdi for å oppnå det aktuelle beløpet 20,40 NOK.

Flere hjelpemidler kunne være aktuelle, hoderegning, papir og blyant kalkulator eller regneark sammen med å prøve systematisk forskjellige tall. Gjennomgang av elevenes besvarelser viste også en god variasjon av metoder:

- Hoderegning (ikke Excel)
- Skrive i Excel – ikke regne
- Tallkolonner med beregninger
- Eksperimentering med formelen
- Tabeller kombinerer regneoperasjoner
- Lærerens store tabell

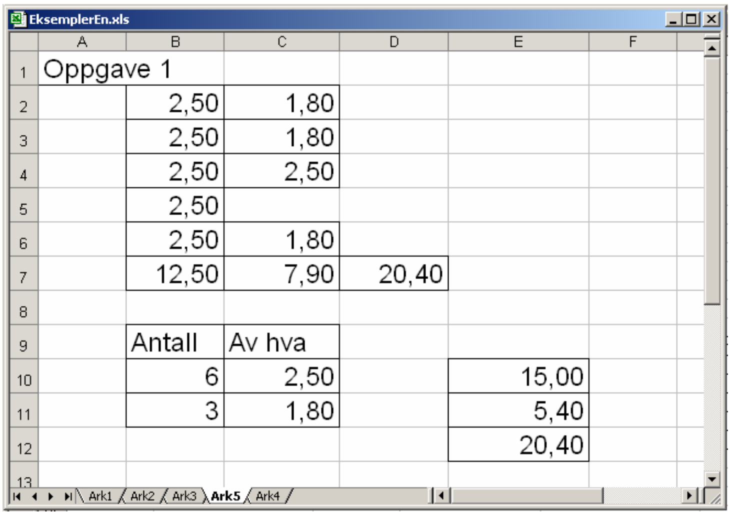
> Fredrik skal sende en gave til Hanna i Los Angeles. Det koster 20,40 kr å sende pakka. Fredrik har frimerker med verdier 2,50 kr og 1,80 kr.
>
> Hvor mange av hver sort må han sette på pakka for at det skal bli nøyaktig 20,40 kr?

Fig. 6 Oppgave 1

En elev kommenterte hvorfor han likte denne: *Endelig en oppgave der hoderegning var aktuelt.* En annen elev forklarte sin løsning til læreren slik: *Jeg så på komma førti og fant at jeg måtte bruke tre ganger 1,80 for å få dette. Så det var lett å finne løsningen ved å prøve forskjellige tall i hodet mitt.*

Noen få elever brukte regnearket bare for å skrive ned hvordan de regnet, men brukte kalkulator for å finne svarene. De utnyttet ikke regnearkets muligheter med formler i beregningene. De avslørte også andre svakheter i forståelsen av oppgaven og hvilke tall som kunne være svar, for eksempel svaret: *11,3333 frimerker trenger du av dette slaget…”.*

Flere elever brukte regneark for å systematisere sine undersøkelser av mulige kombinasjoner. Figur 7 viser hvordan en elev gjorde det. Eleven har skrevet opp pris for hvert frimerke og eksperimenterer med å bytte ut noen av tallene. Det er formler i cellene i linje 7 og i kolonne E. I linjene 9 -11 vises en annen løsning.



	A	B	C	D	E	F
1	Oppgave 1					
2		2,50	1,80			
3		2,50	1,80			
4		2,50	2,50			
5		2,50				
6		2,50	1,80			
7		12,50	7,90	20,40		
8						
9		Antall	Av hva			
10		6	2,50		15,00	
11		3	1,80		5,40	
12					20,40	

Figur 7 Løsning av frimerkeproblemet

Flere elever hadde lignende løsninger som de to dette eksempelet viser.

To elever arbeidet sammen, og jeg observerte at de hadde en stor matrise med tall som beregnet beløpet for alle mulig kombinasjoner av antall frimerker. Elevene hadde et svar men kunne ikke forklare hvordan det virket og var usikker på løsningen. Det viste seg at læreren hadde funnet denne løsningen kvelden før da han undret seg over om det var mulig å finne om det var flere svar og i tilfelle finne alle løsningene. Og da elevene spurte viste han dem hvordan de kunne gjøre det. Det var stor variasjon i løsninger av oppgaven. De ulike svar gir gode muligheter for videre diskusjon i klassen.

Elevbedrift – planlegge salg i kiosk

Denne oppgaven kom best ut på spørsmål om en oppgave elevene likte å arbeide med.

Den praktiske problemstillingen synes å virke motiverende på mange elever. Et par elevsvar bekrefter dette: *Fordi det var vi på en måte som vi lagde oppgaven til oss selv. Vi kunne bestemme litt mer, lage et eget oppsett* (Excel) *Fordi det er greit og lage et fint oppsett i det. Pluss at vi fant ut at vi skulle simulere tallene ved hjelp av tilfeldig.* Og en annen elev skriver. *Fordi man kunne bruke fantasien og bestemme mye selv. Man valgte selv hvor mye det skulle kjøpes inn, og hvor mye utsalgsprisen skulle være osv.* (Excel) *For det var enklest og passet til oppgaven.*

Salg i kiosk
Elevbedriften til en 10. klasse skal stå for kiosksalget ved flere arrangementer Første oppdrag er et idretts-arrangement med ca 400 deltakere i alderen 13 – 16 år. Det blir også ca 200 voksne til stede.
Det foregår utendørs en varm dag i juni. og varer fra klokken 10.00 til 16.00
Oppgaver videre gjelder planlegging av innkjøp, antall av hvert slag, utsalgspriser, beregning av inntekter og fortjeneste osv.

Fig. 8 Oppgave 3

De fleste elevene som valgte denne, brukte Excel i løsning av oppgaven og noen brukte også kalkulator i tillegg. Men det er variasjoner i måten å gjøre det på:

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	**Elevbedrift**								
2									
3	Varer	Innkjøpspris	Antall varer	Utsalgspris	Antall solgte	Innkjøpspris for alt	Varer igjen	Solgt for:	Fortjeneste
4									
5	Brus	10	1000	15	605	10000	395	9071	-929
6									
7	Vafler	0	200	5	150	0	50	748	748
8	*Fra foreldre*								
9	Pølser/m brød	6	400	10	385	2400	15	3853	1453
10									
11	Stratos 100g	8	50	10	42	400	8	419	19
12									
13	Hobby	10	50	13	43	500	7	433	-67
14									
15	Toast	5	300	7	267	1500	33	1870	370
16									
17	Chips	7	200	11	188	1400	12	2073	673
18								**Sum:**	**2267**

Figur 9 Løsning på kioskoppgaven.

Løsningen i Figur 9 gir en god oversikt og viser løsning av flere deler av oppgaven i en stor tabell. Det er brukt formler i utregningene som bygger på kolonner foran i oppstillingen. Flere elever hadde lignende løsninger, men noen gjentok oppstillingen for hver ny oppgave, slik at det ikke ble en samlet oversikt, som for eksempel i Figur 10. Denne gir også en akseptabel og korrekt løsning, men det kan være mer effektivt med en samlet tabell. De forskjellige løsningene gir gode muligheter for læreren til å diskutere med elevene hva som er en effektiv oppstillingsmåte.

OPPGAVE 3		**Elevbedrift**
a) Brus, sjokolade, is, pizzaboller, tyggis og smurf.		
b)		
Brus	900	
Pølser	850	
Is	1200	
Smurf	500	
Tyggis	250	
c)	Enhets pris	
Brus	8	7200
Pølser	3	2550
Is	5,5	6600
Smurf	4	2000
Tyggis	4	1000
	Sum:	19350
d)		
Brus	15	13500
Pølser	12	10200

Figur 10 Kioskoppgaven i flere punkter

En elev som brukte Excel begrunnet dette slik: *fordi det er enkelt å sette opp handlelister der på en oversiktlig måte. Man kan sette opp formler slik at man automatisk ser summen av alle varene. Dette gjelder alle regnestykkene som kommer, angående inntekter og overskudd o.l. Man kan bare sette opp enkle formler. Svarene kommer nesten av seg selv... =)*

Om hva han lærte: *Man lærer å tenke praktisk, vanlig regning. Denne typen oppgaver kan man møte på i dagliglivet når man blir voksen*

Svaret viser at eleven har fått god innsikt i bruken av regneark og hvordan bruk av formler kan effektivisere arbeidet med oppstillingen.

Smørpakka
Denne oppgaven dreide seg om å finne minste overflate av pakke formet som et rett rektangulært prisme der bredden er det halve av lengden og på pakken og volumet er 500 cm^3. Observasjoner viste at denne oppgaven var matematisk mer utfordrende, og bare 6 likte den mens 16 krysset av for at de ikke likte den. Flere elever kommenterte at den var vanskelig. En kommentar fra en elev som ikke likte den: *for den var så vanskelig og finne ut vordan man skulle reine ut* og en annen: *Litt frustrerende oppgave. Litt vanskelig, men samtidig utfordrende. Likte egentlig alle oppgavene men det var denne som tiltalte meg minst.*

En gruppe med 3 – 5 gutter forsøkte å løse oppgaven på regneark. I første omgang satte de inn tall for lengde bredde og høyde og regnet ut volum og overflate, men satte ikke opp noen sammenheng mellom lengde, bredde og høyden. Det tok tid for dem å finne de tre sidene slik at volumet ble 500, og de fant at det ble for tungvint. Det måtte finnes en sammenheng! Elevene kommenterte mens de arbeidet: *".. det må være en formel"*
Og en annen "- *må ha en formel som gir en sammenheng mellom de to – vil det bli bare en ukjent?"* Etter hvert kom de videre. I første omgang med ei celle for bredde og formler for lengde og høyde slik at de kunne eksperimentere med bredden, men med fast volum. De trengte litt hjelp for å lage en tabell som de kunne arbeide videre med for å finne minst mulig overflate. Senere observerte jeg at de brukte en lignende tabell i en annen oppgave. Flere andre elever hadde problemer med å sette opp sammenhengen mellom lengde, bredde og høyde i formler på regnearket.

I en annen klasse var det flere løsninger av samme oppgave. To jenter som arbeidet samme laget en løsning både på regneark og i Cabri. Cabri-løsningen viste de tre forskjellige rektanglene i overflaten slik at når bredden ble forandret ble de andre sideflatene også justert tilsvarende. To andre jenter brukte Grafbox, etter at de hadde funnet en formel for overflaten. For mer om disse løsningene, se i Tangenten, nr 2/2005 (Fuglestad, 2005)

Mobilabonnement – oppgave uten spørsmål
Det var varierende vanskegrad og formuleringer av oppgavene. I noen av dem var det ikke gitt noe spørsmål, bare data og informasjoner og elevene måtte selv finne ut hva de ville gjøre. Slik var det i oppgaven om bussturen som Tom og Hans arbeidet med og diskuterte. Dette var uvant for en del av elevene og de spurte *Hva gjør vi her – det er jo ingen oppgave?* Etter litt diskusjon ble vi enige om at det var aktuelt å finne ut noe om priser og sammenligne.

Den siste oppgaven i heftet, med tema "Det koster å ringe" hadde heller ingen spørsmål men bare to utdrag fra Internett om priser på abonnement for mobiltelefoner. Elevene måtte lage oppgaver selv. Dette er et tema som fenger elevene siden de kjenner problemstillinger fra egen bruk. De seks som likte denne godt valgte å lage oppstillinger som sammenlignet priser for ulike abonnement og leverandører.

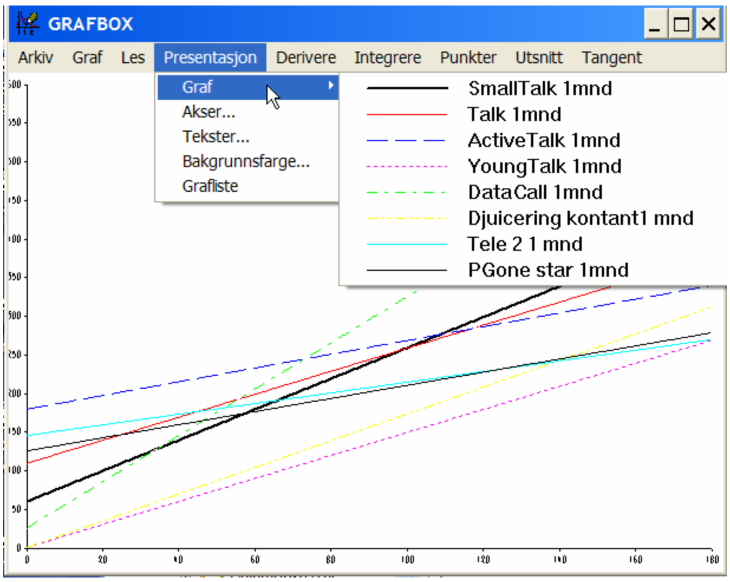
To jenter løste oppgaven på regneark. Den ene skriver det var fordi: *Det er en oppgave som jeg kan jobbe litt med, og det går også an å sette inn andre opplysninger som ikke står i heftet. Visst den hadde vært veldig vanskelig, hadde den sikkert ikke vært like gøy, men denne var passe vanskelig, og ikke for lett.* Om hvorfor hun brukte Excel skriver hun: *På regneark går det an å sette inn en tabell, og etterpå finne ut hva svarene blir ved en enkel formel, i stede for å bruke kalkulator til hvert eneste regnestykke. Det er også mange andre funksjoner på regneark, og den ene vi brukte var å finne ut hva som var minst. Poenget var å finne ut hvilket abonnement som var billigst.*

Løsningen (vist i Figur 11) ble godt utviklet med test for hvilket abonnement som var billigst og automatisk informasjon om hvilket abonnement dette var. Løsningen viser også hvilke formler som er bruk i en tekstboks nederst på arket.

	A	B	C	D	E
1	Abonnoment	Tilknyttningsavgift		Månedsavgift	
2	Small Talk (NetCom)	199	kr	59	kr
3	Talk (NetCom)	199	kr	109	kr
4	Active Talk (NetCom)	199	kr	179	kr
5	Young Talk (NetCom)	199	kr	200	kr
6	Kontant (NetCom)	199	kr	0	kr
7	Djuice (Telenor)	200	kr	79	kr
8					
9	Hvor mange minutter snakker du i telefonen hver dag?				
10	Svar:	120	min		
11					
12	**Vi anbefaler:**	Active Talk			
13	Formler:				
14	J2: =B2+D2+F2+(H2*B9)				
15	J3: =B3+D3+F3+(H3*B9)				

Figur 11 Mobilabonnement, beste valget (utdrag av regneark)

To gutter valgte å bruke Grafbox og tegnet opp funksjoner som tilsvarte de forskjellige abonnement de sammenlignet.



Figur 12 Mobilabonnement i Grafbox

De to guttene likte oppgaven og en av dem kommenterte slik: *Jeg så fort at jeg kunne bruke Grafbox for løse den. Det er en åpen oppgave så jeg kunne også gå på internett og finne andre priser og sammenligne. Dette er noe jeg kan bruke utenom skolen også.*
Han brukte Grafbox og Internett: *For å finne flere priser. Ikke bare fra NetCom*

Hva elevene likte og ikke likte å arbeide med?
Gjennom kommentarene til hvorfor de likte en bestemt oppgave viser en del av elevene at de liker utfordringer, variasjon, litt vanskelig men ikke altfor vanskelig. Her er noe elevsvar (oppgave nummer i parentes):

- Jeg kunne bestemme det meste selv og jeg kunne tenke og bruke hodet akkurat som jeg ville. Oppgaven var også veldig spennende.(3)
- Det var fordi den ikke var for vanskelig å løse. Det var en gøy oppgave. og siden jeg gjorde den på excel var det gøy, men også littt vanskelig.(4)

- Denne oppgaven var veldig vanskelig, men jeg liker utfordringer. Derfor likte jeg oppgaven.(6)
- Jeg liker oppgaver som jeg må jobbe litt med. Så denne var gøy. Liker å regne på regneark. (10)
- Det er en oppgave som jeg kan jobbe litt med, og det går også an å sette inn andre opplysninger som ikke står i heftet. Visst den hadde vært veldig vanskelig, hadde den sikkert ikke vært like gøy, men denne var passe vanskelig, og ikke for lett. (12)

Det var også noen som likte en bestemt oppgave fordi den var lett og de behersket den:
- fordi den ikke var så vanskelig (1)
- Det var en lett og fin oppgave å gjøre på dataen. (4)
- Det var fordi den ikke var for vanskelig å løse. Det var en gøy oppgave. og siden jeg gjorde den på Excel var det gøy, men også litt vanskelig. (4)
- jeg likte den godt fordi den var gøy og regne ut, og den var ikke så vanskelig (10)
- For den er veldig enkel å svar på. Det er jo bare å lage formler og kopiere. (5)

Det kom også noen klare svar på hva elevene ikke liker. Noen mener at lette oppgaver er kjedelige og ønsker utfordringer. Elevene liker ikke å gjøre det samme om og om igjen. Mange liker heller ikke altfor vanskelige oppgaver.
- Den var veldig enkel og tok kort tid. Ingen utfordring og veldig kort. (1)
- Den var lang og vanskelig (3)
- Fordi man må sette inn så mange formler på dataen og det er vanskelig å finne dem. Det tok mye tid og av og til skjønte jeg ikke helt hvorfor jeg satte inn de formlene jeg gjorde...! (6)
- Det er en oppgave som vi har hatt før, det er ikke noen vanskelig oppgave som det er noen utfordring på. (10)
- Fordi det vi gjorde først var en dum måte å løse oppgaven på, så kom læreren å viste hvordan vi heller burde gjøre det, å plutselig var det læreren som egentlig hadde gjort nesten alt. (9)

Det siste sitatet er tankevekkende. Læreren bør gi elevene en sjanse til elv å løse oppgaven. Innspill og tips kan være nyttig, men det må være en balanse og eleven må få en reell sjanse til å løse den selv.

Svarene viser at elevene har klare meninger om hva de liker. På spørsmålene om hvorfor de valgte et bestemt verktøy er det mange (40 – 60% på forskjellige oppgaver) som gir nøytrale svar, som *det er dette som passer best,* eller *lett å bruke Excel for dette* og lignende. Svaret kan være riktig, og eleven har forstått sammenhengen, men det gir lite informasjon. Men en del, ca 18% av elevene, ga gode svar med referanse til egenskaper ved programmet, som for eksempel elevsvaret angående oppgave 3 som viser til egenskaper ved Excel.

Strategier i undervisningen
Det er flere momenter til en strategi som bør være sentrale i undervisningen. Jeg ser starten med motivasjon og avslutningen med oppsummering som svært viktige.

Elevkommentarene viser hvor viktig det er å finne oppgaver og problemstillinger som de blir engasjert av. Det kan godt være utfordrende, men balansere mellom det de greier å få til og det som blir for vanskelig. Mange elever skriver om at vanskelige oppgaver er gøy, og at de liker utfordringer. Andre skriver at de liker lette oppgaver som de greier å løse.

Oppsummeringen, gjennomtenkning og diskusjon av erfaringene i klassen er nødvendig for at elevene skal få det tilsiktede utbytte av undervisningen. Det er ikke alltid elevene ser poenget selv. De kan trenge at læreren eller medelever sammenfatter og trekker fram det som er essensen i problemstillingene de har arbeidet med. Diskusjon og gjennomtenkning av flere løsninger er med på å gi dybde i forståelsen.

Underveis trenger elevene å lære grunnleggende egenskaper ved programvaren. Dette kan planlegges inn i undervisningen ved å legge opp til situasjoner og oppgaver der de trenger bestemte funksjoner i programmene. Videre, for at de skal kunne velge selv er det viktig at de får erfaringer med forskjellige verktøy. Å bruke forskjellige verktøy på samme problem kan gi gode muligheter for diskusjoner, slik det skjedde for Tom og Hans, og slik de to jentene løste smørpakkeoppgaven med både Cabri og Excel. Å se sammenheng mellom forskjellige representasjoner av matematikkproblemet vil stimulere en dypere forståelse. Det er også mulig å se å forskjellige løsninger med samme IKT verktøy og diskutere ulike tilnærmingsmåter. Frimerke oppgaven gir et eksempel på denne muligheten.

Lærerens rolle er hele tiden å gi innspill og tilrettelegge et godt arbeidsmiljø som gir passende utfordringer. Å gi innspill på viktige punkter, men uten på overta løsningen, er et viktig element i opplegget.

Noen momenter til ettertanke

Mange elever liker utfordringer, oppgavene skal ikke være for lette, men heller ikke for vanskelige. Dette kommer klart fram av en del elevsvar på spørreskjema. De liker heller ikke for mye av det samme. Dette tyder på at det kan være gunstig heller å arbeide grundig med å forstå en oppgave framfor å ha mange som er ganske like.

La elevene få tid til å undre seg, stille spørsmål til oppgaven, diskutere og prøve forskjellige løsninger.

Det er også tydelig fra svarene at elevene har behov for å lykkes med oppgavene, få det til selv. Derfor bør læreren gi tips og hjelp for slik at elevene kan komme videre, men uten at læreren overtar løsningen. Det er forståelig at en lærer som har arbeidet ganske lenge kvelden før for å løse en oppgave, har lyst til å fortelle om løsningen. En viss tilbakeholdenhet er en fordel. Det er også viktig å være våken for at elevene kan finne andre måter å løse oppgaven på. De forskjellige løsningene og angrepsmetoder kan gi et godt utgangspunkt for diskusjon av ulike sider ved oppgaven.

Elevene må få tid til å lære bruken av IKT verktøyet samtidig med problemløsningen. Det kan være gunstig å lære om programmet når behovet oppstår, framfor en systematisk gjennomgang av forskjellige mulighetene og menyvalgene.

Utfordringer videre

ITU undersøkelsen (Erstad et al., 2005) viser at lite IKT er integrert i fagene, og i matematikk bruker bare 10% av elevene datamaskiner hver uke, mens 54% ikke bruker datamaskiner i matematikkundervisningen. Mitt inntrykk er at bruk av IKT i skolen dreier seg ofte om tekstbehandling, presentasjonsverktøy som Power Point, Internett for å hente informasjon og bruk av digitale mapper for innlevering av oppgaver og rapporter via systemer for organisering av læring, LMS systemer (Learning Management Systems), for eksempel It's Learning eller Class Fronter. ITU undersøkelse bekrefter dette. For matematikkfaget betyr det at det er lite bruk som utfordrer elevenes matematiske begreper og støtter deres utvikling i forståelse og ferdigheter i matematikk. Men det er mulig ved hjelp av dataprogrammer å utfordre elevenes begrepsforståelse

(Fuglestad, 2003b). Derfor er det nødvendig å arbeide videre med tilrettelegging for god bruk av IKT verktøy i matematikkundervisningen.

Jeg har ofte møtt spørsmålet fra lærere om gode undervisningsopplegg og ideer som utnytter IKT verktøy. Lærernes egen kompetanse er en sentral faktor i undervisning og tilrettelegging av elevenes arbeid med IKT. Det synes å være mangel på IKT-pedagogisk kompetanse og til dels mangel på egen ferdighet med aktuelle dataprogrammer for matematikk. Dermed våger lærerne ikke slippe elevene løs med utforsking av nye oppgaver og bruk av IKT verktøy før de selv har løst oppgavene. Dette ble synlig både i prosjektet med IKT verktøy og i IKTML prosjektet. Da kan det også skje som jeg observerte – læreren gir elevene en løsning i stedet for å utfordre elevene til selv å finne løsninger og stimulere dem til utforsking.

Hvordan møter vi utfordringen? Det holder ikke å bare innføre IKT verktøy og gi de samme oppgavene som før. Rutineoppgaver kan gjøres raskt med datamaskiner og kalkulator, men det gir ikke nødvendigvis bedre forståelse av matematikken. Med IKT verktøy har vi større muligheter enn før til en eksperimenterende og utforskende arbeidsmåte i skolen og det er dette som bør utnyttes og utvikles videre.

IKT og læring i matematikk - IKTML

Dette er et nytt prosjekt der det er et mål å utvikle god matematikkundervisning med bruk av IKT gjennom en spørrende, undersøkende og utforskende holdning og tilnærmingsmåte til fagstoffet. Det er tett samarbeid og felles idégrunnlag med prosjektet Læringsfellesskap i matematikk (LCM)(Jaworski, 2004). Begge prosjektene er støttet av Norges Forskningsråd gjennom KUL programmet. Målet er å stimulere til god matematikkundervisning gjennom at didaktikere og lærere arbeider sammen i fellesskap (Fuglestad & Jaworski, 2005). I IKTML prosjektet bygger vi videre på erfaringer fra IKT-verktøy prosjektet som er omtalt her. Vi møtes flere ganger i semesteret til verksteder og til møter i skoleteam for å lære selv og å utvikle matematikkundervisningen. Fokus på ”inquiry” - å stille spørsmål, grave dypt, undersøke og eksperimentere er sentralt i arbeidet. Vi kan oppleve at elevene finner andre løsninger enn lærerne og stiller spørsmål som vi ikke vet svaret på. I fellesskap kan vi utforske ideer videre. De fleste lærerne i IKTML prosjektet deltar også i LCM prosjektet.

Vi har sett allerede at både IKT verktøy prosjektet og IKTML prosjektet stimulerer til utvikling av lærernes kompetanse i bruk av IKT verktøy og utvikling av undervisningsopplegg som stimulerer elevenes selvstendighet i valg. Men vi ser også at det tar lang tid å utvikle god bruk av IKT verktøy som kan utvikle elevenes selvstendighet og egne valg av verktøy.

Litteratur

Erstad, O., Kløvstad, V., Kristiansen, T., & Søbye, M. (2005). *ITU Monitor 2005. På vei mot digital kompetanse i grunnopplæringen*. Oslo: Universitetsforlaget.

Fuglestad, A. B. (2003a). IKT kompetanse i matematikk. In F.Vik (Ed.), *IKT som prosjekt i skolen* (pp. 28-68). Fagbokforlaget.

Fuglestad, A. B. (2003b). Konstruktivistisk perspektiv på datamaskiner i matematikkundervisning. In B.Grevholm (Ed.), *Matematikk for skolen* (pp. 211-235). Fagbokforlaget.

Fuglestad, A. B. (2005). Hva de velger og hva liker - elevers bruk av IKT verktøy. *Tangenten, 16,* 23-29.

Fuglestad, A. B. (2006). IKT verktøy i matematikk - gutters og jenters valg og holdninger. In *Novemberkonferansen 2005* (Trondheim: Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen, Norway.

Fuglestad, A. B. & Jaworski, B. (2005). Læringsfellesskap i matematikk - utvikling og forskning i samarbeid. *Tangenten, 16,* 54-59.

Jaworski, B. (2004). Grappling with complexity: Co learning in inquiry communities in mathematics teaching development. In M.Johnsen-Høines & A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference for the International Group for the Psychology og Mathematics Education* (pp. 17-36). Bergen: Bergen University College.

KUF (1996). *Læreplanverket for den 10 årige grunnskolen*. Oslo: Det kongelige kirke- og utdannings og forskningsdepartement.

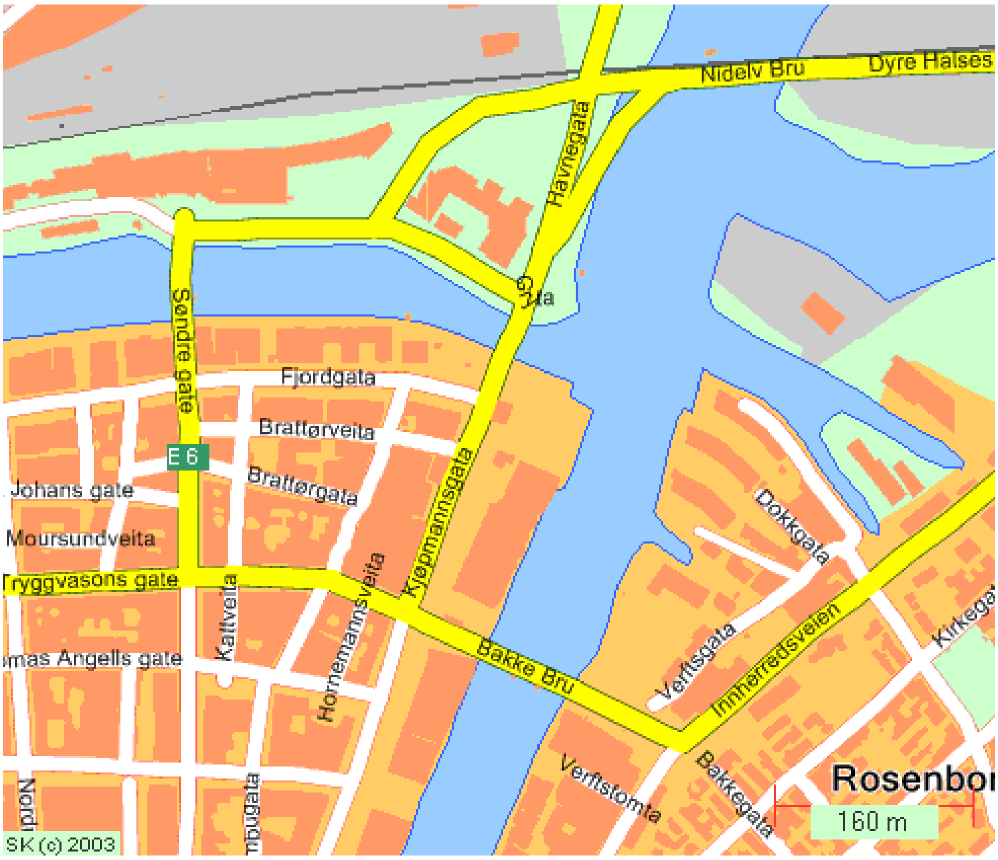
UFD. (2005). Læreplan i Matematikk. Kunnskapsløftet - Midlertidig trykt utgave. Kunnskapsdepartementet.

Del II: Søndagsarrangement:

MATEMATISK REBUSLØP

Novemberkonferansen

20. November – 05



Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Matematikkløype gjennom Trondheim sentrum.

Pål Erik Lauritzen Ekholm og May Renate Settemsdal

I forkant av det faglige programmet mandag og tirsdag er søndager i Novemberkonferansen satt av til ulike utflukter. Denne gangen valgte 25 av deltakerne å komme seg ut på søndagstur der det var matteoppgavene som bestemte hvor turen gikk. Veien blir bokstavlig talt til mens man løser matematikkoppgaver. Rebusløp er en fin sosial oppvarming før det faglige programmet starter for alvor dagen etter. Samtidig er det en fin måte å synliggjøre matematikken og ta den ”ut i gata”.

Ideen bak et matematisk rebusløp

Rundt omkring i byen hadde vi plassert flere poster. På hver post skulle deltakerne løse en oppgave som ga et tallsvar. Hver gruppe fikk utdelt et kart over byen der vi hadde tegnet inn en rekke tall, men bare noen av disse var svar på oppgavene i rebusløpet. Tallsvaret gruppen kom frem til i hver oppgave fantes på kartet, og der lå neste post. Derfor ble det ekstra viktig å regne riktig.

Oppstart og gjennomføring

Vi delte deltakerne inn i grupper på 3-5 personer, og utstyrte hver gruppe med kart over byen, blyant og kladdeark. Her skulle det jobbes! Representanter fra Matematikksentret var ansvarlig for hver sin post. Det var vår oppgave å sørge for at gruppene forsto oppgaven og eventuelt gi passende hint underveis for å sette gruppene på sporet. For å unngå kø organiserte vi det sånn at hver postansvarlig tok med seg en gruppe til sin post da vi startet.
Under selve rebusløpet gjelder det å løse oppgavene kjapt og ikke minst riktig. Når de var sikre på at de hadde riktig svar gikk de videre til den posten på kartet som hadde samme tall som svaret i oppgaven de nettopp hadde løst. Etter hvert markerte de på kartet hvilke poster de hadde vært innom.
Slik fortsatte ferden rundt i det matematiske rebusløpet og Trondheim sentrum helt til de endte opp på posten hvor de startet.

Oppgaver

Vi valgte å bruke problemløsningsoppgaver i rebusløpet. Hver oppgave hadde tilhørende materiell som brikker, mynter, kuler, geobrett eller klosser. Slike konkreter gjør oppgaven enklere og mer fengende å løse. I og med at slike rebusløp foregår utendørs har en muligheten til å bruke stort konkretiseringsmateriell, for eksempel kjegler, fakler, bøtter og lignende. Det er også gøy og kunne tegne oppgaver med kritt på asfalten. En står selvsagt fritt til å velge både materiell og oppgavetyper alt etter årstid og vanskelighetsgrad.

Løsning og oppsummering

Etterpå møttes vi på hotellet til oppsummering og premiering. Dette er en veldig viktig del av aktiviteten for å få fram ulike løsningsstrategier og tenkemåter.
Hvis alle oppgavene var løst korrekt, og deltakerne tegnet rette linjer mellom postene de hadde vært innom, fikk de en sekskant som svar.

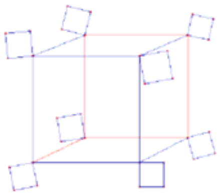
POST A

Utstyr: En kube i oasis eller isopor.
Lapper med tallene 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 festet til knappenåler.

Oppgave

Dere får utdelt en kube og 8 lapper med heltallene fra 1 til 8.

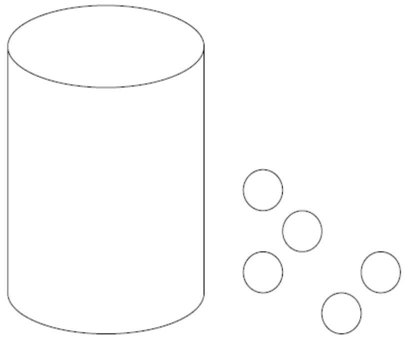
Plasser ett tall i hvert hjørne slik at summen er den samme når dere summerer de fire tallene som hører til hver av de seks kvadratiske flatene.
Hvilken sum blir det?



Summen dere får er nummeret på posten dere skal gå til.

POST B

Du trekker kuler ut av en kurv. Når du tar ut to og to, ligger det en igjen til slutt. Det samme skjer når du tar ut tre og tre, fire og fire, fem og fem, eller seks og seks. Når du tar ut sju og sju, blir det ingen igjen til slutt. Finn det minste antall kuler som kan være i kurven.



Tverrsummen av dette tallet forteller dere hvilken post dere skal gå til.

POST C

I hvor mange ulike mønstre kan fire like te-lys plasseres på et bord slik at det bare forekommer to ulike avstander mellom lysenes sentrum.

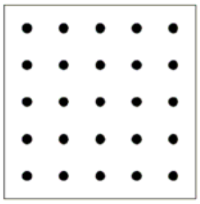
Svaret oppgis som ulike geometriske figurer der lysene er tenkt plassert i hjørnene.

Tallsvaret for antall løsninger finnes på kartet, og der ligger neste post.

POST D

Utstyr Geobrett 5 x 5
Strikk
Prikkark

Dere har fått utlevert geobrett med 5 x 5 pinner.



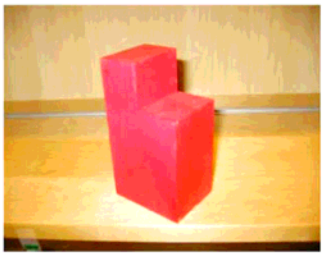
Dere skal legge strikk rundt 4 pinner slik at det dannes et kvadrat. Hvor mange kvadrater er det mulig å lage på denne måten? To kvadrater med samme størrelse, men plassert på forskjellig sted på geobrettet, regnes som to.

Det totale antallet kvadrater forteller dere hvilken post som er den neste dere skal gå til.

POST E

Utstyr: 1 rød trekloss

Oppgave: Treklossen er satt sammen av to mindre klosser. Alle 8 flatene på klossen er malt røde. Målene er 6 x 8 x 10 cm på den største delen og 6 x 4 x 4 cm på den minste. Dersom vi kutter opp klossen i enhetsklosser på 1 x 1 x 1 cm får vi 576 små klosser. Hvor mange av disse ville ikke hatt farge på noen side?



Finn siffersummen av tallet dere kommer fram til. Dette tallet finner dere også på kartet og det forteller hvor neste post ligger.

STARTOPPGAVE

Utstyr: En pose med myntbrikker.

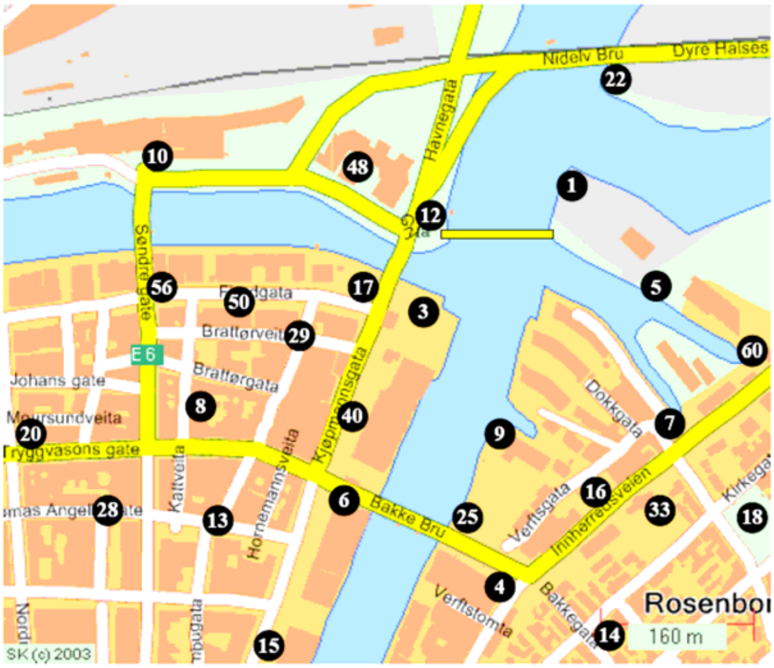
Oppgave: Fordel 15 mynter slik at summen blir 1 dollar. Forutsetningen er at 7 av myntene skal være nicler.

Penny	1 cent
Nickle	5 cent
Dime	10 cent
Quarter	25 cent
Half- dollar	50 cent
Dollar	100 cent

Hvor mange penny-mynter (1 cent) inngår i denne fordelingen?

Tallet dere kommer fram til finnes også på kartet. Det forteller hvor neste post ligger.

REBUSKART



Tallet dere kommer fram til finnes på kartet. Det viser hvor dere finner neste post.

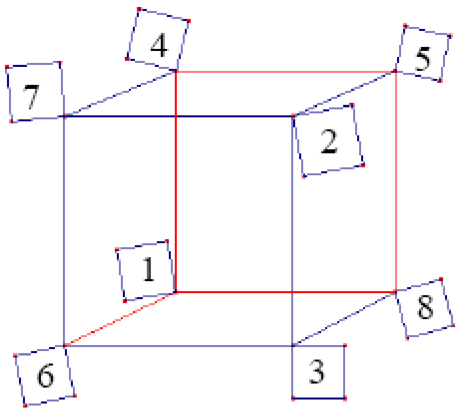
Løsning- Startoppgave

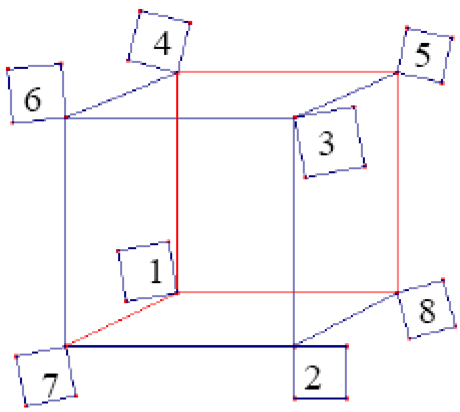
Det er gitt at 7 av myntene må være nicler, dvs 7 x 5 = 35 cent. Det vil si at vi har 65 cent igjen å fordele.

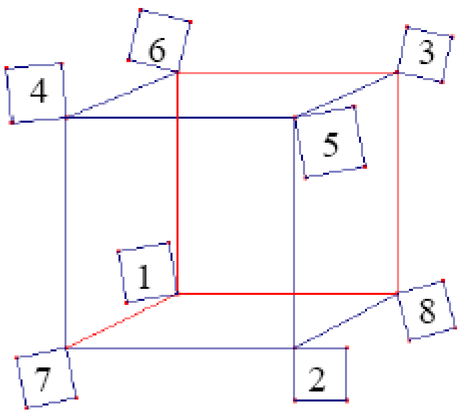
Antall mynter	Mynttype	Antall cent
2	Quarter (25 cent)	50
1	Dime (10 cent)	10
5	Penny (1 cent)	5
7	Nicle (5 cent)	35
15		100

Vi må altså ha 5 penny-mynter.

Løsning- Post A







Løsning er lik 18.

Løsning- Post B

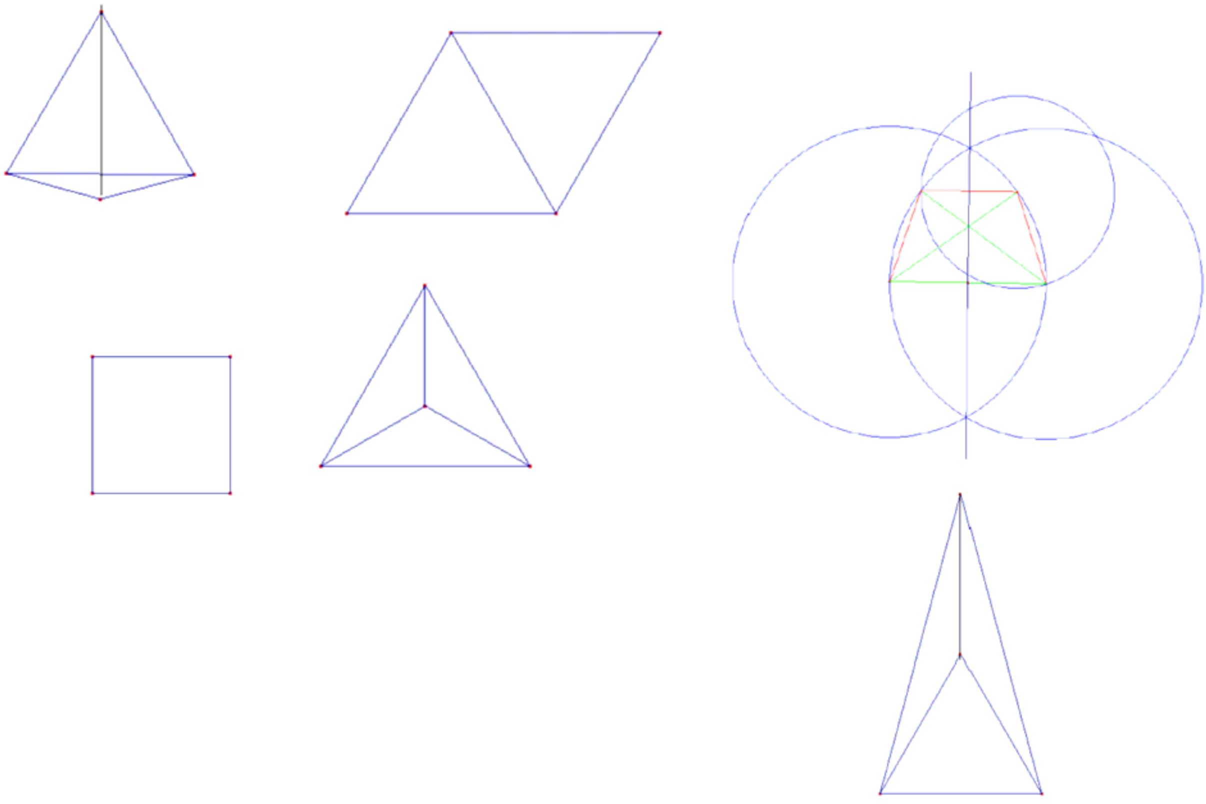
Prøv med tall som er delelig med 7. Observer at tallet må ende på 1 eller 6 for å gi 1 til rest når vi deler med 5.

Da må vi velge 1, siden tallet ikke skal være delelig med 2.

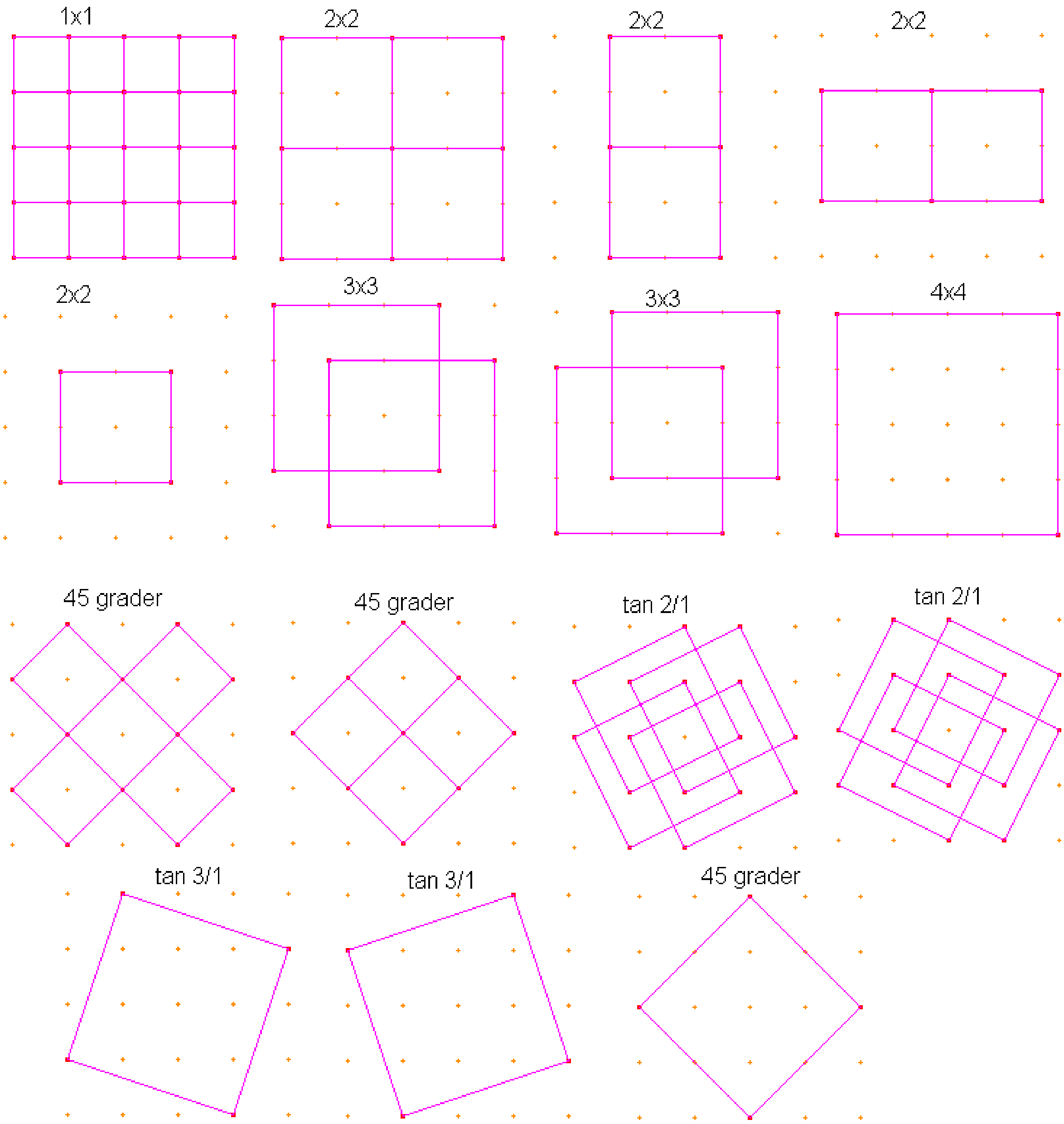
Mulige løsninger under disse forutsetningene er: 21, 91, 161, 231, 301, ... Tallet 301 gir 1 til rest når vi deler med 3 og 4, så det er det minste som passer, dvs. svaret er 301.

Løsning- Post C

Det finnes seks alternative mønster for å plassere fire T-lys med bare to ulike avstander mellom lysenes sentrum. Lysene plasseres i hjørnene i de seks figurene.



Løsning- Post D

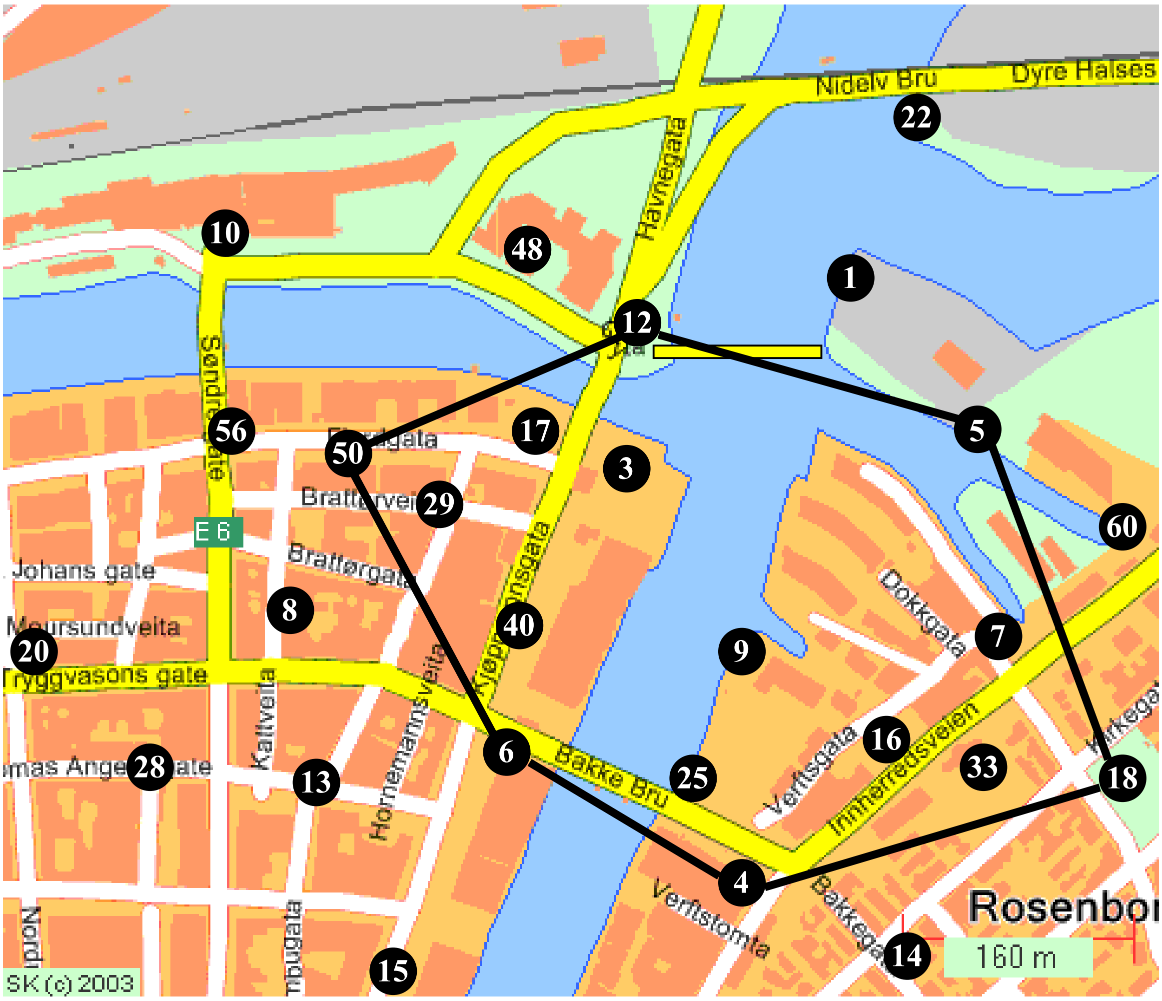


16 stk. 1x1
9 stk. 2x2
4 stk. 3x3
1 stk. 4x4
10 stk. 45°
8 stk. tan 2/1
2 stk. tan 3/1

<u>Totalt 50 stykker.</u>

Løsning- Post E

Fra liten kloss:	4 x 2 x 3 =	24
Fra midtsjikt:	3 x 4 x 1 =	12
Fra stor kloss:	8 x 6 x 4 =	192
Totalt:		228 klosser



Søndagsseminar den 20. november 2005
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Kjønn, matematikk og teknikk: Hva skjer når de bringes sammen?

Tine Wedege (red.)

Lärarutbildningen, Malmö Högskola
Email: Tine.Wedege@lut.mah.se

Matematikk har etter hvert blitt oppfattet som et kjønnsnøytralt område i skolen. Men hva skjer når tekniske hjelpemidler som grafiske lommeregnere, datamaskiner og andre digitale verktøy bringes inn i matematikkundervisningen? Har det betydning for elever og studenters kjønnete samspill og motspill i matematikklæringen?

I utgangspunktet oppfatter vi teknikk (tekniske hjelpemidler og maskiner) som den ene av teknologiens tre dimensjoner. Den andre dimensjon er arbeidets (eller undervisningens) organisering, og den tredje er menneskenes kompetanser og kvalifikasjoner. I en konkret eller ideell arbeids- eller undervisningssituasjon virker disse tre dimensjonene sammen (Wedege, 2000).

I alle studier er det nødvendig å redusere matematikundervisningens kompleksitet. Forskeren velger da bort – bevisst eller ubevisst – en rekke faktorer og dimensjoner for å kunne gjennomføre undersøkelsene sine. I Norden har vi flere matematikkdidaktiske avhandlinger og forskningsprosjekter som tar for seg teknologi i en eller annen form. Imidlertid har ingen av disse hatt fokus på kjønn.

På seminaret lagde vi inn et kjønnsperspektiv på problemstillingen om tekniske hjelpemidler i matematikkundervisningen. I den forbindelse vil vi spørre til om det kan gi mening å undersøke spørsmål om teknikk og matematikk i en læringssammenheng uten å trekke inn kjønn. Og hvordan kan man utføre undersøkelser der kjønn inngår uten at det fører til stereotypier og dikotomier?

Seminarets sprog var en skønsom blanding af dansk, engelsk og norsk. Hvilket også afspejles i denne introduktion.

Udgangspunktet for seminaret var termen ”kjønn” eller ”køn” med den samme betydning som ”genus” på svensk eller ”gender” på engelsk. Mens ”sex” svarer til ”male & female” (hankøn & hunkøn), så svarer ”gender” til ”feminine & masculine” (kvindelig & mandlig). ”Sex” drejer sig om biologiske forskelle: kromosomer, hormonelle profiler, indre og ydre kønsorganer. Mens ”gender” handler om karakteristiske og kulturafhængige træk som samfundet tilskriver mænd og kvinder.
For at forsøge at få styr på kompleksiteten kan man med Bjerrum Nielsen (2003) skelne mellem fire aspekter eller analytiske perspektiver på køn (se Gjøvik m.fl., 2005):

Strukturelt kjønn: Kjønn konstituerer en sosial struktur f.eks. ulik fordeling på utdannelser og beskjeftigelse eller kvinner får mindre lønn. *Symbolsk kjønn:* Det strukturelle kjønn former gradvis kjønnssymboler og –diskurser (symbolsk mening) i våre hoder. Det blir f.eks. normalt og naturlig at menn inntar de ledende posisjoner i våre samfunn, mens kvinner har deltidsjobb for å kunne ta seg av hjem og familie. Utviklingen av symbolsk og strukturelt kjønn påvirker altså gjensidig hverandre. *Personlig kjønn:* Kjønn er også en personlig ting og en realitet for hver av oss. Personlig kjønn angår måten vi passer (eller ikke passer så godt) inn i, identifiserer oss med eller protesterer mot de disponible kulturelle kjønnsmodeller. *Kjønn i samspill:* Kjønn kan oppfattes som noe som stadig skapes og reproduseres gjennom sosial interaksjon (forhandling). Samspillsperspektivet fremhever kjønn som noe vi 'gjør'. Vi posisjonerer oss selv og andre som kjønn og får feedback på det. Dette skaper samtidig mulighet for forandring. For å illustrere de fire aspekter er her en konstrueret en episode om en lyserødt viskelær i matematikklasserommet:

> Læreren oppfordrer Henrik til å viske ut en graf i oppgaveheftet sitt. Henrik spør om noen har et viskelær. Camilla kommer og gir ham sitt viskelær, og han erter henne fordi det er lyserødt.

Episoden illustrerer hvordan jenter gjør tjenester for gutter i matematikklassen (strukturelt kjønn), at femininitet ikke er en høyt priset verdi i denne konteksten (symbolsk kjønn), at Camilla virker å være ivrig etter å gjøre guttene tjenester, mens Henrik virker å være ivrig etter å dytte bort femininiteten (personlig kjønn), Henrik posisjonerer Camilla, og hun får feedback for grensene for femininitet i matematikklassen (kjønn i samspill).

Med de analytiske perspektiver "sosialt kjønn" og "symbolsk kjønn" blir det tydelig at spørsmålet om kjønn, matematikk og teknikk må undersøkes i en samfunnsmessig og kulturel sammenheng. Lad os gå fra matematikken til teknikken. Under overskriften "Den digitale kløften" blev der i NTNU's blad Gemini nr. 5, oktober 2005, præsenteret følgende forskningsresultat:

> Norge troner på førsteplass over digitaliserte nasjoner i verden, men det er allerede klare kjønnsmessige og aldersmessige skillelinjer, når det gjelder IKT-bruk i befolkningen (s. 32).

Drengene bruger nettet noget mere end pigerne, som så gør noget socialt når de først går ind. For at illustrere forskellene både på køn og alder har man fundet en familie med to halvvoksne børn – en søn og en datter. Et foto viser de to foran dataskærmen, mens moderen står i døren og kigger. I teksten nedenfor står der: "Mor Anne Karin er ikke optaget af nettet på fritiden." Hvis vi anlægger det strukturelle perspektiv på situationen, så ser det ud til at der er fuldt optaget foran familiens skærm, og den dør moderen står i er højst sandsynligt døren ud til køkkenet.

Tonen i seminaret blev slået an af Vivian A. Lagesen, NTNU, med hendes oplæg *Kvantitet, kvalitet og kjønnstereotypier: Strategier for å løse "jenter og data" problemet*. I Norge har der i mere end 20 år været en bekymring for at der skulle blive skabt et kønsbaseret digitalt skel mellem drenge/mænd, som kan bruge datateknologi, og piger/kvinder, som ikke kan. Initiativerne har især været rettet mod uddannelsessystemet, og Lagesen gav en kritisk, analytisk præsentation af en kampagne på NTNU for at hverve flere kvinder til datastudiet. En kampagne hvor man havde brugt eksplicitte dualistiske kønsstereotyper.

Anne Berit Fuglestad, Høgskolen i Kristiansand, præsenterede i sit oplæg *IKT verktøy i matematikk – gutter og jenters valg og holdninger* resultater fra to prosjekter (1995 og 2004) om IKT i matematikkundervisningen, hvor eleverne havde svaret på spørsmål om hvad de tænker om matematik, om de kan lide faget, om det er nyttigt eller vanskeligt. Videre blev de spurgt hvad de tænker om og oplever ved brug af datamaskiner i undervisningen. Køn havde ikke været fokus i de to studier, men Fuglestad havde heldigvis haft køn som variabel og derved gjort det muligt at svare på spørgsmålet: "Er det forskjell på gutter og jenters holdninger og tanker om bruk av datamaskiner i matematikkundervisningen?"

Seminaret blev afsluttet med en panel- og plenumdebat under overskriften *Research on ICT in mathematics education – with or without a gender perspective?* Paneldeltagerne var Rudolf Strässer, Luleå Tekniska Høgskola og Justus-Liebig-Universität, Barbro Grevholm, Høgskolen i Agder, og Morten Blomhøj, Roskilde Universitetscenter, og Tine Wedege (ordstyrer), Malmö Høgskola, og de øvrige seminardeltagere var engagerede debattører.

Referencer

Bjerrum Nielsen, H. (2003). *One of the boys? Doing gender in Scouting.* Genève: World Organization of the Scout Movement.

Gjøvik, Ø., Hansen, T. H., Stedøy, I. M., Wedege, T. & Wæge, K. (2005). Kjønnsperspektiv og matematikk. *Tangenten, 16,* 69-74.

Wedege, Tine (2000). *Matematikviden og teknologiske kompetencer hos kortuddannede voksne.* Roskilde Universitetscenter, IMFUFA tekst nr. 381.

Kvantitet, kvalitet og kjønnstereotypier: Strategier for å løse "jenter og data" problemet

Vivian A. Lagesen

Institutt for tverrfaglige kulturstudier, NTNU
Email: vivian.lagesen@hf.ntnu.no

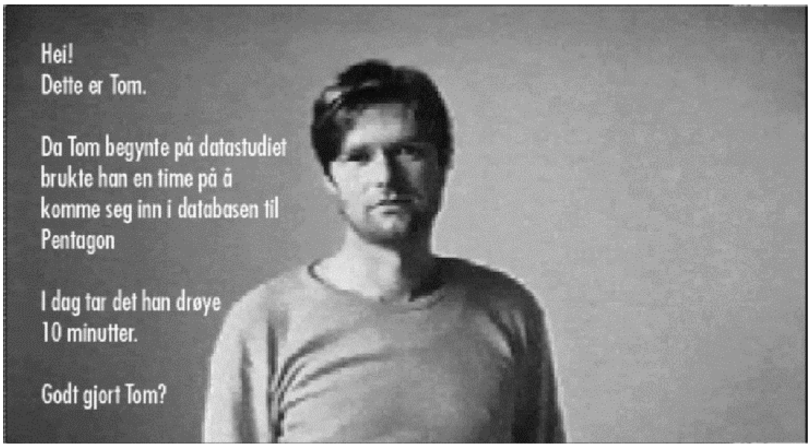
Kvinneandelen i datafag er gjennomgående lav og til dels synkende i mange land, til tross for at rekruttering av kvinner har vært gjenstand for mye oppmerksomhet og en rekke initiativ i minst et tiår (Lagesen 2005). Det har bidratt til å skape en utbredt oppfatning om at det er svært vanskelig å få kvinner til å velge en datafaglig utdanning. NTNU startet i 1996 prosjektet "Jenter og Data" for å få flere kvinnelige søkere til datastudiet, med bruk av et bredt spekter av virkemidler som bl.a. inkluderte kvotering, en egen informasjonsdag for kvinnelige søkere og reklamekampanjer (Lagesen 2003). Prosjektet viste seg i første omgang å være meget vellykket. Kvinneandelen av de som ble tatt opp på datastudiet steg fra 6 til 38 prosent i løpet av ett år, og det kan betraktes som et usedvanlig godt resultat for et slikt initiativ. Prosjektet har pågått kontinuerlig siden 1997. Andelen kvinner har sunket gradvis, men holdt seg relativt høyt inntil året etter det såkalte dot.com krakket. Da, i 2001/2001, sank den på nytt til under 10 %. I denne artikkelen skal jeg se nærmere på noen av tiltakene som "Jenter og data"-prosjektet benyttet for å rekruttere flere kvinner til datafag og tankegangen bak disse tiltakene.

Forskning har vist at det i Norge har vært en utbredt forestilling om at datateknologi og datastudier er preget av en hacker-lignende kultur der data-opptatte gutter og unge menn setter standarden for hvordan teknologien skal forstås og brukes. Det er liten tvil om at denne kunnskapen spilte en viktig rolle når NTNU i 1996 skulle forme sitt rekrutteringsinitiativ. Det kom fram i mine intervjuer med interessentene i prosjektet (se Lagesen 2003). Utfordringen for interessentene lå dermed i hvordan en skulle forholde seg til en så sterk symbolsk kopling mellom datafaget og en form for maskulinitet som de aller fleste jenter åpenbart oppfattet som svært lite attraktiv.

I det følgende skal jeg presentere en analyse av reklamemateriale som ble laget i fire kampanjer som ble iverksatt mellom 1997 og 2005. Som bakteppe for analysen har jeg brukt dokumenter fra "Jenter og Data"-prosjektet. I tillegg har jeg gjennomført intervjuer med kvinnelige studenter og prosjektets hovedinteressenter, inkludert NTNUs øverste ledelse, ledere og ansatte ved Institutt for datateknikk og informasjonsvitenskap (IDI), og ledelsen av prosjektet "Jenter og Data" (se Lagesen 2005 for flere detaljer).

"Tom og Linda"

Den første kampanjen, kalt "Tom og Linda", ble vist på alle kinoene i landet i løpet av april 1997. "Tom og Linda" er en kort fortelling om en ung mann, Tom, og en ung kvinne, Linda. Bildet av en ung mann vises på lerretet (se figur 1). En stemme forteller: "Dette er Tom. Da Tom begynte på datastudiet brukte han en time på komme seg inn i databasen til Pentagon. I dag tar det ham drøye ti minutter. Godt gjort Tom?" På bildet fremstår ikke Tom som den stereotypiske nerden; en overvektig gutt med briller og umoderne T-skjorte. Tom ser ganske kul ut, men også noe utilpass. Han er kanskje litt bekymret eller usikker på seg selv, og han virker i hvert fall ikke spesielt glad.



Figur 1. "Tom" (bilde fra brosjyren "Tom og Linda").

Deretter ser vi bildet av en ung kvinne på lerretet, med teksten: "Og her er Linda. Linda kunne ingenting om data. I dag snakker hun med mennesker, analyserer problemer og løser dem. Dessuten kommer hun seg inn i databasen til Pentagon – hvis hun vil." Linda står med armene i kors og smiler og ser svært selvsikker ut sammenlignet med Tom.

Figur 2. "Linda" (bilde fra brosjyren "Tom og Linda").

Det tredje og siste bildets punchline lyder: "Datastudiet handler mer om mennesker enn om maskiner. NTNU vil ha flere jenter på data".

Denne reklamen har et dikotomt budskap om både kjønn og kompetanse. Tom og Linda framstilles som representanter for hvert sitt kjønn. Tom presenteres som en hacker, kun opptatt av den rent teknologiske siden ved data, som her til alt overmål er ulovlig (datainnbrudd). Spørsmålet til Tom er av retorisk karakter: "Godt gjort Tom?" Det bidrar til å latterliggjøre hans (maskuline?) interesse ved å påpeke at dette er en verdiløs prestasjon. Viktigheten av teknologiske ferdigheter blir også bagatellisert.

Linda, derimot, utfører viktige oppgaver som analyse og problemløsing. Det gjør hun ved å snakke med mennesker. Selv om Linda ser ut til å være mest opptatt av kommunikasjon og problemløsing, indikerer også reklamen at Linda har den samme teknologiske kunnskap som Tom – men hun er ganske enkelt ikke interessert i å bruke denne kunnskapen på en slik verdiløs måte. Dessuten ser ikke teknologisk kompetanse ut til å ha noe å si for hvordan hun utfører oppgavene sine.

At Tom har denne verdiløse kunnskapen som trengs for å kunne hacke seg inn i Pentagon, kan forstås som en ironisk kommentar til ensidige teknologiske ferdigheter. Når dette presenteres som en kontrast til Lindas verdifulle sosialt pregede arbeid, fremstår teknologiske ferdigheter som mindre viktige. På denne måten introduserer kampanjen en tradisjonell kjønnet dikotomi av det "teknologiske" og det "sosiale". Det spesielle i denne kampanjen er at dikotomien brukes for å rangere det sosiale over det teknologiske, for på denne måten å *reversere* det vanlige hierarkiet. Dette skjer ved en antydning om at feminine egenskaper er bedre enn maskuline, innen et yrkesområde vanligvis sett på som mannsdominert.

Slik ser vi at reklamen bekrefter og til og med styrker en dobbel dikotomi ved å koble det teknologisk-maskuline og det sosialt-feminine på tradisjonelt vis. Det nye ligger som nevnt tidligere, i å snu denne doble dikotomiens hierarki på hodet. Det sosialt-feminine blir påstått å være viktigere enn det teknologisk-maskuline. Når vi vet at reklamens uttalte målsetning var å sikte seg inn på unge kvinner og oppfordre dem til å studere data, er det rimelig å anta at de så dette som en effektiv form for markedsføring av data til jenter. Også ved bruk av en forholdsvis radikal retorikk skulle de vise at kvinner virkelig hører hjemme på datastudiet, til og med i høyere grad enn menn. På grunnlag av det vi har observert tidligere kan man tolke reklamen som et forsøk på en radikal endring i oppfatningen om datafaget. Konstruksjonen av Lindas evne til å omgås mennesker som uvurderlig for datafaget innebærer at faget rekonstrueres ved å legge særlig vekt på de kommunikative aspektene, forstått som sosial, mellommenneskelig kommunikasjon, samt ved å bagatellisere de smalere teknologiske aspektene. I denne samproduksjonen av kjønn og IKT blir datafaget omdefinert fra å handle om teknologisk, maskin-orienterte kunnskaper og interesser til å ha fokus på sosiale, kommunikative og menneskeorienterte kunnskaper og interesser.

"Jenter lager rundinger, gutter lager firkanter"

Den andre kampanjen gikk i 1998. Materialet bestod hovedsakelig av en brosjyre som ble sendt ut til videregående skoler. Forsiden av brosjyren er svært enkel (se figur 3). Forgrunnsfiguren er en ung kvinne som står bak en sirkel og ser ut, og bakenfor (og tilbaketrukket) finner vi en ung mann stående bak en firkant. I teksten leser vi: "Jenter lager rundinger. Gutter lager firkanter. Universitetene ønsker seg flere datastudenter som lager rundinger." Brosjyreteksten hevder at den er laget av unge kvinner som selv har studert data. Teksten formidles gjennom en av disse kvinnenes stemme. Den henvender seg direkte til unge kvinnelige lesere og forteller dem hvorfor de burde velge data. Spredt mellom hovedteksten har vi portretter av unge kvinner som studerer eller har studert data, med deres sitater.

I teksten er det særlig to påstander som understrekes for å få flere kvinner til å studere data. For det første, at de sosiale konsekvensene av det arbeidet dataingeniører og informatikere gjør er for viktig til å kun utføres av menn. For det andre, at datasystemer vil bli bedre tilpasset brukerne hvis de lages av kvinner fordi kvinner er mer opptatt av nytteaspektene ved teknologi enn menn. Menn blir ofte for opptatt av teknologiske aspekter og detaljer. Kvinner, på den annen side, beskrives slik:

> Jenter lytter. Jenter snakker sammen. Vi har erfart at jenter stiller hvorfor-spørsmål av typen: Hva er vitsen med den knappen? Hvem har nytte av denne funksjonen? Hvordan skal brukeren forstå hvordan hun begynner? "Hør her!" sier jentene. "Dette er for vanskelig! Vi må gjøre systemene enklere!" (…) Derfor ønsker vi oss jenter. Derfor står et helt fagmiljø klart til å ta i mot deg. Fordi det etterspør en viktig ting du har: Kvinnelighet. (Fra brosjyren "Jenter lager rundinger.")

Kvinner oppfattes her som mer opptatt av brukerne, noe som speiler det tradisjonelle bildet av kvinner som mer andreorientert.

Figur 3. Forside til brosjyren "Rundinger og firkanter"

Bildet av rundinger og firkanter kan ses på som en effektiv og strikt todeling og fastfrysing av kjønn. Det sterke fokuset på kvinner i brosjyren støtter denne antakelsen. Når menn en sjelden gang nevnes, blir de omtalt som "hackere" eller "nerder". Det kan se ut til at ett av hovedmålene har vært å beskrive kvinner i utelukkende positive vendinger. Kvinner presenteres som bedre dataeksperter enn menn. I tillegg til deres gode kommunikasjonsevne (slik som i tilfellet Linda), blir de også beskrevet som medfølende og gode lyttere (mot potensielle kunder) og som generelt allsidige.

I ettertid ble kampanjen kritisert for å ha neglisjert de teknologiske sidene av datastudiet og for å ha vært villedende. Faktisk viste det seg at enkelte av kvinnene som hadde lest brosjyren og begynt på studiet, forventet seg at det skulle være slik brosjyren fremstilte det. Studiet ble forventet å handle om mennesker og ikke så mye om datamaskiner, noe som jo ikke var tilfelle (Lagesen 2005). Pensum hadde ikke endret seg. Det var fortsatt et forholdsvis tradisjonelt datateknisk studieprogram , med mange rent teknologiske emner, spesielt de to første årene. Det endte opp med at man så seg nødt til å legge ved en liste over fagemner på studiet da man sendte ut brosjyrene det følgende året. Det er også interessant å merke seg at svært få av de kvinnelige studentene som vi intervjuet, i utgangspunktet hadde vært interessert i data. De aller fleste hadde først og fremst hatt en interesse i realfag som de ville forfølge. Kampanjen hadde imidlertid ledet oppmerksomheten deres mot datastudiet som de altså hadde følt seg invitert til å begynne på.

Symmetriprinsipp gjennom "Vinne?"

Den tredje kampanjen ble kalt "Vinne?" Den bestod av en informasjonsbrosjyre designet for å ligne et moteriktig ukeblad. Hva er så tankegangen bak en assosiasjon mellom jenter i data og det å "vinne"? På forsiden av brosjyren blir det gitt noen hint. Underoverskriftene lyder: "Er jenter bedre dataeksperter enn gutter?", "Tjen mer penger enn faren din", og "Ingen forkunnskaper". Disse tre argumentene kan knyttes til noen av de viktigste påstandene som ble brukt i de tidligere kampanjene. For det første, at kvinner gjennom sine spesielle egenskaper passer bedre som dataingeniører enn menn (i denne kampanjen likevel etterfulgt av et spørsmålstegn for å mildne budskapet). For det andre, et fokus på datastudiet som et karrierevalg, med gode muligheter for høy inntekt. For det tredje, påstanden om at det ikke er nødvendig med forkunnskaper for å begynne på studiet.

Bildet på forsiden (figur 4) kan sees som et ironisk spill på kjønnsstereotypier. Teksten i brosjyren er imidlertid ikke ironisk. Den presenterer et, igjen, stereotypt bilde av kjønnsforskjeller mellom menn og kvinner. I brosjyrens første artikkel fokuseres det på kjønnsforskjeller, eksemplifisert ved intervjuer med mannlige og kvinnelige datastudenter som snakker om nettopp forskjellene mellom mannlige og kvinnelige datastudenter.

Figur 4. Forsiden av brosjyren "Vinne?"

Etter å ha beskrevet menn og kvinner som forskjellige, konkluderer en av kvinnene i brosjyren at det sikkert er sunt for jenter og gutter å jobbe sammen fordi de da kan lære av hverandre. Gutter lærer seg å samarbeide og jenter lærer å bli tøffere, å si ifra og tørre å ha en mening selv om de ikke nødvendigvis vet alt. Det argumenteres altså for at menn og kvinner kan utfylle hverandre. Slik sett ser brosjyren ut til å mildne det sterke positive fokuset på det feminine på bekostning av det maskuline, sammenlignet med de to foregående kampanjene."Vinne"-brosjyren formidler snarere et bilde av kvinner som usikre og med manglende selvtillit.

Likevel, forsøkene på å rangere feminine egenskaper som bedre og mer passende for datastudiet er altså ikke så tydelige i "Vinne?". I stedet for at det tradisjonelle hierarkiet blir snudd på hodet, introduseres vi for tanken om at maskuline og feminine egenskaper kan komplementere hverandre. Menn og kvinner har ulike styrker og svakheter, slik det ble framstilt i intervjuene med studentene. Konklusjonen var derfor at menn og kvinner kunne lære av hverandre. Under overskriften "Fakta om Jenter og Data" finner vi en liste med fem grunner til hvorfor det er viktig å sette fokus på rekrutteringen av flere kvinner til datafaget:

> Menn og kvinner er forskjellige og tenker ofte forskjellig. Kvinner er ofte opptatt av bruk og nytte av datasystemer, mens menn er mer opptatt av det tekniske og detaljer. Industrien trenger begge deler. (Fra brosjyren "Vinne")

Tanken om *komplementaritet* mellom menn og kvinner handler altså om at menn og kvinner kan ha forskjellige roller i datafaget. Samtidig understrekes det at man trenger den feminine evnen til kommunikasjon og empati i like stor grad som maskuline instrumentelle ferdigheter dersom datafaget skal fungere. På denne måten blir det tidligere hierarkiet erstattet av komplementaritet i samproduksjonen av kjønn og IKT, samtidig som kjønnsdikotomien opprettholdes. Menn og kvinner er forskjellige, men likeverdige.

”Ta en utfordring, jenter – skap framtida!”
Den siste reklamebrosjyren kom vinteren 2005. Dette er en 12-siders brosjyre produsert av ”Jenter og Data”-prosjektets ledelse. Tittelen er som i overskriften, og forsidebildet viser to jenter som sminker og pynter seg med en CD som speil (se figur 5). Innledningsteksten i brosjyren argumenterer for at ”Framtida er for viktig til at vi kan overlate den til gutta”. Kvinner bør studere data slik at også de skal være med å bestemme hvordan denne innflytelsesrike teknologien skal se ut. I tillegg vil flere kvinner være med på å skape mangfold i løsningene, på linje med ulikheter i kulturell bakgrunn. Kjønn er med andre ord en av flere viktige faktorer for å oppnå en demokratisk og mangfoldig teknologi.

Inne i brosjyren er det fortrinnsvis portretter av utdannede sivilingeniører og informatikere som forteller hva de jobber med, og hva som er fordelen med å ta et sivilingeniørstudium og å studere data. Vekten på kvinners antatte fordelaktige egenskaper er atskillig nedtonet, sammenliknet med ”Firkanter og rundinger” brosjyren. I stedet blir det fortalt at det å være kvinne er *ingen hindring* for å bli sivilingeniør i data.

Fig. 5 Forsiden av en brosjyre 'Ta en utfordring, jenter – skap framtida!'

Informasjonen som gis om studietilbudene i denne brosjyren er mer omfattende, mer detaljert og også mer nøkternt beskrevet enn i for eksempel ”Firkanter og rundinger”, hvor det var en mer argumenterende tone. Fokuset på kjønnsforskjeller mellom gutter og jenter er nærmest borte, sammenlignet med ”Vinne?”-brosjyren. Der ble dette tematisert, med en fyldig eksplisitt diskusjon om jenters og gutters ulike egenskaper. I ”Ta en utfordring” nevnes det at jenter er mer beskjedne og mer kritiske til seg selv, men mest som en bisetning. At jenter er ettertraktet i arbeidslivet er tema for et eget avsnitt, men argumentet begrenser seg til å handle om at ”mange bedrifter ønsker en jevn fordeling av begge kjønn i arbeidsstokken”. Det er ingen påstand om at kvinner bidrar med noe spesielt i form av sitt kjønn, som for eksempel andre typer egenskaper enn menn. Sammenliknet med de tidligere reklamekampanjene representerer ”Ta en utfordring”-brosjyren en klar nedtoning av femininitet og kjønnsforskjeller.

Tall teller
"Jenter og data"-prosjektet var vellykket i den forstand at det bidro til en meget stor økning av kvinneandelen på datastudiet. Den steg fra 6 til 38 prosent på bare ett år og holdt seg på omtrent samme nivå helt til 2003. Da sank imidlertid kvinneandelen kraftig, trolig på grunn av endrede arbeidsmarkedsutsikter. Om nedgangen er midlertidig eller mer varig vet vi ennå ikke.

Hvorfor var så "Jenter og data"-prosjektet en suksess i en ganske lang periode? Ut fra det de kvinnelige studentene fortalte, må vi konkludere med at det sannsynligvis skyldes kampanjens omfang og massive budskap: Vi ønsker flere kvinnelige studenter! De kvinnelige studentene la stor vekt på at de virkelig følte at de var ønsket, noe som ble understreket av det store antallet forskjellige virkemidler som ble brukt. En høy grad av oppmerksomhet virker i seg selv positivt. Effekten av kvoteringstiltakene skal heller ikke undervurderes. Den raske suksessen var nok i sin tur en viktig forutsetning for at det gikk bra i fortsettelsen. Med en kvinneandel på nesten 40 % var de kvinnelige studentene ikke lenger en liten, marginal gruppe. Dermed endret også kjønnssymbolikken seg. Datastudiet var ikke lenger så opplagt maskulint konnotert. Det var plutselig blitt et like kjønnsautentisk valg for kvinner som for menn, uavhengig av reklamebudskapet.

Erfaringene fra NTNU-prosjektet understreker slik sett et banalt poeng – det er antallet som teller. Ved første øyekast kan dette se ut som et høna og egget argument, men det er ikke tilfellet. Når vi analyserer "Jenter og data"-prosjektet mer grundig, ser vi at mange av tiltakene på forskjellige måter forholder seg mer til tallmessige enn symbolske forhold (Lagesen 2005). Kvoteringen er opplagt i så måte, men mange andre virkemidler bidro på forskjellig vis til å skape en oppfatning om at det var mange kvinner på datastudiet.

Kvalitet og kvantitet
"Jenter og data"-problemet har åpenbare og viktig konsekvenser for den typen læringskultur som skapes i tilknytning til datateknologi og IKT mer generelt. Det skyldes ikke minst den utbredte bruken av enkle, dikotome kjønnsstereotypier både til å karakterisere problemet og til å presentere løsninger. Når det gjelder data i grunnskolen, har den læringskultur man tenker seg der blitt utviklet i kontrast til populære forestillinger om læringskulturen på "gutterommet" (Gansmo 2004). Den sistnevnte er blitt oppfattet som for lekende, for engasjerende og altfor asosial. Nerde-stereotypien brukes på denne måten som et skremsel og som begrunnelse for hvorfor skolens læringskultur på dette området skal være preget av moderasjon og verktøysorientering. Dermed blir tenkningen om data i skolen helt unødvendig begrenset, og skadevirkningene er klare. I beste fall er konsekvensen bare at data i skolen oppfattes som kjedelig av de fleste elever. Dessverre er det nok sannsynlig at kjønnsstereotypiene er med på å begrense hvordan gutter og jenter utvikler holdninger og preferanser overfor datateknologi så vel som oppfatninger om hva de bør kunne og hva de er gode til. "Flinke gutter" skal beherske den tekniske siden, mens "flinke jenter" skal beherske det sosiale. Likestilling?

NTNUs kampanje for å få flere kvinnelige datastudenter brukte eksplisitt dualistiske kjønnsstereotypier. I beste mening og med offensive mål ble stereotypier anvendt for å argumentere for en symbolsk omfortolkning av datafaget som feminint, snarere enn maskulint. Her var kanskje ikke skadevirkningene så store fordi reklamen ble lest som – ja, nettopp, reklame. Men kanskje er ikke dette så uskyldig likevel. Reklamekampanjene og de kvinnelige studentene som vi intervjuet, møttes i oppfatningen om at det å studere data var et fornuftig valg på grunn av de gode jobbmulighetene. Når konjunkturene så snudde og jobbmulighetene plutselig ikke var så gode lenger, kan det se ut som om grunnlaget for at kvinnene skulle velge datastudiet forsvant. Dette ble klart synlig høsten 2003 da andelen kvinnelige studenter ble like lav som da NTNUs "Jenter og data"-prosjekt ble etablert.

På denne måten dukker "jenter og data"-problemet opp i ny drakt. Det er ikke slik at unge kvinner ikke vil studere data på grunn av den sterke symbolske koplingen mellom datafag og maskulinitet, for den er ikke så sterk lenger. Det er heller ikke slike at studiekulturen er kvinnefiendtlig, for det har lenge vært mange kvinnelige datastudenter som er godt fornøyde med sin situasjon. Problemet oppstår nå mer fordi jentene bare har vært oppmuntret til å velge datastudiet fordi det var fornuftig, ikke fordi det var gøy.

Det er viktig å understreke at jenter og data-problemet ikke primært er av symbolsk og identitetsmessig karakter. I så fall ville det vært effektivt å undergrave bildet av datateknologien som preget av en maskulin nerdekultur, slik reklamekampanjene ved NTNU forsøkte. Kjønnssymbolikken i faget ser ikke ut til å være grunnleggende forankret i trekk ved datateknologien. I stedet produseres slike forestillinger om hvorvidt faget er maskulint eller feminint av det relative antall menn og kvinner som har et aktivt og framfor alt synlig forhold til teknologien. Da kvinneandelen ved datastudiet på NTNU økte til nesten 40 prosent, var datafaget ikke lenger på samme måte nerdete og maskulint. Intervjuene med ungdomsskoleelevene viser tilsvarende hvordan forståelsen av kjønnssymbolikken i datateknologien er endret også i denne aldersgruppen med utgangspunkt i at man ser og erfarer at både jenter og gutter bruker datamaskiner til mange forskjellige typer av aktiviteter.

Følgelig krever en mer effektiv håndtering av jenter og data-problemet at man gjør det enkle som er så vanskelig, nemlig å sørge for at det relative antallet kvinner/jenter og menn/gutter i IKT-sammenhenger blir så likt som mulig. Da trengs det virkemidler som kvotering og rollemodeller. En viktig lærdom fra NTNUs Jenter og data-prosjekt er dessuten hvor viktig det er med en omfattende positiv og inviterende oppmerksomhet overfor jenter og unge kvinner slik budskapet om at en ønsker flere kvinner faktisk blir tatt på alvor.

Dermed kan det også bli mulig å utnytte noen av nerde-erfaringene i forhold til å lære data gjennom lek og entusiasme. Selvsagt er en ensidig satsing på lek og entusiasme like problematisk som en insistering på at data skal læres med vekt på moderasjon og instrumentalitet. I stedet er det viktig å åpne for større heterogenitet i forhold til disse dimensjonene ved en læringskultur. Framfor alt er det viktig å unngå at en dikotom kjønnsforståelse koples til dikotomier som lek-alvor, entusiasme-moderasjon, og mennesker-maskiner. Mange – både gutter og jenter – vil finne det vanskelig å lære data dersom kjønnsautentiske gutter må være lekne, entusiastiske og maskin-opptatte, mens kjønnsautentiske jenter må være alvorlige, moderate og opptatt av mennesker.

Her kan det, ironisk nok, være noe å lære av dataspillindustrien når den legger så stor vekt på "kvalitet" som utgangspunkt for å flere kvinner som dataspillere (jfr. Gansmo, Nordli og Sørensen 2003). Entusiastiske dataspillere er sannsynligvis mer liberale overfor spillkvaliteten enn de som ikke er så interesserte. Tilsvarende er pedagogisk kvalitet viktigere for elever og studenter som er i tvil om data er noe for dem, enn for de som allerede har et entusiastisk forhold til teknologien. Dette bekreftes av erfaringer fra slike forsøk ved velrenommerte universiteter i USA, slik som Carnegie-Mellon (Margolis og Fisher 2002) og Stanford (Roberts et al. 2002). Den gode læreren har på alle nivå i utdanningssystemet en viktig rolle å spille for å oppløse jenter og data-problemet.

Note

Artikkelen bygger på to tidligere arbeider: Lagesen, V. A.: Fra firkanter til rundinger? Produksjon av en feministisk teknologipolitikk i en kampanje for å rekruttere jenter til datastudier, *Kvinneforskning* 1/05 og Sørensen, K. H., Gansmo, H. J. og Lagesen, V.A.: Kvantitet og kvalitet. Strategier for å løse 'jenter og data'-problemet. I: *Læring. Grunnbok i læring, teknologi og samfunn*. Oslo: Universitetsforlaget 2004. ISBN 82-15-00630-2. s. 235-254. For en grundigere behandling av tematikken se Lagesen (2005).

Litteratur

Gansmo, H. J. 2004. Toward a happy ending for girls and computing? PhD dissertation. *STS-report 67/2004*, Trondheim: NTNU, Senter for teknologi og samfunn.

Gansmo, H. J., Nordli, H. og Sørensen, K. H. (2003). The Gender Game. A study of Norwegian computer game designers. *STS arbeidsnotat 1/03*, Trondheim: NTNU, Senter for teknologi og samfunn.

Lagesen, V. A. 2003. Computer Science – careers or computing? Inclusion through ”secularisation” of ICT”. In Oudshoorn, N., Rommes, E. og van Slooten (red.): Strategies of Inclusion: Gender in the Information Society. Vol. III: Surveys of Women”s User Experience. *STS-report 66/2004*. Trondheim: Senter for Teknologi og Samfunn, NTNU.

Lagesen, V. A. 2005. *Extreme make-over? The making of gender and computer science. Dr.avhandling*, Norges Teknisk-Naturvitenskapelige Universitet, NTNU.

Margolis, J. og Fisher, A. 2002. *Unlocking the Clubhouse. Women in Computing*. Cambridge: The MIT Press.

Roberts, E. S., M. Kassianidou og L. Irani. (2002). Encouraging women in computer science. *Inroads*, *34* (2), 84-88.

IKT verktøy i matematikk: Gutters og jenters valg og holdninger

Anne Berit Fuglestad

Institutt for matematiske fag, Høgskolen i Agder
Email: anne.b.fuglestad@hia.no

Er det forskjell på gutter og jenters holdninger og tanker om bruk av datamaskiner i matematikkundervisningen? I to prosjekter om IKT (informasjons- og kommunikasjonsteknologi) i matematikkundervisningen svarte elevene på spørsmål om hva de tenker om matematikk, om de liker faget, om det er nyttig eller vanskelig. Videre fikk de spørsmål om hva de tenker om bruk av datamaskiner og hvordan de opplever disse i undervisningen. Andre spørsmål dreide seg om bruk av datamaskiner å på fritid. Jeg vil presentere likheter og forskjeller mellom kjønnene og om det har skjedd forandringer fra 1995 til 2004. Et sentralt tema i et prosjekt var å arbeide med IKT verktøy slik at elevene selv kunne velge passende verktøy for å løse en gitt matematikkoppgave. Er det kjønnsforskjeller ved valg av oppgaver eller ved valg av verktøy?

Bakgrunn og mål
Det er en vanlig oppfatning at gutter er flinkere med IKT, i alle fall de tekniske sidene av arbeidet med dette (Gansmo, Lagesen, & Sørensen, 2005). IKT er blitt dagligdags, og forskjeller som fantes før er ikke like synlige i dag. En rapport om digitale kjønnsskiller viser til at det er forskjeller, men variasjonene innenfor hvert kjønn er stor. Gutter har likevel mer omfattende og variert bruk av IKT hjemme (Kristiansen, 2004). Det har også vært en vanlig oppfatning at gutter gjør det bedre i matematikk og liker faget bedre enn jenter. Så hvilke forskjeller finnes når IKT brukes i matematikkundervisningen? Det har så langt vært begrenset bruk av IKT i fagene i norsk skole, spesielt i matematikk og dette bekreftes i ITU Monitor 2005 som nylig er publisert (Erstad, Kløvstad, Kristiansen, & Søbye, 2005).

Det har vært forsket på kjønn og matematikk, men i liten grad på kombinasjonen teknologi, kjønn og matematikk. Vale (2005) tok opp elevenes holdninger og syn på IKT i matematikk og fant at jenter mente undervisning med datamaskiner var mindre nyttige for dem enn guttene mente. Guttene var mer positive og mente datamaskiner gjorde matematikken mer relevant.

Kjønnsforskjeller var ikke sentralt i min forskning på bruk av datamaskiner i matematikkundervisning, men kjønn var en variabel og gir derfor mulighet for analyse av kjønnsforskjeller. I lys av andre resultater og de vanlige oppfatningene om matematikk og teknologi som mannsdominerte områder, er det interessant å se hva gutter og jenter tenkte om og opplevde bruk av datateknoloig i matematikk-undervisningen. Undersøkelsene referert foran har lite dokumentasjon om bruk av IKT i fagene. Denne artikkelen kan gi et bidrag der det foreløpig er begrenset dokumentasjon av resultater (Gjøvik, Hansen, Stedøy, Wedege, & Wæge, 2005), spesielt fra norske skoler.

To prosjekter om bruk av IKT i skolen

I løpet av de siste 10 år har jeg arbeidet med flere prosjekter om IKT i matematikkundervisning. Her presenterer jeg resultater fra to av dem og sammenligner resultater for å se om det er forskjell på gutters og jenters holdninger og tanker om bruk av IKT i matematikkundervisning. I den første undersøkelsen, i 1995, var det elever i 5. – 7. klasse, mens det i den andre, i 2004, var det elever på ungdomstrinnet. Prosjektene hadde som nevnt ikke et spesielt kjønnsfokus, og jeg har derfor ikke observasjoner spesielt med kjønnsperspektiv. Fra en side kan det synes som en svakhet, men det kan også være en fordel å studere kjønnsforskjeller i ettertid, for å unngå at et kjønnsfokus underveis påvirket spørsmålene i for stor grad.

I begge prosjektene fikk elevene ved slutten av arbeidet, i 1995 og i 2004, et spørreskjema der de blant annet skulle svare på en del spørsmål om sine tanker og holdninger til datamaskiner i matematikkundervisningen. Noen spørsmål var de samme i begge prosjektene. Spørsmålene ble gitt i form av påstander der eleven skulle krysse av på en Likert-skala fra 1 til 5 der 1 står for helt enig, 2 enig, 3 vet ikke, 4 uenig og 5 helt uenig. I det andre prosjektet brukte jeg en tilsvarende seksdelt skala, etter råd fra lærerne i prosjektet, men har slått sammen de to midterste alternativene, litt enig og litt uenig, til vet ikke for å kunne sammenligne direkte med det første prosjektet. Alle frekvenser i det følgende er gitt i prosent. Antall elever som har svart er angitt i tabellene.

Datamaskiner i matematikkundervisningen 1995

I et prosjekt skoleåret 1994-1995 var ideen å bruke datamaskiner i mange deler av matematikkundervisningen. Regneark, Cabri og en del småprogrammer fra Nasjonalt læremiddelsenter ble tatt i bruk (Fuglestad, 1996). Tanken var at det skulle være mulig å bruke datamaskiner der det var naturlig i undervisningen. Mitt hovedfokus var å studere hvordan elevenes forståelse og ferdighet i matematikk utviklet seg når datamaskiner ble tatt i bruk, med spesiell vekt på forståelse av desimaltall. Det ble derfor gitt tester ved starten og slutten av skoleåret, pre-test og post-test og en forsinket post-test ved starten av neste skoleår. De samme oppgavene ble brukt for å kunne sammenligne resultater. Det var også kontrollgrupper, både klasser ved andre skoler som brukte datamaskiner, og noen som ikke brukte. Testene fra prosjektet viste liten forskjell mellom kjønnene. Det var bare på to grupper av oppgaver at det var signifikante forskjeller mellom gutter og jenter.

I slutten av skoleåret fikk elevene et spørreskjema ”Tanker om matematikk”, der de fikk ta stilling til utsagn om holdninger til matematikk, til bruk av datamaskiner og om datamaskiner i matematikkundervisning. Noen spørsmål dreide seg også om bruk av datamaskiner på fritid.

OM1:Liker matematikk (frekvenser i %)

kjønn:	helt enig	Enig	vet ikke	uenig	helt uenig	flere svar	Antall
jente	7,4	39,3	17,2	23,0	11,5	1,6	122
gutt	8,5	42,6	17,8	16,3	13,2	1,6	129
SUM	8,0	41,0	17,5	19,5	12,4	1,6	251

OM2: Matematikk er nyttig for meg (frekvenser i %)

kjønn:	Helt enig	Enig	vet ikke	uenig	helt uenig	flere svar	antall
jente	26,2	58,2	12,3	0,8	0,8	1,6	122
gutt	40,6	36,7	19,5	2,3	0,0	0,8	128
SUM	33,6	47,2	16,0	1,6	0,4	1,2	250

OM3: Matematikk er lett (frekvenser i %)

kjønn:	helt enig	enig	vet ikke	uenig	helt uenig	flere svar	antall
jente	8,3	32,2	38,0	15,7	4,1	1,7	121
gutt	15,6	39,8	27,3	14,1	1,6	1,6	128
SUM	12,0	36,1	32,5	14,9	2,8	1,6	249

De første spørsmålene om matematikk, om de liker faget, om det er lett og om det er nyttig viser små forskjeller mellom kjønnene, men flere gutter enn jenter gir uttrykk for at de helt enige. Svarene på om de liker matematikk kommer ut nærmest på gjennomsnitt, men tabellen viser at det er stor prosent som er enig og tilsvarende som er uenig slik at det blir balanse. Det er enighet om at matematikk er nyttig, men mindre enighet om at det er lett.

Når det gjelder holdninger til IKT viser resultatene at begge kjønn liker datamaskiner, igjen sterkere uttrykt for guttene. Det samme gjelder for om datamaskiner er nyttige. Størst forskjell finner vi for om de mener datamaskiner er lette å bruke.

OD1: Liker datamaskiner (frekvenser i %)

kjønn:	helt enig	enig	vet ikke	uenig	helt uenig	flere svar	antall
jente	54,9	32,0	8,2	2,5	1,6	0,8	122
gutt	77,5	17,1	2,3	0,8	2,3	0,0	129
SUM	66,5	24,3	5,2	1,6	2,0	0,4	251

OD2: Datamaskin er nyttig (frekvenser i %)

kjønn:	helt enig	enig	vet ikke	uenig	helt uenig	flere svar	antall
jente	21,3	32,8	38,5	4,9	0,8	1,6	122
gutt	45,3	34,4	16,4	2,3	1,6	0,0	128
SUM	33,6	33,6	27,2	3,6	1,2	0,8	250

OD3: Lett å bruke datamaskin (frekvenser i %)

kjønn:	helt enig	enig	vet ikke	uenig	helt uenig	flere svar	Antall
jente	19,8	41,3	21,5	14,9	1,7	0,8	121
gutt	53,1	28,9	10,9	3,9	2,3	0,8	128
SUM	36,9	34,9	16,1	9,2	2,0	0,8	249

Spørsmålet er nå om dette også gir tilsvarende utslag når datamaskiner brukes i matematikkundervisning. På bakgrunn av svarene om at de liker datamaskiner, at de er nyttige og for de fleste lett å bruke, skulle vi forvente en positiv holdning når de brukes i matematikkundervisning. Flere spørsmål tok opp dette, og noen svar refereres her.
På spørsmål om de mener de lærer matematikk av å arbeide med matematikkprogrammene er det svakt positiv tilsutning. Om de forstår mer matematikk av å arbeide med dataprogrammene gir flere vet ikke svar, og igjen er det små kjønnsforskjeller. De fleste svarer vet ikke eller uenig på om de må tenke hardt når de arbeider med matematikk-programmene. I alle spørsmålene ser vi små forskjeller mellom kjønnene, men guttene velger oftere enn jentene de sterkeste alternativene helt enig eller helt uenig.

DM1: Lærer av matematikkprogrammene (frekvenser i %)

kjønn:	helt enig	enig	vet ikke	uenig	helt uenig	flere svar	Antall
jente	23,1	34,7	26,4	10,7	4,1	0,8	121
gutt	29,5	36,4	20,9	7,8	3,9	1,6	129
SUM	26,4	35,6	23,6	9,2	4,0	1,2	250

DM2: Forstår mer matematikk (frekvenser i %)

kjønn:	helt enig	enig	vet ikke	uenig	helt uenig	flere svar	Antall
jente	11,8	26,1	42,0	15,1	2,5	2,5	119
gutt	24,0	26,4	28,7	15,5	3,9	1,6	129
SUM	18,1	26,2	35,1	15,3	3,2	2,0	248

DM3: Tenke hardt (frekvenser i %)

kjønn:	helt enig	enig	vet ikke	uenig	helt uenig	flere svar	Antall
jente	2,5	18,5	31,9	38,7	5,9	2,5	119
gutt	6,3	12,6	23,6	37,8	17,3	2,4	127
SUM	4,5	15,4	27,6	38,2	11,8	2,4	246

For å summere opp resultatene kan vi notere at 62% av elevene er enige i at de lærer av matematikkprogrammene, og guttene er mer enige enn jentene, men ca 24% vet ikke.
Elevene er litt enige i at de forstår mer matematikk med datamaskin, men kanskje ikke så mye: 42% av jentene vet ikke, mot 29 % av guttene, mens 12 % av jentene er helt enige mot 24% av guttene. På spørsmål om de mener de må tenke hardt når de arbeider med datamaskiner i matematikk og svaret vet ikke fra ca 28%. I alle spørsmålene uttrykker guttene sterkere meninger, i begge retninger. Tabellene viser flere detaljer.

Det ble gitt flere spørsmål om oppfatninger i forbindelse med datamaskiner i matematikk. For eksempel mener omtrent halvparten av elevene at dataprogrammene hjelper dem til å bli bedre i hoderegning, men denne oppfatningen er sterkest på lavere klassetrinn (5. klasse i 1995). På spørsmål om de tror de lærer mer matematikk ved å arbeide med oppgaver i læreboka enn på datamaskiner, svarer 38% vet ikke, 48% av jentene og 29% av guttene og viser små forskjeller mellom kjønnene. Det var stor enighet om at de ønsker å arbeide mer med matematikk-programmene, hele 72% er enige eller helt enige, og det er små forskjeller på gutter og jenter.

Samlet ser vi at elevene liker matematikk, i alle fall litt, men de liker datamaskiner bedre. Guttene uttrykker jevnt over sterkere oppfatninger enn jentene, ved i større grad å svare helt enig eller helt uenig.

IKT kompetanse i matematikk 2004
Dette prosjektet var inspirert av Læreplanen for grunnskolen fra 1997, som slår fast at elevene skal: "ha kjennskap til bruke av IT og lære å vurdere hvilke hjelpemidler passer i en gitt situasjon". Videre sier lærerplanen at det er et mål å utvikle elevenes selvstendighet og uavhengighet. På bakgrunn av dette var det et må for prosjektet å utvikle elevenes kompetanse til å bruke og kunne velge IKT verktøy for å løse en gitt matematikkoppgave. Prosjektet gikk over tre år med en oppsummeringsperiode siste året der elevene fikk en samling oppgaver de kunne arbeide med. Elevene fikk frihet til å velge hvilke oppgaver, i hvilken rekkefølge og hvilke hjelpemidler de ville bruke: dataprogrammer, lommeregner, papir og blyant eller andre.

Etter denne arbeidsperioden fikk elevene et spørreskjema via Internett der de skulle svare på en del spørsmål av samme type som presentert for prosjektet fra 1995. Dette gir mulighet for å sammenligne resultatene for å se om det har vært en utvikling om det er de samme for gutter og jenter som tidligere, eller om det har skjedd noen utvikling.
Spørsmålene om matematikk følger i stor grad samme mønster som i 1995, men med noe høyere prosent på vet ikke, for eksempel 42 – 44% på om de liker matematikk. Dette kan ha sammenheng med at vet ikke nå er summen av litt enig og litt uenig. Resultatet for "liker matematikk" er omtrent som i 1995, men er det er litt større avstand mellom jenter og gutter. Resultatene på spørsmålet om matematikk er nyttig, viser at elevene er enige i dette; 75% av guttene er enige eller helt enige og 20% vet ikke, mot 60% av jentene og hele 30% av jentene svarer vet ikke. Generelt ga elevene svakere uttrykk for dette enn i 1995 da det nesten var likt for gutter og jenter. Det siste av de tre spørsmålene om matematikk ble stilt på en annen måte i 2004: "Jeg synes matematikk er vanskelig og strever ofte", og her er svarene fordelt med nesten like mange enig og uenig, mens det i 1995 var flere som var enige i at matematikk er lett. Det kan se ut som elevene har forandret mening fra at matematikk er lett til at det er litt vanskelig eller nærmest vet ikke, som har 41% av svarene, mot tilsvarende 33% i 1995. Men måten spørsmålet er stilt på kan ha betydning og her kan det ha betydning at evelvene i 2004 er i 10 klasse mot 5. – 7 i 1995. Men også her er det bare små forskjeller på gutter og jenter.

På samme måte som i 1995 liker også elevene i 2004 å arbeide med datamaskiner. Men med noe mer moderate svar. Det er over 70 % av guttene som svarer enig eller helt enig og 57 % av jentene. Et annet spørsmål var å ta stilling til om de liker å arbeide to sammen for å kunne diskutere Her er jentene mer enige, med 41% helt enige og 37 % enige, mot guttenes 31% helt enig og 44% enig. I 1995 var svarene 47% helt enig og 34% enig for jentene og 38% helt enig og 32% enig for guttene. Tendensen er som før men litt svakere.

Om datamaskiner er nyttige for noen men ikke for meg, svarer 75 % at de er uenige, 70% av jentene og 80% av guttene. Svarene viser samme svarmønster som for tilsvarende spørsmål i 1995, av jentene er 78% uenige i dette, og guttene 82% uenige.
Elevene svarer i 2004 som 1995 at de liker å arbeide med datamaskiner, men det er svakere uttrykt enn i 1995 og guttene liker det bedre enn jentene. Også om datamaskiner er nyttige uttrykker guttene seg sterkere enn jentene. Elevene av begge kjønn synes det er fint å arbeide to sammen med datamaskiner. Jentene viser dette gjennom svarene sine sterkere enn guttene, med omkring 20% usikre.

Spørsmål om datamaskiner i matematikk i 2004
Elevenes holdninger til bruk av datamaskiner i matematikkundervisningen viser også et mønster tilsvarende det i 1995, men mer nøytrale svar (se tabellerne nedenfor). På spørsmålet om de forstår mer av matematikken når de arbeider med datamaskiner, krysser omkring 50% av for vet ikke. Noe over halvparten både av gutter og jenter, svarer vet ikke på om de må tenke hardt. Dette kan bety de er litt enige eller litt uenige (fra 3,3 i 95). 49 % av elevene at de ønsker å arbeide mer med datamaskiner i matematikk, mens omkring 37% er usikre, litt enig eller uenig. Gjennomgående også er det at uttrykker guttene sterkere meninger. I hovedsak er resultatene de samme som i 1995, litt nærmere vet ikke.

s110 'CM Jeg forstår mer av matematikken når vi arbeider med datamaskiner.' (frekvenser i %)

Kjønn	helt enig	enig	vet ikke	uenig	helt uenig	Antall
jente	2,9	15,7	54,3	17,1	10,0	70
gutt	12,3	16,0	50,6	16,0	4,9	81
ukjent	12,5	25,0	37,5	12,5	12,5	8
Sum	8,2	16,4	51,6	16,4	7,5	159

s111 'CM Jeg må tenke hardt når jeg arbeider med matematikk på datamaskinen' (frekvenser i %)

Kjønn	helt enig	enig	vet ikke	uenig	helt uenig	Antall
jente	8,6	12,9	54,3	20,0	4,3	70
gutt	7,4	9,9	58,0	14,8	9,9	81
ukjent	12,5	12,5	75,0			8
Sum	8,2	11,3	57,2	16,4	6,9	159

s113 'CM Jeg vil gjerne arbeide mer med matematikkprogrammene på datamaskin.' (frekvenser i %)

Kjønn	helt enig	enig	vet ikke	uenig	helt uenig	Antall
jente	11,4	25,7	41,4	12,9	8,6	70
gutt	34,6	24,7	30,9	8,6	1,2	81
ukjent	12,5	25,0	50,0	12,5		8
Sum	23,3	25,2	36,5	10,7	4,4	159

Sammenligning av resultater fra 1995 og 2004.
Hovedtendensen i svarene er de samme i 1995 og 2004 for de spørsmålene som er undersøkt her. Guttene uttrykker sterkere meninger, de liker matematikk bedre, og synes matematikk er mer nyttig enn jentene. Forskjellene mellom gutter og jenter er små. Jeg har også undersøkt om det er variasjon mellom klasser og variasjon mellom kjønn og fant de samme tendenser som beskrevet foran. Gjennomgående kan vi se at svarene i 2004 er nærmere nøytralt svar, vet ikke. Det er flere momenter som kan forklare dette. Elevene i 1995 var fra 5., 6 og 7. klasse, mens de fra 2004 var fra 10 klasse. Mitt inntrykk er at yngre elever generelt liker matematikk bedre. Dette kan gi utslag her. Vi vet også at i løpet av de årene som er gått, er datamaskiner blitt mer vanlig, og har kanskje ikke samme motiverende effekt. De fleste elevene er vant til å bruke datamaskiner på sin fritid.

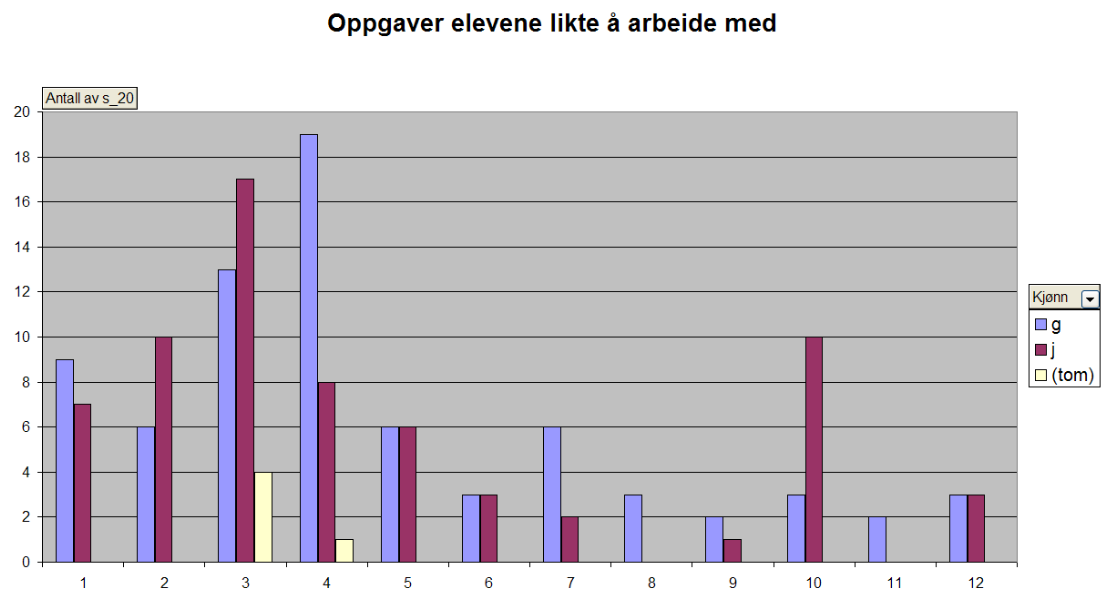
I 1995 brukte 25% av guttene og 11% jentene datamaskin hjemme daglig. 42% av jentene brukte sjelden datamaskin hjemme, og 51 % sjelden hos andre. Spill dominerte, med 97% av bruken, og deretter kom tegneprogram og tekstbehandling. Flest jenter brukte tekstbehandling.

I 2004 svarte elevene på de samme spørsmålene om bruk av datamaskiner utenom skolen. 98% av guttene brukte datamaskin utenom skolen, 78 % daglig hjemme, og for jentene var tilsvarende frekvenser 96% brukte datamaskiner og 49% daglig hjemme. De brukte sjeldnere datamaskin hos andre. Av programvare som ble brukt dominerte Internett med svarfrekvenser 94% av guttene og 88% av jentene. Deretter kom tekstbehandling ca 50%, regneark ca 25% og tegneprogram for 20% av guttene 9 % av jentene.

Disse svarene med hensyn til bruk av datamaskiner utenom skolen samsvarer godt med andre undersøkelser når det gjelder hovedtendenser, f.eks fra ITU Monitor i 2003 og 2005 (Erstad et al., 2005; Kløvstad & Kristiansen, 2004) men det virker som flere brukte datamaskiner hjemme enn det som er vanlig. Vi ser at bruksmønstre også viser samme tendenser, med Internett på topp, men det er også skjedd stor utvikling når det gjelder muligheter, for eksempel i bruk av e-post og annen kommunikasjon via Internett.

Elevenes valg av oppgaver og IKT verktøy
I oppsummeringsperioden i mars – mai 2004 fikk elevene 6 – 8 timer i klassene der de arbeidet med oppgaver, med eller uten IKT verktøy. Et hefte med 12 oppgaver med varierende vanskegrad ble delt ut ved starten, og de kunne selv velge oppgaver og hvilke hjelpemidler de ville bruke; Excel, Cabri, Grafbox, papir og blyant, lommeregner eller andre. Elevene arbeidet alene eller 2 -3 sammen og ble oppfordret til samarbeid. Arbeidet ble observert og en del datafiler fra elevenes arbeid ble samlet inn.
Noen få dager senere fikk de spørreskjema på Internett, der det også var en del åpne spørsmål der de kunne skrive inn svarene sine. Noen av spørsmålene var knyttet til oppgavene de arbeidet med i denne oppsummeringsperioden. De skulle velge en av oppgavene som de likte å arbeide med, og gi kommentarer hvorfor de likte denne, krysse av for hvilke hjelpemidler de brukte på denne oppgaven, IKT verktøy eller andre og gi begrunnelser for dette. De fikk også spørsmål om å skrive litt om hva de lærte av å arbeide med denne oppgaven. Tilsvarende spørsmål ble også stilt om en oppgave de ikke likte så godt.

Hvilke oppgaver likte de å arbeid med, er der forskjeller i valg av oppgaver og hjelpemidler for gutter og jenter? Er det forskjeller i begrunnelser for hva de likte og ikke likte, i begrunnelser og eventuelt på forskjell på dybde i kommentarene deres?



Oversikten viser variasjoner fra oppgave til oppgave når det gjelder hva elevene markerte at de liker og mellom gutter og jenter. Oppgave 3 var godt likt av både gutter og jenter, men flest jenter. Oppgaven dreier seg om å planlegge innkjøp og salg i en kiosk ved et idrettsarrangement. Denne var også dårlig likt av mange, både gutter og jenter. Der var markert flere gutter enn jenter som likte oppgave 4 som dreide seg om beregning av renter på en kapital etter et antall år, og flere spørsmål knyttet til dette. Det var også mange flere jenter enn gutter som likte oppgave 10 der de måtte beregne priser for busstur etter forskjellige lineære modeller og sammenligne resultatene. Jeg vil likevel ikke konkludere med at det er dramatiske forskjeller siden de i undersøkelsen krysset av for bare en oppgave de likte. Det kan godt tenkes at de likte flere. Det kan også påvirke valgene at i noen klasser hadde de arbeidet lite med de siste oppgavene i heftet.

Kommentarer fra jenter og gutter

Er det mulig å se hvilke svar som kommer fra jenter og gutter, eller er de like? Hvilke typiske trekk finner vi hos jenter og gutter? Er det forskjell i valg av tema for oppgavene? Disse svarene representerer ei jente og en gutt, men hvem er gutt og jente av disse? En elev kommenterte oppgave 4 slik, hvorfor eleven likte oppgaven:

> *Det var fordi den ikke var for vanskelig å løse. Det var en gøy oppgave. og siden jeg gjorde den på excel var det gøy, men også litt vanskelig*. Eleven valgte regneark: *det var fordi, at når jeg skulle sette opp for flere år så var det lettest å bruke excel.* Og lærte: *jeg lærte hvordan man beregner renter, ut i fra de pengene du alt har i banken.* (Fra spørreskjema.)

En annen elev valgte også oppgave 4, og ga denne begrunnelsen:

> *For der er det noe man trenger når det gjeller penger i banken og skal ta u og for mye du får men så mye rente men hvor mange pengene er i banke og mye du får i tileg.* Eleven valgte Excel fordi: *for det er det jeg reiner best med.* Og hva eleven lærte: *lærte rente og reine etter så mye rente du har og får i tilegg nå du ta ut penger.* (Fra spørreskjema.)

I seminaret på Novemberkonferansen så vi på flere slike svar fra gutter og jenter fra tre av oppgavene. Det var ikke uten videre lett å skille ut hvilke som var svar fra jenter og hvilke som var fra gutter. Guttene skriver mindre enn jentene, de skriver mer feil, har en litt annen språkbruk og uttrykker mer bestemte oppfatninger. Noen slike mer generelle trekk som gjelder gutter og jenter kunne anvendes, men dette trenger ikke være spesielt knyttet til matematikkfaget.

For spørsmålene om hvorfor de likte oppgaven eller ikke likte den, og om hvorfor de valgte et bestemt verktøy kodet jeg svarene for å få oversikt over hovedinnholdet i dem. Noen svar gir flere grunner, og koden representerer da det som ser ut til å være sterkest uttrykt. Her er det mulighet for at flere koder kunne være like gode, og det gir en viss usikkerhet. I følgende er bare en kode per svar tatt med. Det var en viss variasjon i innholdet i svarene, men noen svar skiller seg ut, slik som at oppgaven var lett, gitt av ca 36% av elevene og like mange jenter som gutter. Det var også mange svar som viser at utfordrende oppgaver og eksperimentering er godt likt, men best av gutter. Flere gutter enn jenter liker oppgaven fordi det var utfordrende, ca 20% av guttene mot 13% av jentene, og 11% av guttene og 9% av jentene liker at de får eksperimentere. Men flere jenter enn gutter begrunner svaret med at oppgave er passe vanskelig, 18% av jentene mot 13% av guttene. For en oppgave de ikke likte er typiske svar "den var vanskelig" for 35 % (gutter 37% og jenter 29%) og "det var mye å gjøre" 26% (gutter 26% og jenter 28%) men det var også svar som at "den var for lett" gitt av ca 11% med 18% av guttene og 4% av jentene.

Svarene er forholdsvis jevnt fordelt mellom gutter og jenter, begge kjønn gir begrunnelsen at oppgaven var lett, men noen forskjeller er klare: Flere gutter enn jenter liker utfordrende oppgaver, og flere liker å eksperimentere, mens jentene liker oppgaver som er passe vanskelige og nyttige.

Et annet viktig spørsmål å finne ut av var hvilke begrunnelser de kunne gi for valg av et bestemt verktøy. Dette vil kunne utdype deres valg av verktøy. Også disse svarene ble kodet for å finne de mest vanlige begrunnelsene. Resultatet viser en del forskjeller. Totalt 16% av elevene gir en god begrunnelse, for eksempel med kommentarer eller forklaringer på hvordan vektøyet brukes, 19% av guttene og 15% av jentene. Mange svar var av typen "det er greit å bruke", "lett å regne med .." eller passer til oppgaven. 42% ga slike svar, 28% av guttene og 55% av jentene. Mange ga også nøytrale svar som ikke gir noen spesiell informasjon, 38% av guttene og 15 % av jentene. 8% av guttene og 6% av jentene svarer at de velger dette verktøyet fordi de kan det.

Det er ikke lett å få elevene til å skrive informative svar på spørsmålet om hvorfor de valgte et bestemt verktøy. Svar som "det passer" og "lett å bruke" kan være gode dersom elevene også viser at de behersker verktøyet (Fuglestad, 2005).

Avslutning – vurdering

Det var en del variasjoner mellom skolene med hensyn til valg av oppgaver som elevene likte. Dette kan ha sammenheng med hvilke dataprogrammer læreren hadde prioritert å bruke. Ved noen skoler var det lite arbeid med Cabri og Grafbox og dermed mindre aktuelt for elevene å velge disse senere. Det var også variasjon i lærernes kompetanse og en lærer som skilte seg spesielt ut ved å ha lang erfaring med IKT verktøy i undervisingen og aktivitet med utvikling av undervisningsopplegg med datamaskiner. Dette kan være forklaringen på en del valg, men neppe spesielt på kjønnsforskjeller.

Det er noen forskjeller, men de er ikke store når det gjelder bruk av datamaskiner i løsning av matematikkoppgaver og holdninger til IKT i matematikkundervisning. Svarene på spørsmål om holdninger viser at guttene jevnt over uttaler seg sterkere, men kanskje uten at det ligger sterkere meninger og holdninger bak. Jentene svarer vet ikke eller gir svarene litt enig eller litt uenig der flere gutter svarer helt enig og helt uenig. Tendensen er likevel den samme generelt når vi ser på alternativene liker/ ikke liker.

Jenter forsøker å være mer nøyaktige i sine svar, vurderer mer, generell usikkerhet eller forsiktighet fører til vet ikke svar, mens guttene er mer skråsikre. Dette kan være vel så mye basert på generelle forskjeller mellom kjønnene og ikke spesielt for matematikkfaget og påvirket av generelle holdninger og oppfatninger i miljøet om at jenter ikke skal like teknologi.

Svarene på de åpne spørsmålene viser at det er vanskelig å skille mellom gutter og jenter ut fra det de skriver. Noen kjønnsforskjeller fins generelt i måten de uttrykker seg på. Gutter skriver mindre og har flere skrivefeil. Det er stor variasjon innenfor begge grupper, og det viste seg vanskelig å skille gutter og jenter ut fra svarene. Igjen kan dette forklares ved generelle forskjeller som ikke er spesielt knyttet til matematikkfaget.
Forskjellene fra 1995 til 2004 kommer fram ved at svarene er nærmere vet ikke. Her kan forskjell i klassetrinn være en del av forklaringen, og det har vært en stor utvikling i bruk av datamaskiner, spesielt i hjemmene gjennom disse 9 årene, der omkring 90% både gutter og jenter brukte datamaskiner hjemme daglig i 2004 (Erstad et al, 2005).

Det er vanskelig å trekke generelle konklusjoner om kjønn ut fra de to prosjektene. Men det er interessant å se at resultatene er i samsvar med det som er funnet i andre undersøkelser (Vale, 2005). Dette ble også bekreftet av andre forskere på seminaret på Novemberkonferansen. Det er små forskjeller på gutter og jenter i forhold til bruk av datateknologi i skolen og det kan se ut som skolen virker utjevnende på kjønnsforskjeller i forhold til datateknologi (Erstad et al, 2005). For matematikkfaget mener jeg dette må dette oppfattes positivt.

Referanser

Erstad, O., Kløvstad, V., Kristiansen, T., & Søbye, M. (2005). *ITU Monitor 2005 – På vei mot digital kompetanse i grunnopplæringen*. Oslo: Universitetsforlaget.

Fuglestad, A. B. (1996). *Computers and the understanding of mathematics. A study of teaching decimal numbers. PhD thesis*. Kristiansand: Agder College, Publisert: Research Series no 6, 1998.

Fuglestad, A. B. (in press). Students' attitudes, choice of tools and solutions of mathematical tasks in an ICT rich environment. *Proceedings of Norma05.*

Gansmo, H. J., Lagesen, V. A., & Sørensen, K. H. (2005). Out of the boy's room? A critical analysis of the understanding of gender and ICT in Norway. *NORA (Nordic Journal of Women's Studies), 11,* 130-139.

Gjøvik, Ø., Hansen, T. H., Stedøy, I. M., Wedege, T., & Wæge, K. (2005). Kjønnsperspektiv og matematikk. *Tangenten, 16,* 69-74.

Kløvstad, V. & Kristiansen, T. (2004). *ITU monitor. Skolens digitale tilstand 2003*. Oslo: Forsknings og kompetansenettverk for IT i utdanning.

Kristiansen, T. (2004). *Digitale kjønnsskiller? En rapport om kjønn og IKT*. Oslo: Utdannings og forskningsdepartementet.

Vale, C. M. (2005). Student views of computer-based mathematics in the middle years: Does gender make a difference? *Educational Studies in Mathematics,* 287-312.

Research on ICT in mathematics education: with or without a gender perspective?

Panel debate with the following initial questions on information and communication technology (ICT) in mathematics education:

- Why do so few studies on ICT and mathematics focus explicitly on gender?
- Is it meaningful to study ICT in mathematics education without including the gender dimension? (Why/why not)
- How do we investigate gender, mathematics and ICT without stereotyping and dichotomising? (Girls hate technical challenges/ boys love …)?

Members of the panel: Barbro Grevholm, Rudolf Strässer, and Morten Blomhøj.
Chair: Tine Wedege

The gender perspective in mathematics education research

Barbro Grevholm

Institutt for matematiske fag, Høgskolen i Agder
Email: barbro.grevholm@hia.no

I want to start by focussing on the perspective of time and development over years. It was in the first years of the 1970ies that the first electronic calculators and computers started to be used in school mathematics (Grevholm, 1997). Almost at the same time the first research studies in mathematics education with a gender perspective were produced (Fennema, 1995).

Technology has gone through a tremendous development since then, with ever faster, more powerful and potent electronic tools. Internet has given people unexpected opportunities to be in touch with each other all over the world.

The view on the variable gender in educational research has also gone through a dramatic development and different paradigms have replaced each other. In a chart over three paradigms, Patty Lather (1991) presents their different methods of inquiry: positivist, interpretive, critical and post-modern and the focus of their studies as human behaviour, how people understand and make sense of their realities, emancipation related to race, class and gender, and how multiple voices could lead to displacement of narratives of progress for all. The studies within these paradigms involve gender difference in mathematics performance (with researchers as Fennema and Leder), women's ways of knowing (Becker), the possibility of a feminist mathematics (Damarin) and construction of identities and differences (Walkerdine), respectively. The intention of their work is to predict, understand, emancipate and deconstruct, respectively (Lather, 1991).

Much research has been published on gender and mathematics education (Leder, 1992; Leder, Forgasz & Solar, 1996; Grevholm & Hanna, 1995; Hanna, 1996, Grevholm, 1995; Grevholm & Evans, 1998; Hag, Holden & van Marion, 2000; Wistedt, 2001; Grevholm, Vretblad & Sigstam, 2001). A question is how much of these results that have reached mathematics teachers in school.

Gender should always be one of the variables in research in mathematics didactics even if gender is not a primary focus of the study. In 1975 it was the International Women's Year and one of the things agreed was to include gender as a variable in research studies. Data before 1975 rarely allow gender aspects to be investigated.

Feminism and equity
Over the years there has been three generations of feminism visible in research studies

a) women seek equality
b) women embrace their own special qualities and reject uncritical assimilation into the male world

c) women critique what they sought and accomplished in the first two phases and seek solutions that arise out of careful synthesis and new questions (Leder, Forgasz & Solar, 1996).

Different models of equity has been used, such as

1. The assimilationist model (female and male are similar and strive for similar goals)
2. The deficit model (goal and outcomes should be the same and compensatory activities used to overcome the deficiencies)
3. The pluralist model (not the same goal for different groups)
4. The social justice model (individuals differ in some ways but are similar in others, identical treatment used where appropriate but different where beneficial).
5.

Model 1 and 2 are consistent with liberal feminism and model 3 and 4 with radical feminism (ibid). Related to these models and the generations of feminism, stages of curriculum development are seen as

1. Womanless mathematics
2. Women in mathematics
3. Women as a problem in mathematics
4. Women as central to mathematics
5. Mathematics reconstructed (ibid).

There is one feature of internet and the technological development, which can be scaring from a gender perspective, and which is rarely discussed in educational contexts. Internet has opened for trafficking, pornography and paedophilia, which is gluing on to this tool a partly criminal and asocial activity. Especially for women, who can fear to meet this phenomenon unwanted for example as intruding SPAM or by coincidence, the situation can be frightening. There is a need for research on how aspects of such misuse of ICT has influence on the educational contexts.

Equity in the political life of the Nordic countries has come further than equity in education in some respects. One example is the percentage of female professors in academia and especially in mathematics. In Sweden there is still just one professor of pure mathematics. And she has been employed on a position that was created only for women. There is a paradox here in the fact that girls and women study at university to a higher degree than men and boys, and females are successful. But still in working life they earn lower salaries and have working positions that offer harder and more unhealthy conditions than men get in their work. Reports from SCB (1995, 2003) confirm this picture again and again.

What do we actually know about the use of ICT-technology in society today? A pure observation might give the impression that many women do actually work with ICT. The number of workers is the same as the number of “tjänstemän” (civil servants) in Sweden today (1.8 Million in each category). As soon as computers are used there is mathematics involved. For example to write with a computer includes more mathematics than to write with a typewriter (numbers on margins, tabs, writing space, counting signs, words and so on). This technology opens for new ways of solving problems. With the use of ICT writing has become much more important. Does this change the position of women, as they are often good at expressing themselves? Also in mathematics, writing and presenting play a greater role. When, in Victoria, authorities introduced a new way of assessing mathematics, which included more writing, girls were outperforming boys (Leder, 2004). Is the technology biased in favour of women because of their linguistic abilities? Technology, as defined by Wedege (2000), consists of three dimensions – technique and machines, organisation of work or teaching, competences and qualifications of human beings – an their dynamic interrelations. Within this framework, the third dimension – people’s competence – is important in work with technology. Women might have an advantage here?

References

Fennema, E. (1995). Mathematics Gender and research. In B. Grevholm & G. Hanna (Eds*.), Gender and mathematics education*, *an ICMI Study,* (pp. 21-38). Lund: Lund University Press.

Grevholm, B. (1995). A national network of women: Why, how and for what? In Pat Rogers and Gabriele Kaiser (Eds.), *Equity in mathematics education. Influences of feminism and culture*, (pp. 59-65). Washington D. C.: Falmer Press.

Grevholm, B., & Hanna, G. (Eds.) (1995). *Gender and mathematics education*. Lund: Lund University Press.

Grevholm, B. (1997). Matematikens hjälpmedel. In G. Dahland (ed.), *Rapport från Pedagogforum 1997*, (pp. 7-12). Göteborg: Pedagogiska Institutionen

Grevholm, B., & Evans, J. (1998). Gender and mathematics. Working group 6 in ICME8. In *Proceedings of the 8th international Congress on Mathematical Education (ICME 8 in Seville 1996),* (pp. 123-129). Sevilla: SAEM 'Thales'.

Grevholm, B. Sigstam, I., & Vretblad, A. (Eds.), (2001). *Kvinnor och matematik. Konferensrapport från Uppsala, 1999.* Uppsala: Uppsala universitet.

Hag, K., Holden, I., & van Marion, P. (Eds.) (2000). *Handling bak ordene. Artikler om jenter og matematikk.* Trondheim: Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet.

Hanna, G. (Ed.) (1996). *Towards gender equity in mathematics education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Lather, P. (1991). *Getting smart: Feminist research and pedagogy within/against the postmodern.* London: Routledge.

Leder, C. G. (1992). Mathematics and gender: Changing perspectives. In D. Grouws (ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 596-622). Macmillan: New York.

Leder, G. C. (2004). Are girls measuring up? In B. Grevholm & L. Lindberg (Eds.) *Kvinnor och matematik. Konferens den 12-14 april 2002*, (pp. 17-24). Lund: B. Grevholm Læromedel.

Leder, C. G., Forgasz, H. J. & Solar, C. (1996). Research and intervention programs in mathematics education: A gendered issue. In A. Bishop, K. Clements, K. Keitel, J. Kilpatrick, C. Laborde (Eds.) *International Handbook of mathematics education*, (pp. 945-985). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Statistics Sweden (SCB). (1995). *Women and men in Sweden. Facts and figures 1995.* Örebro: Statistics Sweden.

Statistics Sweden (2003). *Education in Sweden*. Örebro: Statistics Sweden.

Wedege, Tine (2000). Technology, Competences and Mathematics. In D. Coben, G. FitzSimons, & J. O'Donoghue (eds.) *Perspectives on Adults Learning Mathematics: Research and Practice* (pp.192-209). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Wistedt, I. (2001). Increasing the participation of women in tertiary mathematics, physics and technology: An evaluation of a Swedich initiative. In B. Grevholm, I. Sigstam, & A. Vretblad, (Eds.). *Kvinnor och matematik. Konferensrapport från Uppsala, 1999.* (p 189-198). Uppsala: Uppsala universitet.

Gender and Information Technology: a complicated issue

Rudolf Strässer

Luleå Tekniska Högskola og Justus-Liebig-Universität
Email: rudolf@sm.luth.se

In grade 11, a German upper secondary school (a 'gymnasieskola') offers three parallel courses in Informatics as part of its standard program for students. One of these courses is normally announced and run as a 'girls only' course; i.e. only female students take part in it. The teacher who runs these courses since some years reports to the principal, that this 'girls only' course always outperforms the two other courses, which have male and (normally less) female students. After a first, compulsory year with informatics, when being allowed and asked to make a choice of course topics, the girls nevertheless tend not to elect further courses in Information Technology. How to understand this real-life episode? How to explain that girls do better, but do not go into this field?

At least two lessons can be learned from the episode, which are - as far as I can see - also confirmed by research:

1. There is no reason to believe that girls do worse than boys in Information Technology. They are as able as boys in coping with new information technology. In school, they often do better in school courses - even in IT.
2. There is an unknown fact(or), which seems to lure away girls from information technology.

Besides wild speculations on an explanation for this discrepancy, one can try to find hints from current research to better understand these phenomena. I would like to mention the following results and interpretations of studies into "gendered education" with(in) information technology.

As a start, one major result should be taken into account: Women / girls are said to learn in a different way than men / boys. This issue really came into the debate with the famous book by Belenky et al. (1986) entitled "Women's way of knowing". Some researchers relate this to prototypes of behaviour, which - in Psychology - are described as context-dependent versus content-independent modes of thinking (see the title of Hannover et al. 2001). I do not want to go into details of this debate, but want to mention that these different modes of behaviour are also linked to gender - with Hannover et al. 2001 explicitly stating: "Experiment I (as have other previous studies) showed that men are more field independent than women are" (loc.cit., p. 404). What can be learned from this is the lesson that there is reason to believe that behaviour and maybe even learning is influenced by the gender of the learner; it may be wise to think about something like "gendered learning".

One could go even further and relate this to the issue under study here: Information technology is not offering a specific context or content, which attracts the attention of students. Now female students are said to be more context-dependent than male students. As a consequence, they may only be interested by this (neutral?) technology if it is for a specified and valued purpose and not by technology for the sake of technology. This fits with common sense about gender stereotypes of boys enjoying games for their own sake and competition, while girls seem to be more interested in the consequences and purposes of an activity. Can this difference be seen as a way to understand different reactions to using of / teaching with the help of information technology?

As described in the episode of the beginning, women / girls seem to opt out of technology more often than men / boys. At least in Germany, two mechanisms are often used to explain this. The first mechanism can be taken as the consequence of a lower self-esteem of girls as compared to that of boys. An interview and questionnaire study in the German "Land" Nordrhein-Westfalen tried to find out gender-specific patterns of course choices among students at the beginning of upper secondary schooling ("gymnasiale Oberstufe", see Küllchen&Sommer 1989). They put forward that male students tend to see their capacities in a positive way; female students tend to underestimate their potential (loc.cit., 156). This result was also found for students in lower secondary schools (see Horstkemper 1987). If this under-estimation meets with a cultural definition of technology as male, it becomes even more difficult for female students to opt for a "male" and difficult subject like information technology.

In addition to this, at least in some countries like Germany, opting out of technology frequently done by female students seems also to be linked to a lack of appropriate feminine role models. For Germany, even official statistics show that women now form the majority of students at universities in general, but still are a small minority in technical domains and mathematics. There seems to be an under-estimation of female competencies, which shows up in the number of female persons in higher positions like professorships. I do remember the somewhat depressing imitation of job announcement shown in my math department for a long time, simply saying: "Wanted: the first female full professor in Mathematics". Even if not funny at all, this episode clearly indicates the lack of female role models in certain areas of the (academic) world. Such a lack makes it difficult for female students to think of their potential career in a specific area like technology in terms of a success story - implying that one opts out of this domain.

At least for Germany, it is widely accepted in research that technology and mathematics are seen as masculine domains (see again Küllchen & Sommer 1989 or Hannover & Kessels 2003). Following the argumentation by Hannover & Kessels, this makes it more difficult to go into these fields at one's own decision, because such a choice could do harm to the self-image and social acceptance of a person. This mechanism can be an explanation of the women's / girls' opting out of information technology courses when they are allowed to choose. It should be added, that the clear gendered image of mathematics seems not to be in place in Sweden (see Brandell et al. 2003 / 2005). As a consequence, it may be necessary to give different interpretations of the situation in different countries. This implies a need for a detailed analysis of the (national - if existing!) culture with respect to mathematics and technology, if one wants a deep understanding of gendered learning of / with the help of information technology. There is no easy, simple way to understand the complicated relation of gender and information technology.

If we take the results on gendered learning – in general and not only in information technology - for granted, certain consequences are obvious for a decent research into this issue: On the one hand, specific research into the areas reported is in place - research focussed on the specific situation, which is created when information technology is involved as object and/or means of learning. At present, little is known about the gender-specific consequences of new information technology being present in the learning situation. On the other hand and from the results about gendered learning mentioned above, it is also obvious that the research methodology cannot be simply comparing processes and/or results of subgroups of a population defined by biological sex. Gendered learning is - if existing - a more complex issue than just a matter of belonging to either sex. Stereotypes from the surrounding society, opinions and habits of the peer group and the individual self definition and self esteem play such an important role in (gendered) learning that more specific, maybe a combination of quantitative and qualitative research methods has to be used to better understand the phenomena linked to this issue. The rough, classical, quantitative statistical approach may prove inadequate to study gendered learning with(in) information technology.

I would like to end these rather vague ideas with a citation from an old, wise man: "There is no special activity, my friend, for a woman, only because she is a woman. And there is no special activity for a man only because he is a man. On the contrary, nature has equally distributed the competences between the two sexes." (Plato:Politeia; transl. RS)

Post Scriptum

I would like to add one remark to the text above: I felt honoured to be invited to take part in the seminar - last not least because I am NOT a specialist in the field of gender studies. I could and can only give my ideas and best knowledge in a field, where much research is needed and where I am an amateur as (unfortunately!) most of my colleagues.

References

Belenky, M. F., Clinchy, B. M. et al. (1986). *Women's way of knowing: The development of self, voice, and mind.* New York: Basic Books, Inc.

Brandell, G., Nyström P., et al. (2003). *Kön och matematik. GeMaprojektet Grundskolerapport*. Lund Institute of Technology, Lund University.

Brandell, G., Larsson, S., et al. (2005). *Kön och Matematik. GeMaProjektet Gymnasierapport*. Lund Institute of Technology, Lund University.

Hannover, B., Kühnen, U., et al. (2001). The Semantic-Procedural Interface Model of the Self: The Role of Self-Knowledge for Context-Dependant Versus Contenxt-Independent Modes of Thinking. *Journal of Personality and Social Psychology 80*(3), 397-409.

Hannover, B. & Kessels U. (2003). Der Einfluss des Images der Mathematik auf die schulische Interessen- und Leistungsentwicklung. In H.-W. Henn (Ed.), *Beiträge zum Mathematikunterricht* (pp. 15-22). Berlin: Franzbecker.

Hannover, B. & Kessels, U. (2004). Self-to-prototype matching as a strategy making academic choices. Why high school students do not like math and science. *Learning and Instruction 14*, 51-67.

Horstkemper, M. (1987). *Schule, Geschlecht und Selbstvertrauen. Eine Längsschnittstudie über Mädchensozialisation in der Schule.* Weinheim: Beltz.

Küllchen, H. & L. Sommer (1989). *Mädchen, Macht (und) Mathe. Geschlechtsspezifische Leistungskurswahl in der reformierten Oberstufe.* Düsseldorf: Landesregierung Nordrhein-Westfalen, Staatssekretärin für die Gleichstellung von Frau und Mann.

A gender perspective on research in the use of ICT in mathematics teaching

Morten Blomhøj

IMFUFA, Roskilde Universitetscenter
Email: blomhoej@ruc.dk

I presuppose that the biological gender differences are of no significance for the learning of mathematics. However, I expect that gender as constructed through socialisation processes in which the educational system plays an important role, has an effect on the learning of mathematics. Of course the gender is mixed up with many social background variables and foreground expectations and, most important, differences due to enormous variation in personalities. In a sense this could explain that, in general, research has not been able to pinpoint sustainable differences in the performance by girls and boys in learning mathematics.

To me this does not imply that the gender perspective is of no relevance in mathematics education research in general and, in particular, in research on the use of ICT in mathematics teaching. But it does imply that the relevant research problematique in relation to the gender perspective might be to look for gender differences on the micro-level in order to find more effective ways to support the learning of both girls and boys in a computer-based learning environment.

In my research on computer based mathematics teaching, I have not analysed the gender perspective explicitly, but I think that the qualitative analyses of students' computer based mathematical activities in Blomhøj (2001) make it possible to understand student activities without neglecting the gender perspective. The study is based on a qualitative interview investigation of students' computer based solutions to written homework tasks and the students' subsequent explanations and reflections about their work. The study results in description of the students' activities and their reflections based on three different stereotypes of activities:

1. An uncertain and defensive activity
2. A solution focused activity
3. A reflective activity.

The three forms of activity are characterised in the following way:

1. The uncertain and defensive activity is characterized by

- an alienated relation to the student's own computer based solutions
- avoiding personal involvement in explanations of solutions
- a tendency to solve the tasks by looking for similar examples in the textbook or in previously solved tasks
- explaining lack of understanding of own work with lack of memory about the process
- seeing mathematical knowledge and knowledge about the computer programs as the same type of knowledge – you have to remember how to do it.
- dependency on the use of the computer for nearly all mathematical activities
- using the software in a very narrow minded manner
- negative attitudes towards the use of computers in mathematics teaching as well as in general

- explaining learning difficulties in mathematics with the requirement of using computer programs.

2. **The solution focused activity is characterized by**
   - explaining solution strategies by referring to how a particular computer program was used
   - using the software very effectively in order to answer specific questions in the task
   - being unreflective about choices of methods and the use of the programs
   - not seeing the use of computer programs as an integrated part of learning mathematics
   - very positive beliefs about the use of computers in mathematics as well as in general.

3. **A reflective activity that is characterized by**
   - interpreting the output from the computer programs
   - an explorative and investigating way of working
   - very flexible use of computer programs
   - seeing the use of mathematical computer programs as an integrated part of the learning process in mathematics.
   - self-confidence in relation to mathematics
   - very positive beliefs about mathematics and the use of computers in the process of learning mathematics.

The three types of activities are not meant to describe particular students by labeling them with one of the three types. On the contrary, the objective is to characterize different types of computer based activities that constitute different learning obstacles and possibilities and, therefore calls for different types of support and challenges on the part of the teacher.

It is obvious to see that the uncertain and defensive activity creates a negative feed-back on the learning process. I have no evidence that indicate that this type of activity is more frequent amongst girls, but my interviews indicate that girls with this type of activity as a dominating feature tend to explain their learning problems with their own inability in mathematics and use of computers. Boys, on the other hand, more frequently explain their learning problems by blaming the software or the fact that they have to use computers in mathematics.

The solution focused activity was the dominating for both boys and girls. However, it seems as if the girls were more depending on support and challenge from dialogues with the teacher in order to switch to the reflective type of activity than were the boys. And this seems be true even for the very best performing girls.

I hope that this short presentation will illustrate which type of research questions I think would be worthwhile investigating in relation to a gender perspective on ICT-based mathematics teaching.

Reference

Blomhøj, M. (2001). Villkor för lärande i en datorbaserad matematikundervisning: elevernes användning av avancerade matematikprogram. In Grevholm, B. (ed.) (2001), *Matematikdidaktik – ett nordiskt perspektiv* (pp. 185-217). Lund: Studentlitteratur.