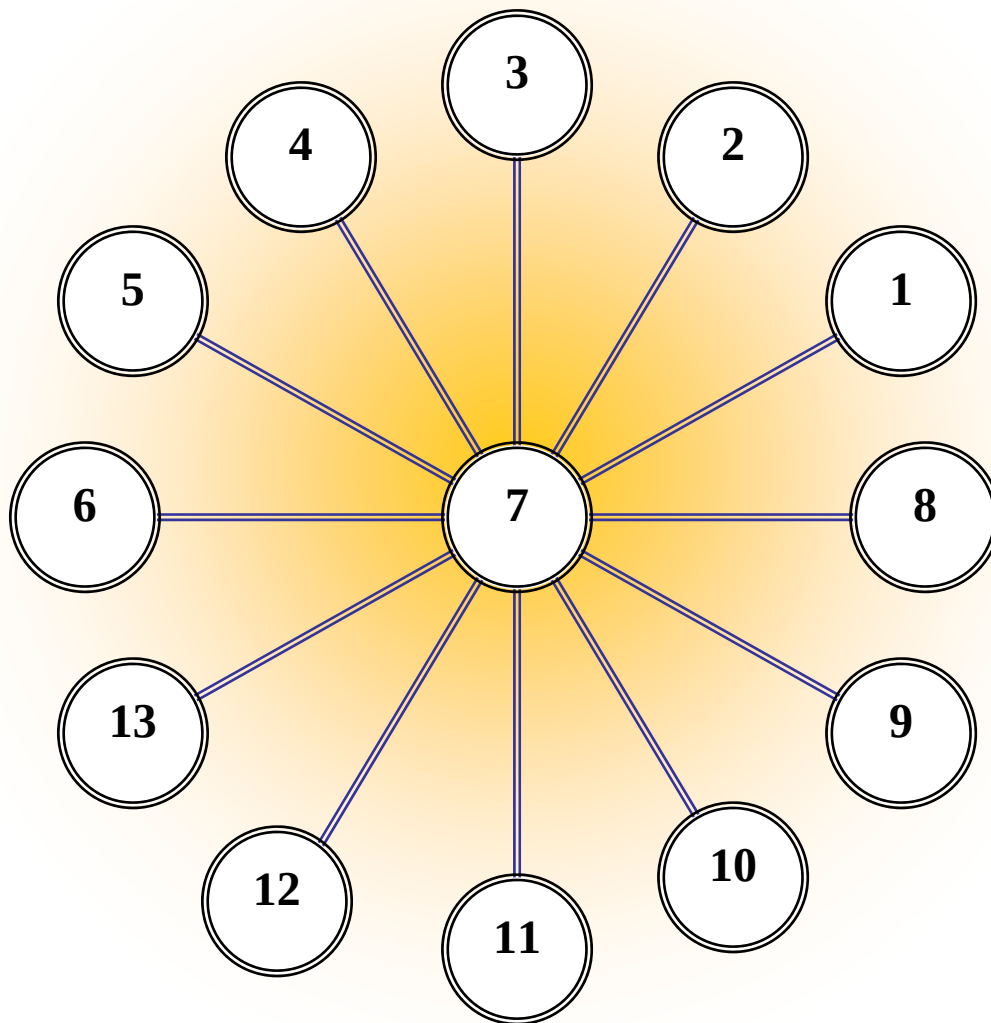


Neville deMestre

Problemløsnings- oppgaver



Oversatt av:
Pål Erik Lauritzen Ekholm

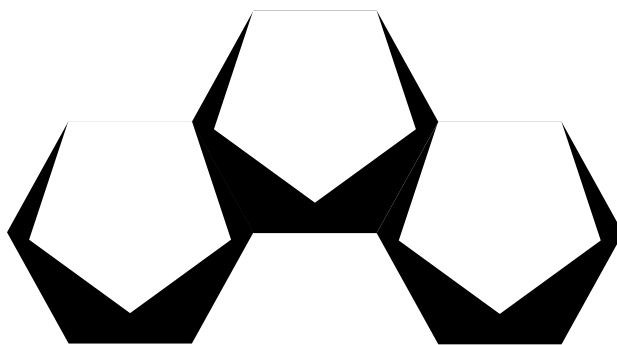


Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

Neville deMestre

Problemløsnings- oppgaver

Praktiske pusle- og problemløsningsoppgaver



Oversatt av:
Pål Erik Lauritzen Ekholm



Matematikksenteret
Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen

2004©Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen
Trykk: NTNU-trykk
2. opplag, 2008
ISBN: 82-471-6022-6

FORORD

Dette heftet er en oversettelse av et australsk hefte skrevet av Neville deMestre. I Australia er dette noen av mange problemløsningsaktiviteter som er brukt på lokale matematikksentra over hele Australia. Dit kan skoleklasser komme for en time eller to av gangen og jobbe med oppgavene. Elevene får nye oppgaver med passende vanskelighetsgrad når de er ferdig med den første.

Felles for alle oppgavene er at de er problemløsningsoppgaver som krever at elevene er aktive og kreative i sine forsøk på å løse oppgaven. Oppgavene i boken kan brukes som kopioriginaler. I tillegg kreves noe helt enkelt utstyr. Det er et viktig poeng at elevene skal ha konkretiseringsmateriell når de jobber med oppgavene. Det gjør at flere har en sjanse til å få dem til. De fleste oppgavene har oppfølgende spørsmål/utvidelser nederst på arket. Dette kan brukes til differensiering, men det er som regel ikke mulig å begynne på disse. Man må starte med den første delen.

Vi anbefaler å lage 10 – 15 kopier til elevene og laminere dem. Da kan de brukes om og om igjen. La elevene jobbe to og to sammen, så får de samtidig øvd på å kommunisere om matematikk. Elevene prøver sammen å forstå hva oppgaven går ut på, og de prøver sammen å finne en løsning.

Oppgavene passer fra 5. klasse til 10. klasse. Med gode oppfølgingsspørsmål, kan mange av dem også bli en utfordring i videregående skole. Det går også an å forenkle oppgavene så de passer til yngre barn enn 5. klasse.

Vi har prøvd ut alle oppgavene på elever i ulike aldre. Oppgaveheftet finnes elektronisk på www.matematikksenteret.no

Oppgavene er oversatt av Pål Erik Ekholm mens han var sivilarbeider ved Nasjonalt senter for matematikk i opplæringen i 2003 – 2004.

Lykke til med spennende aktiviteter fra heftet.

Ingvill Merete Stedøy-Johansen
Faglig leder

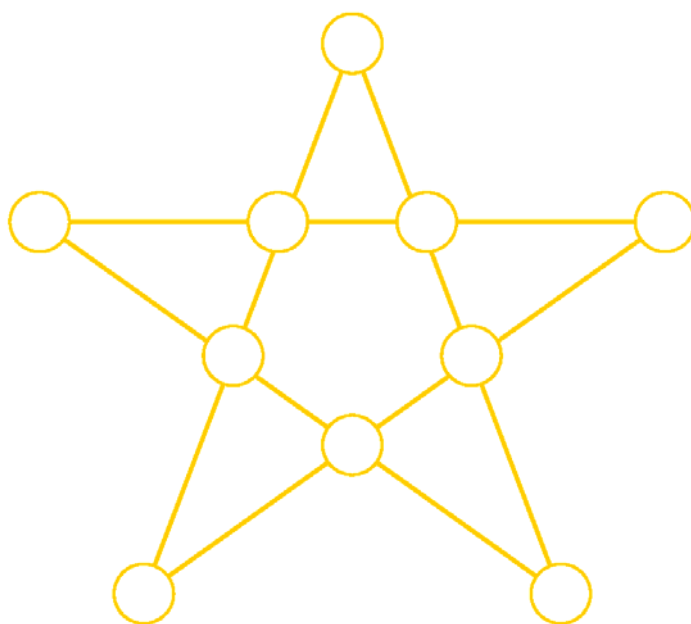
Oppgaveoversikt

- ▶ Addisjonsmysteriet
- ▶ Blinkskudd
- ▶ Brikkene på et brett
- ▶ Brikkespillet
- ▶ Bygninger
- ▶ Den finurlige ruterer
- ▶ Den magiske trekanten
- ▶ Den optimale ruten
- ▶ Det latinske kvadratet
- ▶ Det magiske korset
- ▶ Det magiske kvadratet
- ▶ Digitalklokka
- ▶ Fem ganger
- ▶ Fire og fem kvadrater
- ▶ Fisk på svømmetur
- ▶ Flytt brikkene
- ▶ Flytte parvis
- ▶ Gjerder
- ▶ Hester og høns
- ▶ Husnummer
- ▶ I motsatte hjørner
- ▶ Identiske deler
- ▶ Innhegninger
- ▶ Krystallgitter
- ▶ Kubekombinasjoner
- ▶ Kun to
- ▶ Kvadrater
- ▶ Lag en kube
- ▶ Mellomrom
- ▶ Minusmagi
- ▶ Ombytte
- ▶ Opp ned
- ▶ Overflateareal
- ▶ Pentagon
- ▶ Produkter
- ▶ Pyramider
- ▶ Påfølgende tall
- ▶ Rader og kolonner
- ▶ Regneoperasjoner
- ▶ Rektangler
- ▶ Rundt kvadratene
- ▶ Sett sammen kolonnene
- ▶ Sett sammen kvadrater
- ▶ Sjakkbrett
- ▶ Sjukant
- ▶ Skyskrapere
- ▶ Snuoperasjon
- ▶ Springer på tur
- ▶ Stjerneaddisjon
- ▶ Symmetriske mønster
- ▶ Tall i farger
- ▶ Tallrutene
- ▶ Talltrekanten
- ▶ Tjueèn
- ▶ Tjuefem
- ▶ Totalsummen
- ▶ Tre utsagn
- ▶ Trekanten
- ▶ Trekk for trekk
- ▶ Tårn
- ▶ Åtte siffer



Oppgaver

I alfabetisk rekkefølge



ADDISJONSMYSTERIET

Materiell: 9 brikker merket henholdsvis $x-4$, $x-3$, $x-2$, $x-1$, x , $x+1$, $x+2$, $x+3$ og $x+4$.

Oppgave: Plasser brikkene i rutene nedenfor slik at;

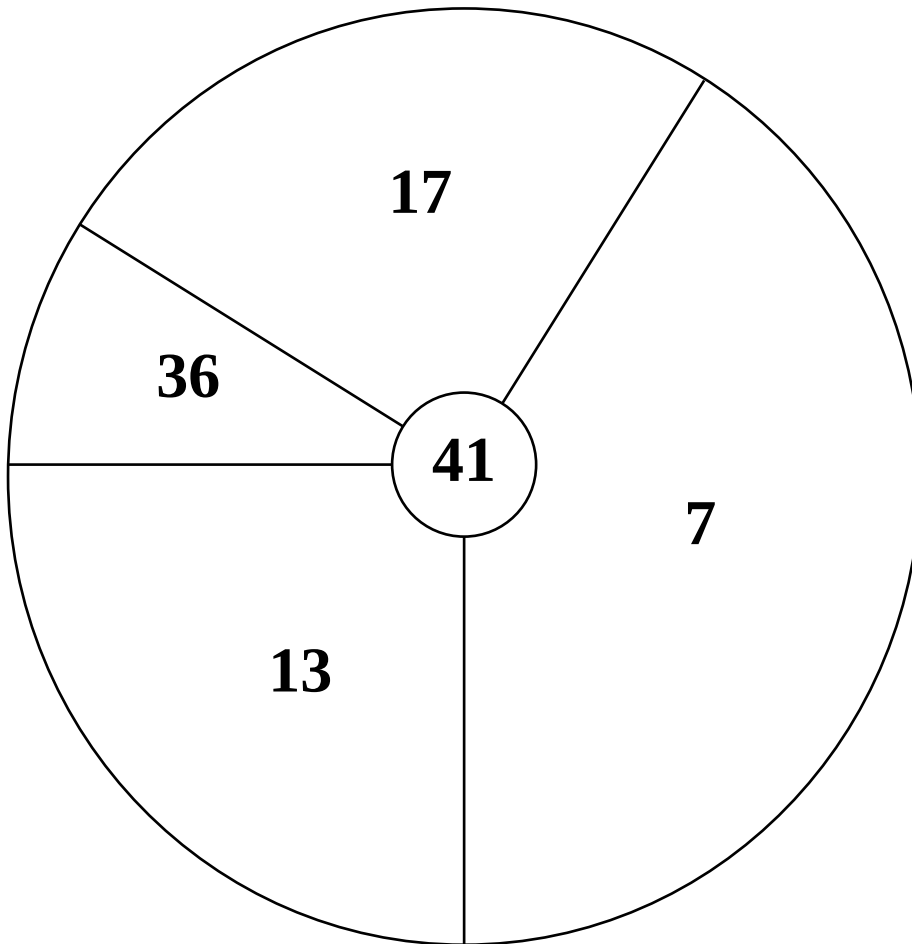
- * Det er en brikke i hvert felt.
- * Summen langs hver rad, kolonne og hoveddiagonal blir den samme.



BLINKSKUDD

Utstyr: 7 brikker.

- Oppgave** (i) Figuren viser et pilspill. På hvor mange måter er det mulig å få nøyaktig 100 poeng?
Bruk 6 piler.



- (ii) På hvor mange måter er det mulig å få nøyaktig 100 poeng dersom 7 piler treffer skiva?

Ekstra: Skriv ned alle poengsummer som er mulige dersom 3 piler treffer skiva.

BRIKKENE PÅ ET BRETT

Materiell: 8 brikker.

Oppgave: Plasser de 8 brikkene i rutenettet nedenfor slik at;

- ✓ Ingen brikker er i det samme feltet,
- ✓ Det er ingen brikker i rutenettets hoveddiagonaler,
- ✓ Det er 1 brikke i hver rad,
- ✓ Det er 1 brikke i hver kolonne.

Ekstra: Greier du å finne en løsning dersom det heller ikke kan være mer enn en brikke i enhver diagonal?

BRIKKESPILLET

Materiell: 10 hvite og 10 svarte brikker.

Oppgave: Velg ut et tilfeldig antall svarte og hvite brikker og legg dem etter hverandre i en rett linje.

Ved å benytte følgende tre regler, fjern brikker to og to om gangen slik at det er igjen minst mulig brikker til slutt.

1. Du kan fjerne 2 svarte brikker hvis det ikke ligger brikker mellom dem.
2. Du kan fjerne 2 hvite brikker hvis det ikke ligger brikker mellom dem.
3. Du kan fjerne 2 svarte brikker hvis det ligger en hvit brikke i mellom dem.

Legg opp brikkene i et nytt mønster for hvert forsøk. Tegn opp startmønsteret og skriv ned hvor mange brikker du sitter igjen med til slutt.

List opp alle mulige utfall.

Ekstra: Erstatt den første regelen med følgende regel;

- ✓ Du kan fjerne 3 svarte brikker hvis det ikke ligger brikker mellom dem.

Hvilke utfall er nå mulige?

BYGNINGER

Materiell: 5 kuber.

Oppgave: En arkitekt ønsker å se for seg bygninger ved hjelp av kuber. Når han setter sammen kubene sørger han for at de sidene som settes sammen dekker hverandre fullstendig.

Ved å sette sammen kubene på forskjellige måter ser han hvordan forskjellige bygninger kan se ut. Han setter også opp noen regler for hva som skal regnes som forskjellige bygninger.

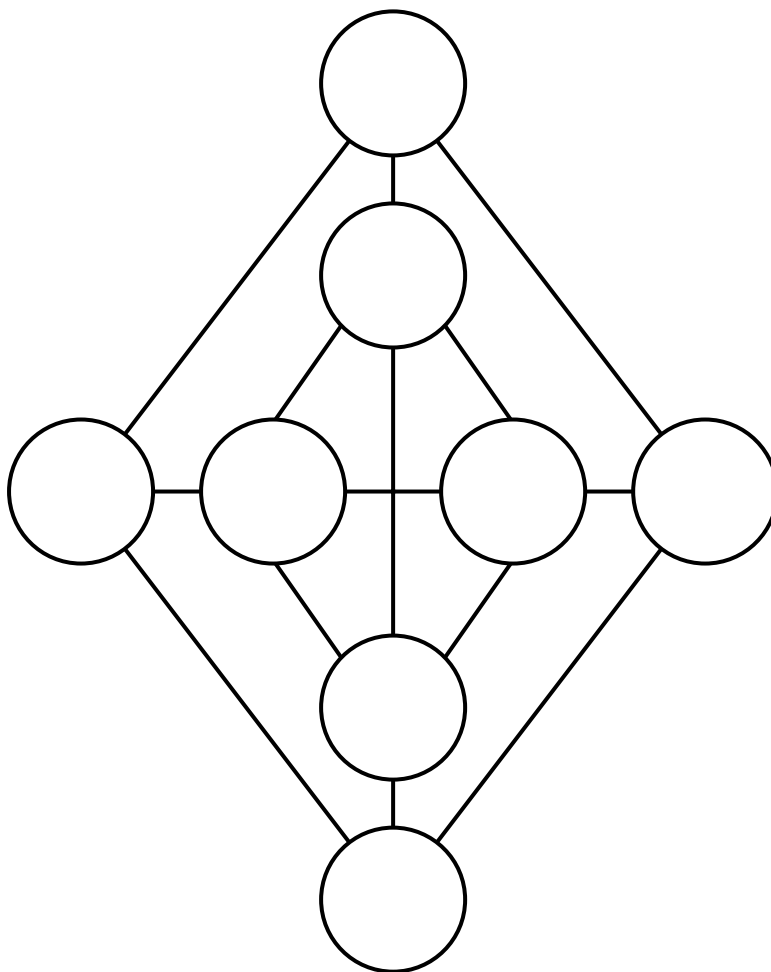
- ✓ **Bygg med forskjellig høyde er forskjellige.**
- ✓ **Dersom et bygg kan være en rotasjon av et annet telles dette som det samme bygget.**
- ✓ **Alle kuber må være støttet opp nedenifra.**

1. Hvor mange forskjellige bygninger kan utformes ved hjelp av 3 kuber?
2. Hvor mange forskjellige bygninger kan utformes ved hjelp av henholdsvis 1, 2, 3, 4 og 5 kuber? Sett opp i en tabell antall kuber sammenlignet med antall bygg.

DEN FINURLIGE RUTEREN

Materiell: 8 brikker merket henholdsvis $x-4$, $x-3$, $x-2$, $x-1$, $x+1$, $x+2$, $x+3$ og $x+4$.

Oppgave:



Plasser en brikke i hvert felt slik at hvis de legges sammen;

- ✓ rundt den store ruter
- ✓ rundt den lille ruter
- ✓ langs den rette horisontale linjen →
- ✓ langs den rette vertikale linjen ↑

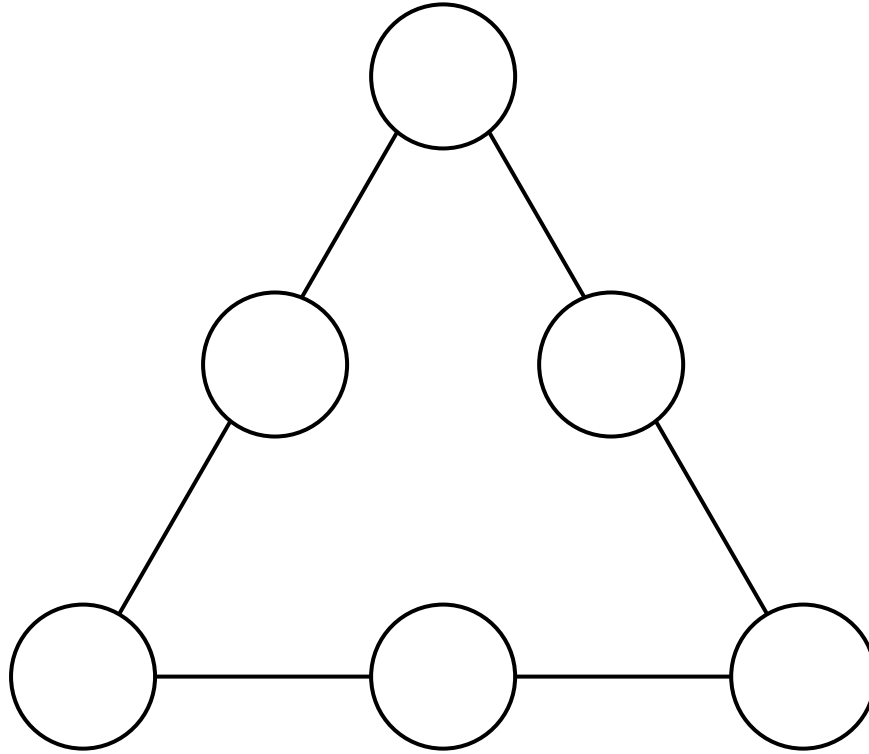
så vi du få den samme summen.

Hva er denne summen?

DEN MAGISKE TREKANTEN

Materiell: 6 brikker merket henholdsvis x , $x+1$, $x+2$, $x+3$, $x+4$ og $x+5$.

Oppgave:



Plasser en brikke i hver sirkel slik at summen langs hver sidekant blir $3x + 6$.

Det er mulig å bytte om på brikkene slik at sidekantene får andre felles summer. Finn alle disse summene.

DEN OPTIMALE RUTEN

Materiell: 1 spillebrikke.

Oppgave: Et gruvefelt er inndelt i et 7 x 11 rutenett. Hver rute er gitt en verdi alt etter hvor store forekomster av gull man antar finnes der.
Start på toppen og flytt nedover. Brikken kan flyttes horisontalt, vertikalt eller diagonalt. Legg sammen tallene i hvert felt du er innom. Du kan bare benytte tre tall (for eksempel toere, firere og seksere). Finn den reiseruten som gir høyest poengsum.

1	2	3	4	5	3	6
6	3	5	1	2	4	1
2	5	2	3	5	6	2
3	6	3	4	1	4	6
4	3	4	6	5	3	4
3	6	5	3	2	5	1
6	4	1	2	4	3	4
2	3	5	6	3	5	6
1	6	2	3	4	3	4
3	4	1	6	3	2	5
6	1	5	3	6	4	2

Ekstra: De samme reglene som ovenfor, bare at nå er det ikke tillatt å flytte diagonalt.

DET LATINSKE KVADRATET

Materiell: 16 fargede kvadratiske brikker; 4 røde, 4 gule, 4 blå og 4 grønne.

Oppgave: Et latinsk kvadrat er et farget rutenett som kun inneholder en farge av hver sort i hver rad og kolonne. For eksempel ser et 2x2 latinsk kvadrat slik ut:

Blå	Rød
Rød	Blå

- ✓ Lag et latinsk kvadrat på 3x3 brikker, der du benytter 3 ulike farger.
- ✓ Lag et latinsk kvadrat på 4x4 brikker, der du benytter 4 ulike farger.

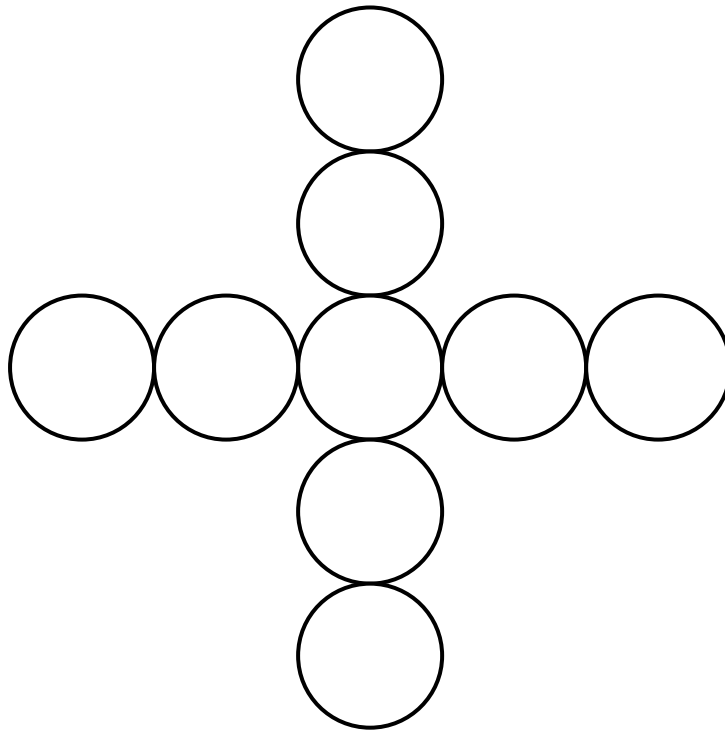
Ekstra: Hvor mange forskjellige latinske kvadrater med størrelse 4x4 kan lages ved å benytte disse fargene?

Kan du lage et slikt 4x4 kvadrat der det i tillegg bare er forskjellige farger langs de to hoveddiagonalene?

DET MAGISKE KORSET

Materiell: 9 brikker merket henholdsvis $x-4$, $x-3$, $x-2$, $x-1$, x , $x+1$, $x+2$, $x+3$ og $x+4$.

Oppgave:



- ✓ Plasser en brikke i hver sirkel slik at summen vertikalt ($\downarrow$), blir lik summen horisontalt ($\rightarrow$). Prøv å få denne summen til å bli $5x + 2$.
- ✓ Det finnes flere måter å plassere brikkene på slik at den vertikale og horisontale summen blir den samme. Finn alle disse summene.

DET MAGISKE KVADRATET

Materiell: 10 brikker merket med tallene 6, 8, 9, 10, 12, 13, 14, 15, 16 og 17.

Oppgave: Plasser brikkene i hvert av de ledige feltene slik at summen langs hver rad, kolonne og hoveddiagonal blir 42.

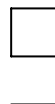
			5
	11	18	4
		7	
		3	



DIGITALKLOKKA

Materiell: 7 fyrstikker.

Oppgave: Legg opp fyrstikker på bordet slik at de ser ut som digitale tall. F. eks. vil tallet 9 se slik ut og bestå av 6 fyrstikker:



- ✓ Skriv opp etter hvert hvor mange fyrstikker som trengs for å lage de forskjellige tallene fra 0 til 9. Før inn svarene i en tabell som den nedenfor.
- ✓ Hvor mange fyrstikker må til for å vise tiden 12:58?
- ✓ Hvilket tidspunkt på dagen krever flest fyrstikker? Hvor mange?
- ✓ Hvilket tidspunkt på dagen krever færrest fyrstikker? Hvor mange?

Tall	Klokketall	Antall fyrstikker som må til
Null		
En		
To		
Tre		
Fire		
Fem		
Seks		
Sju		
Åtte		
Ni		



FEM GANGER

Materiell: Tolv brikker påskrevet tallene fra en til tolv.

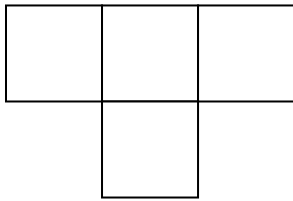
Oppgave: Plasser en brikke i hvert felt i rutene nedenfor slik at summen av tallene plassert på de grå feltene er $\frac{1}{5}$ av summen av de andre tallene.

Ekstra: Plasser en brikke i hver rute, slik at summen av tallene på de grå feltene er halvparten av summen av de andre tallene.

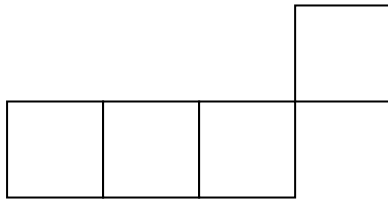
FIRE OG FEM KVADRATER

Materiell: 5 kvadratiske brikker.

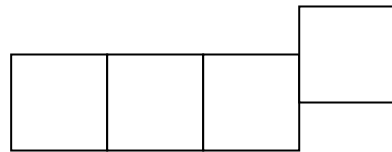
Oppgave: Kvadratene skal legges sammen side ved side og danne ulike figurer. Et kvadrat skal dele en hel side med minst et annet kvadrat.



(Tillatt)



(Ikke tillatt)



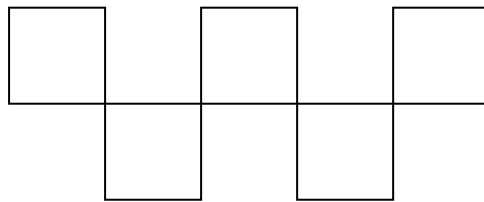
(Ikke tillatt)

Hvor mange ulike figurer kan du lage ved hjelp av 4 kvadrater?

Hvor mange ulike figurer kan du lage ved hjelp av 5 kvadrater?

Tegn opp de ulike alternativene.

Ekstra: Legg kvadratene sammen hjørne mot hjørne. Vinkelen mellom kvadratene skal være rett som vist på figuren nedenfor:



Hvor mange ulike figurer kan du lage med 4 kvadrater?

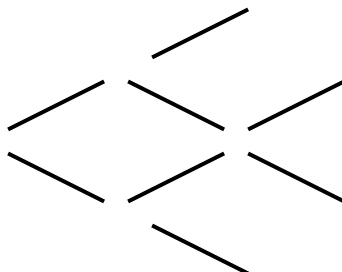
Hvor mange ulike figurer kan du lage med 5 kvadrater?

Tegn opp de ulike alternativene.

FISK PÅ SVØMMETUR

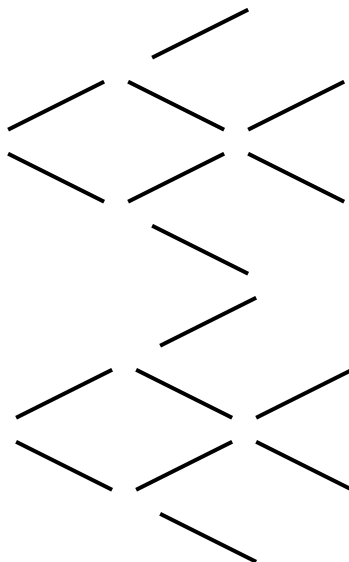
Materiell: 16 fyrstikker.

Oppgave: Legg opp 8 av fyrstikkene i en formasjon som vist på figuren nedenfor:



- (i) Flytt på 4 av fyrstikkene slik at det ser ut som om fisken svømmer i motsatt retning.
- (ii) Flytt på 3 av fyrstikkene slik at det ser ut som om fisken svømmer i motsatt retning.

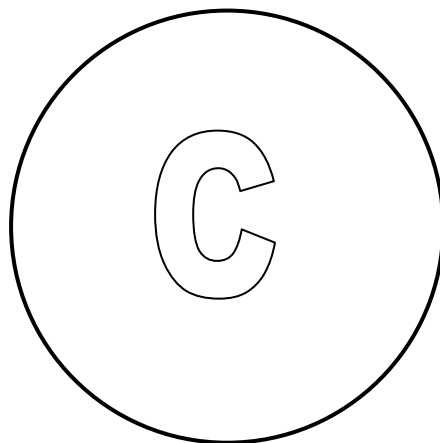
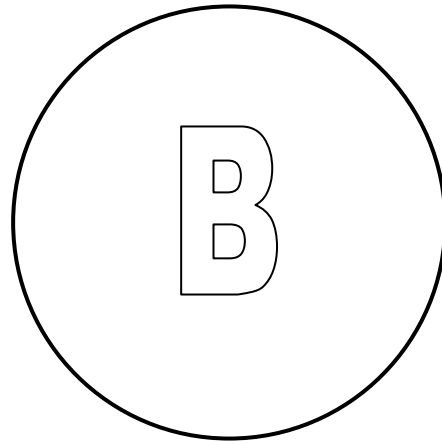
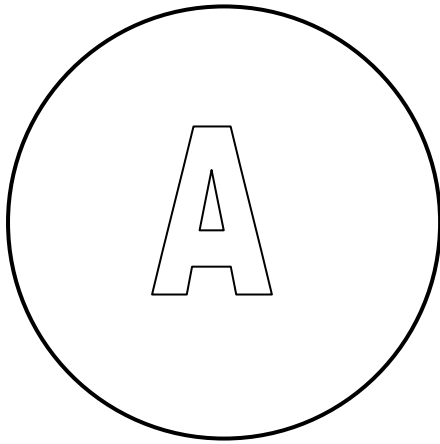
Ekstra: Legg opp alle fyrstikkene i en formasjon på to fisker som vist på figuren nedenfor. Flytt på fem av fyrstikkene slik at det ser ut som om begge fiskene svømmer i motsatt retning.



FLYTT BRIKKENE

Materiell: 36 brikker.

Oppgave: Legg 9 brikker i felt A, 3 i felt B og 24 i felt C.



Etter følgende regler skal du forsøke å flytte brikker slik at det etter 3 trekk er 12 brikker i hver sirkel.

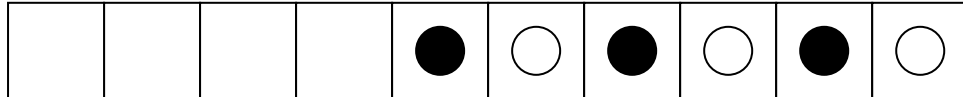
- Regler:**
- * Antall brikker som kan flyttes til en sirkel skal være likt det antall brikker som fra før finnes i sirkelen.
 - * Et trekk er å flytte et bestemt antall brikker fra en sirkel til en annen.



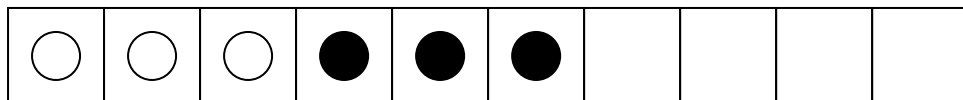
FLYTTE PARVIS

Materiell: 3 svarte og 3 hvite brikker.

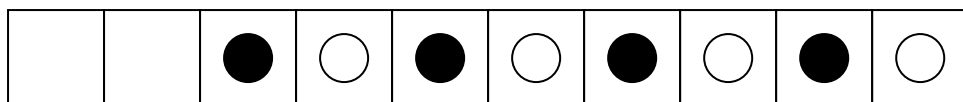
Oppgave: Plasser brikkene i et rutenett som vist på figuren under:



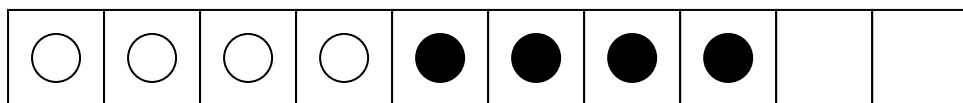
Brikkene kan kun flyttes to og to og må ligge ved siden av hverandre.
Du kan ikke snu rekkefølgen mellom dem. Greier du på tross av disse begrensningene å flytte om på brikkene i rutenettet til de ligger slik:



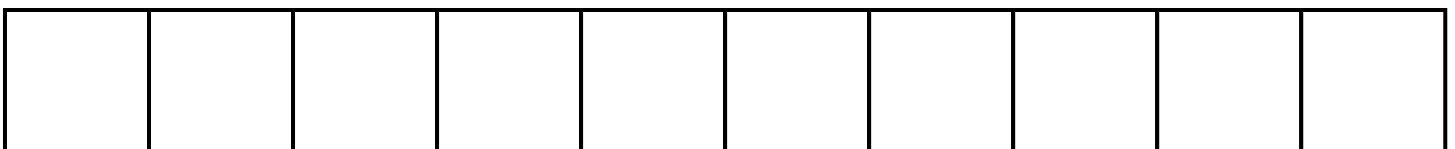
Ekstra: Endre dette mønsteret



til rekkefølgen under, ved å bruke de samme reglene:



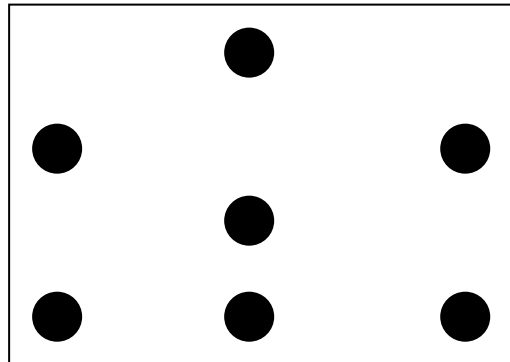
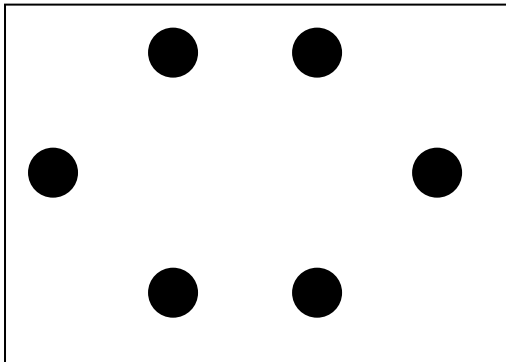
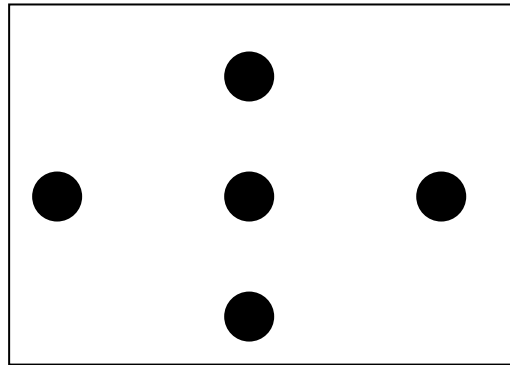
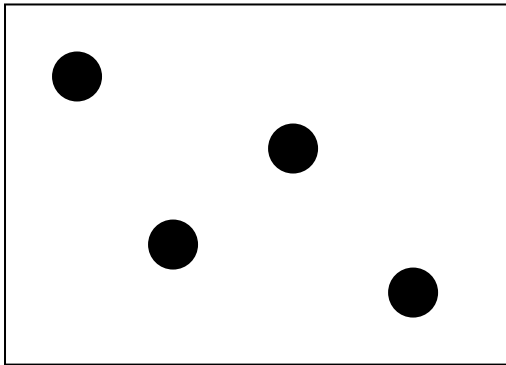
Bruk spillebrettet nedenfor



GJERDER

Materiell: 3 pinner.

Oppgave: Feltene nedenfor inneholder henholdsvis 4, 5, 6 og 7 prikker. Greier du å plassere 3 pinner i hvert felt slik at prikkene havner i atskilte områder og ingen områder blir stående tomme?



HESTER OG HØNS

Materiell: 40 fyrstikker og 24 brikker.

Oppgave: På gården til Anna Lena er det hester og høns. Hun sier at dyrene til sammen har 40 ben og 24 øyne.

- ✓ La fyrstikkene svare til antall ben og brikker til antall øyne. Finn ut hvor mange hester og hvor mange høns Anna Lena har på gården.
- ✓ La x stå for antall hester og y stå for antall høns. Kan du finne en ligning som beskriver det totale antall ben?
- ✓ Sett opp en ligning ved hjelp av x og y som beskriver det totale antall øyne. Løs de to ligningene og sjekk om svaret blir det samme som løsningen med fyrstikker og brikker.

Ekstra: Anta at et ukjent antall hoggormer sniker seg inn på gården. Antall øyne og ben er det samme som før. Hvor mange hester høns og ormer er det nå på gården?

HUSNUMMER

Materiell: 4 brikker påført tallene 2, 4, 4 og 6.

Oppgave: Hvilke tresifrede husnummer kan settes sammen av brikkene 2, 4 og 6?

Hvilke tresifrede husnummer kan settes sammen av brikkene 2, 4 og 4?



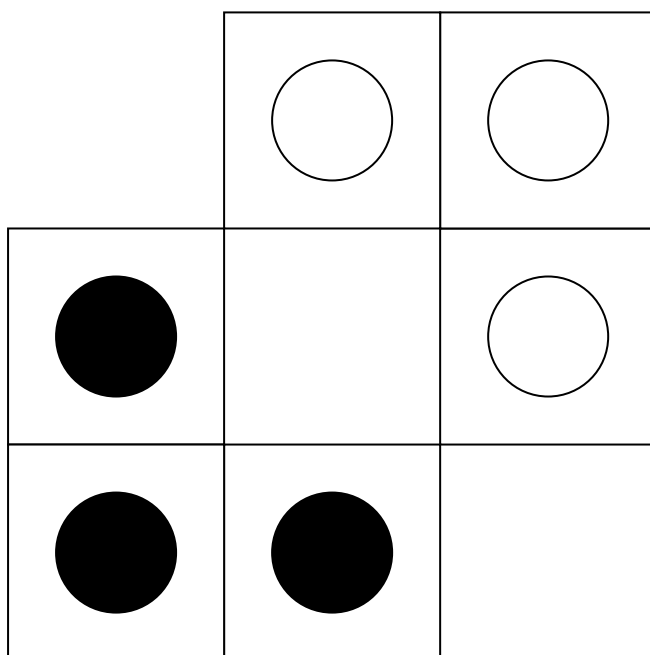
I MOTSATTE HJØRNER

Materiell: 3 svarte og 3 hvite brikker.

Oppgave: Plasser brikkene i feltene som vist nedenfor. Brikkene kan flyttes etter følgende regler;

- ✓ Kun en brikke kan flyttes om gangen.
- ✓ En brikke kan kun flyttes langs en rad eller kolonne (altså ikke diagonalt).
- ✓ En brikke kan flyttes til en nærliggende ledig rute.
- ✓ En brikke kan hoppe over en annen brikke dersom denne er av en annen farge og ruten bak er ledig.

Oppgaven går ut på å få svarte og hvite brikker til å bytte plass på så få trekk som mulig.



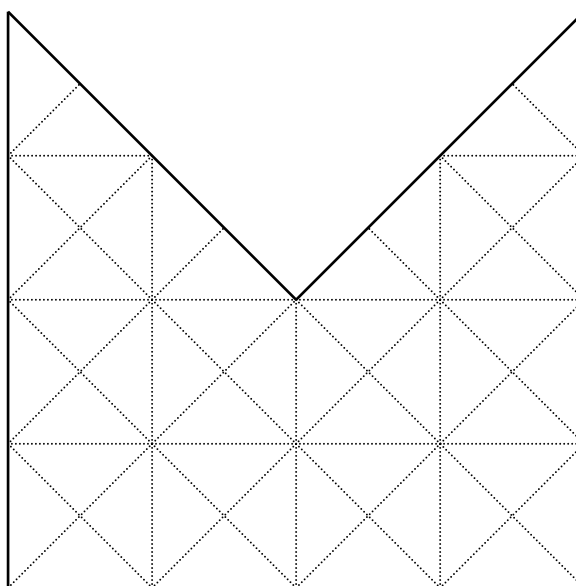
IDENTISKE DELER

Materiell: 10 fyrstikker

Oppgave: To deler er identiske dersom;

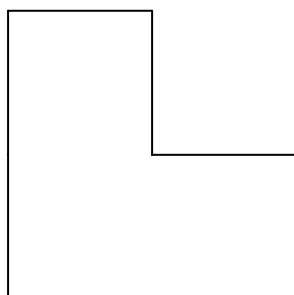
- ✓ De kan forskyves slik at de dekker hverandre fullstendig, eller
- ✓ vippes rundt og deretter forskyves til å dekke hverandre fullstendig.

Betrakt figuren nedenfor:



1. Bruk noen av fyrstikkene til å dele figuren i 2 identiske deler.
2. Del figuren opp i 3 identiske deler.
3. Del figuren opp i 6 identiske deler.
4. Del figuren opp i 8 identiske deler.

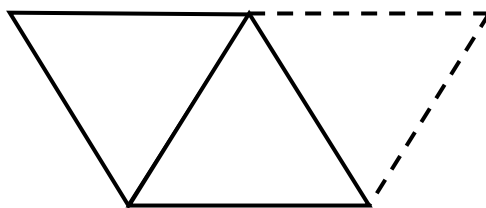
Ekstra: Greier du å dele denne figuren opp i fire identiske deler?



INNHEGNINGER

Materiell: 23 fyrstikker.

Oppgave: En dyrepasser i zoologisk hage kom på en lur måte å bygge nye innhegninger til en stadig voksende dyrebestand. For å lage en ny og like stor innhegning bygger man bare på en gammel innhegning som vist på figuren nedenfor.



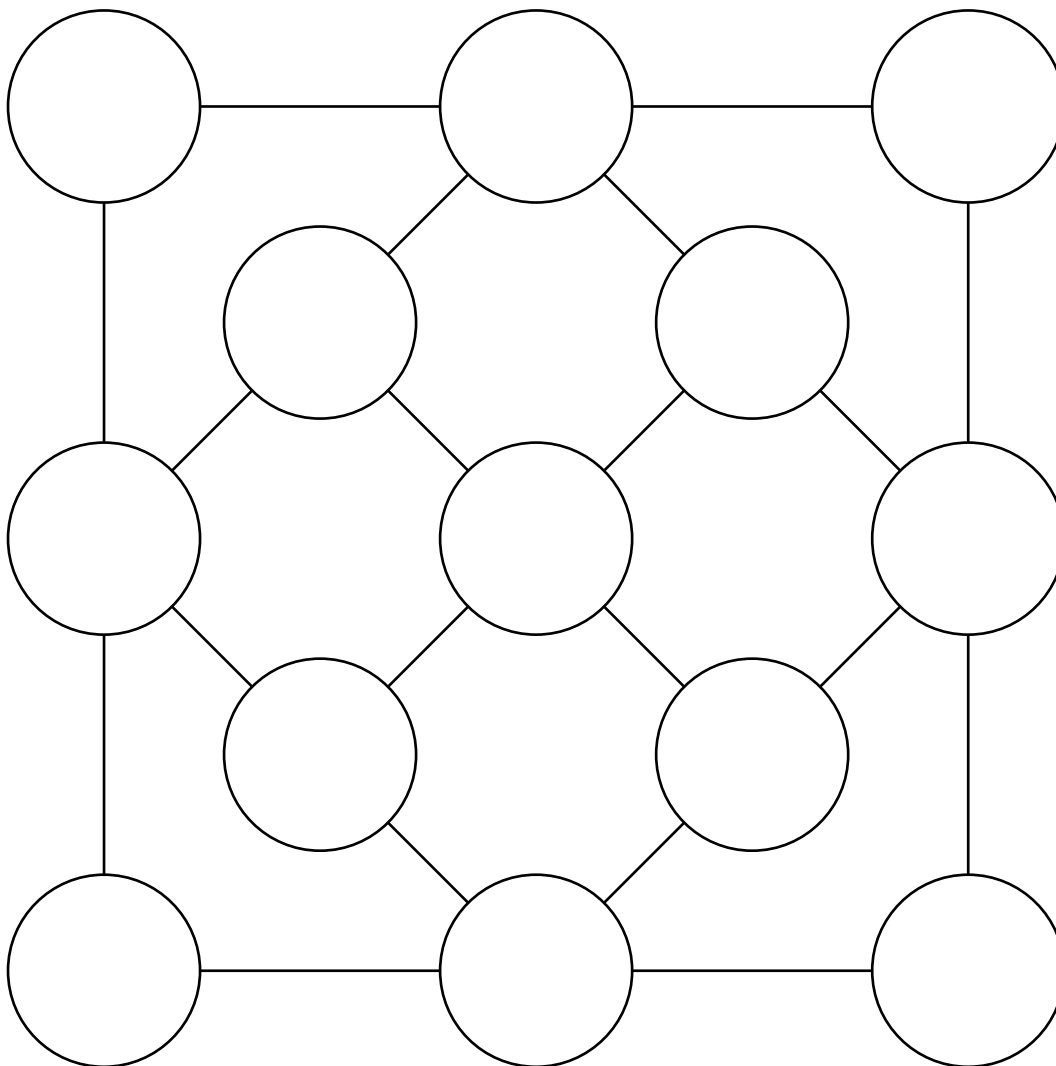
1. Bruk fyrstikker til å finne ut hvor mange gjerdelengder som trengs til å bygge 5 innhegninger i rett linje.
2. Hvor mange gjerdelengder må til for å lage 6 innhegninger?
3. Hvor mange gjerdelengder må til for å lage 7 innhegninger?
4. Hva er det største antall innhegninger i en rett linje som kan bygges med 23 gjerdelengder?

Ekstra: Hvor mange gjerdelengder trengs til n innhegninger i rett linje?
Hvor mange innhegninger i rett linje kan lages ved hjelp av p gjerdelengder?

KRYSTALLGITTER

Materiell: 13 brikker påskrevet tallene 1, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12 og 15.

Oppgave: Figuren nedenfor representerer atomstrukturen i en krystall. Atomene er knyttet sammen av 10 rette linjer, 3 atomer langs hver linje.

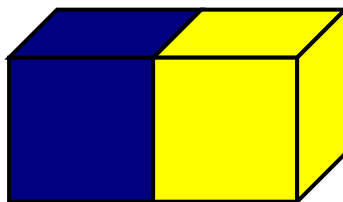


Plasser 1 brikke i hvert felt slik at summen langs hver linje med tre atomer blir 20.

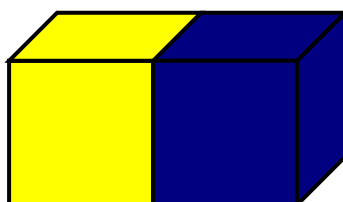
KUBEKOMBINASJONER

Materiell: 5 kuber i ulike farger.

Oppgave: En kombinasjon av 2 kuber vil si at to kuber i forskjellige farger er satt ved siden av hverandre slik at de deler en felles side. Rekkefølgen på fargene er likegyldig slik at

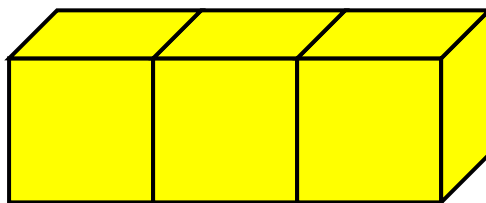


er den samme kombinasjonen som



1. Hvor mange kombinasjoner av 2 kuber kan settes sammen når en benytter 3 ulike farger?
2. Hvor mange kombinasjoner av 2 kuber kan settes sammen når en benytter 4 ulike farger?
3. Hvor mange kombinasjoner av 2 kuber kan settes sammen dersom en benytter 5 farger?

Ekstra: Hvor mange kombinasjoner av 3 kuber kan settes sammen på formen

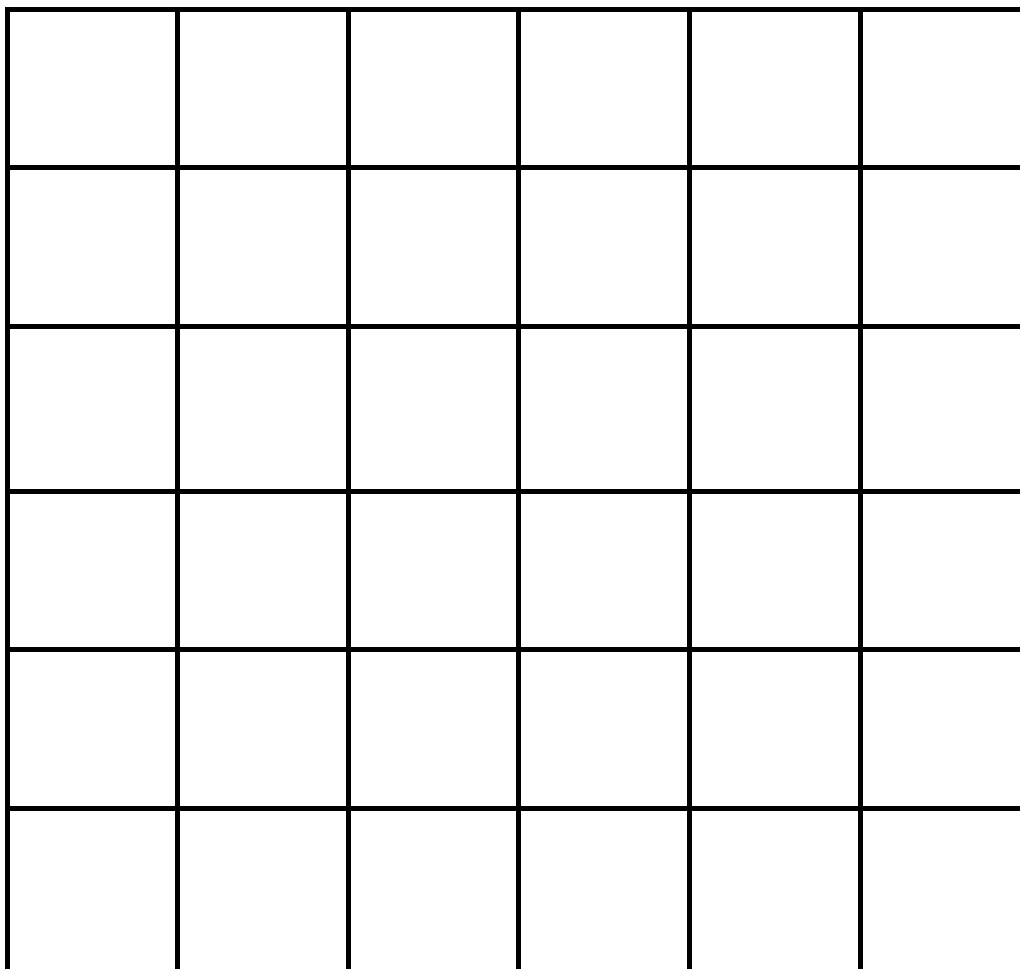


når en benytter 5 kuber med forskjellige farger?

KUN TO

Materiell: 12 brikker.

Oppgave: Plasser de 12 brikkene i rutenettet nedenfor slik at det kun ligger 2 brikker i hver rad, kolonne og hoveddiagonal.

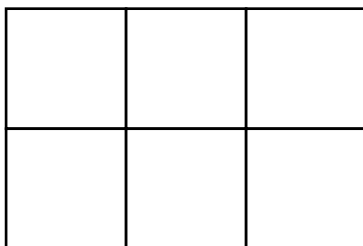


KVADRATER

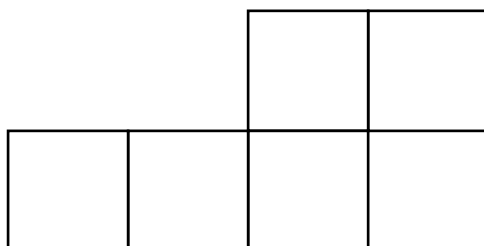
Materiell: 17 fyrstikker.

Oppgave:

- (i) Legg fyrstikkene slik at de danner 6 kvadrater som vist på figuren nedenfor. Flytt deretter tre av fyrstikkene til andre posisjoner slik at de danner 5 kvadrater av samme størrelse.



- (ii) Legg fyrstikkene slik at de danner 5 kvadrater som vist på figuren nedenfor. Flytt deretter to av fyrstikkene til andre posisjoner slik at de danner 4 kvadrater av samme størrelse.

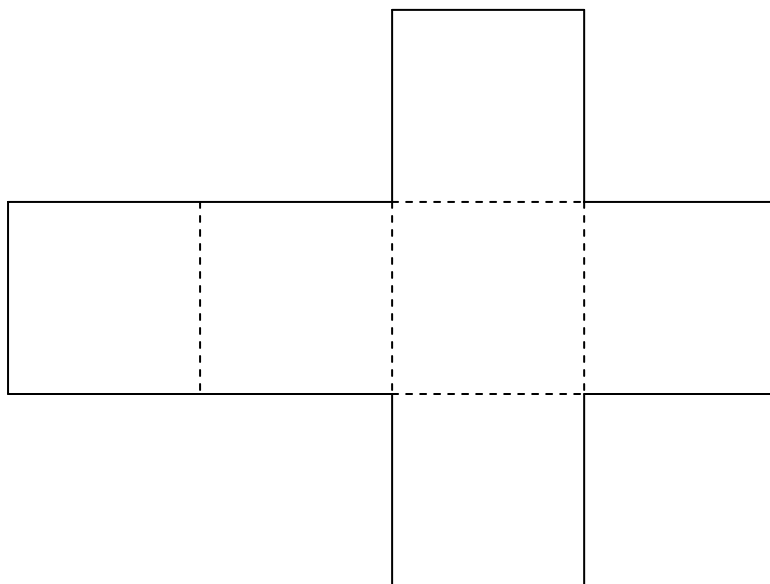


Ekstra: Lag dine egne fyrstikkoppgaver.

LAG EN KUBE

Materiell: Papir, saks og tape.

Oppgave: Tegn av figuren under på papir og klipp den ut. Brett langs de stiplede linjene. Tape den sammen til en kube.



Spørsmål:

- ✓ Rutenettet ovenfor er satt sammen av 6 kvadratiske ruter. Kunne rutene vært satt sammen på andre måter, slik at det fortsatt hadde vært mulig å brette sammen en kube? Tegn opp disse rutenettene.
- ✓ Tegn også opp alle seksdelte rutenett som ikke kan brettes sammen til en kube.

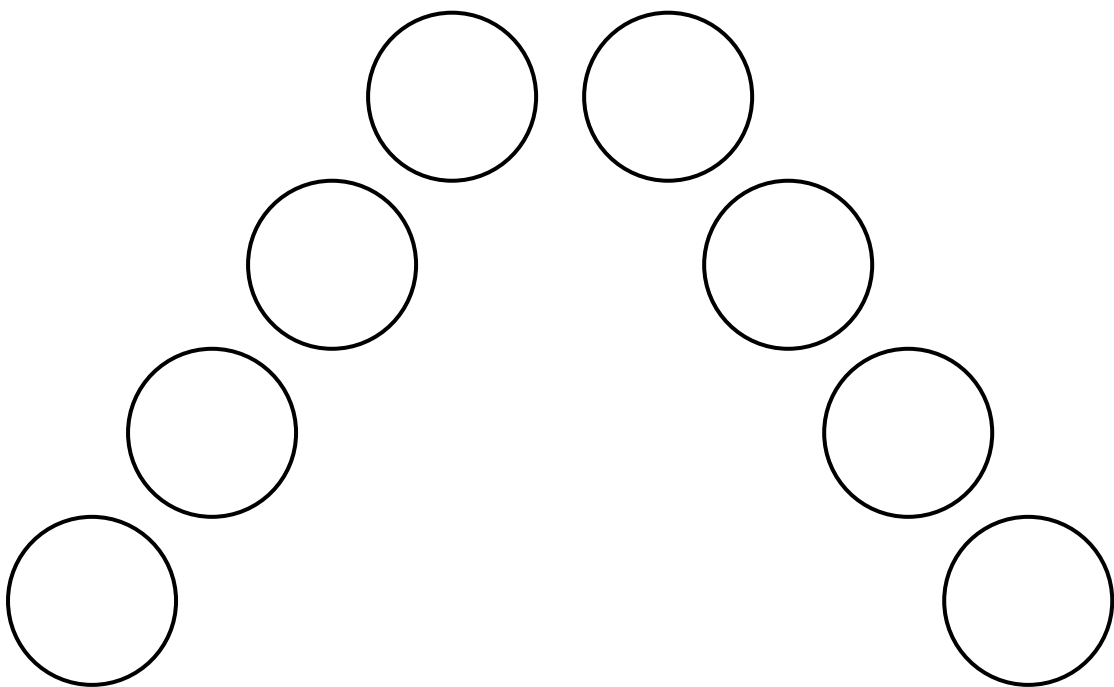


MELLOMROM

Materiell: 2 røde, 2 blå, 2 gule og 2 grønne runde brikker.

Oppgave: Plasser brikkene i sirklene nedenfor slik at følgende fire betingelser er oppfylt:

- ✓ Det ligger en brikke mellom de røde brikkene.
- ✓ Det ligger to brikker mellom de blå.
- ✓ Det ligger tre brikker mellom de gule.
- ✓ Det ligger fire brikker mellom de grønne.



MINUSMAGI

Materiell: 6 brikker påskrevet tallene 3, 5, 6, 7, 8 og 9.

Oppgave: Plasser brikkene i de åpne feltene nedenfor slik at du får samme svar dersom;

- ✓ Tallet i midten av en rad trekkes fra summen av det første og siste tallet i raden.
- ✓ Tallet i midten av en kolonne trekkes fra summen av det første og siste tallet i kolonnen.
- ✓ Tallet i midten av kvadratet trekkes fra summen av første og siste tall i hver hoveddiagonal.

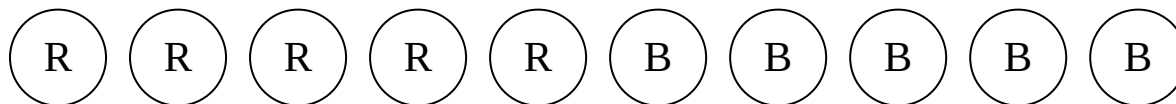
2	1	4



OMBYTTE

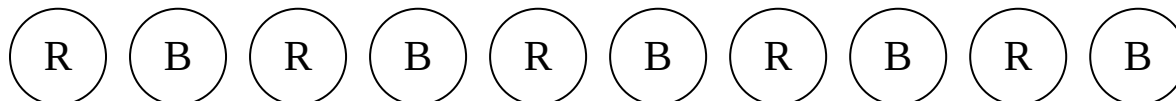
Materiell: 6 røde og 6 blå brikker.

Oppgave: (i) Plasser 5 røde og 5 blå brikker på rad som vist på figuren nedenfor.



Et ombytte har funnet sted når to brikker som ligger ved siden av hverandre har byttet plass.

Hva er det minste antall ombytter som trengs for å få brikkene til å ligge i følgende posisjon?



(ii) Plasser nå 6 røde og 6 blå brikker som vist på figuren nedenfor.



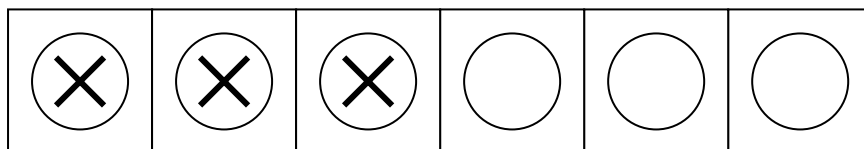
Hva er det minste antall ombytter som skal til for at brikkene skal ligge annenhver rød og blå?

Ekstra: Hvordan ville svaret blitt dersom brikkene lå i sirkel til å begynne med?

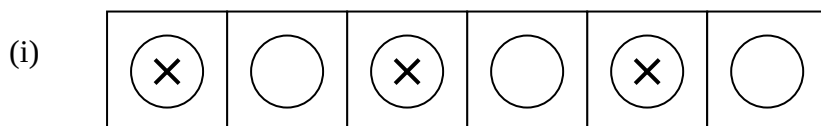
OPP NED

Utstyr: 6 brikker, blank på den ene siden og et kryss på den andre.

Oppgave: Legg brikkene i følgende startposisjon:

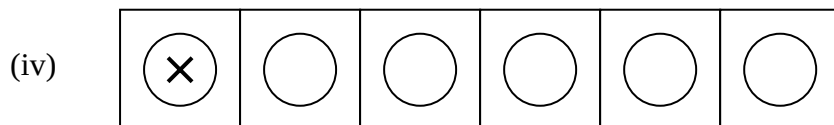
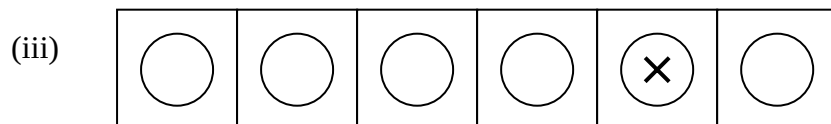
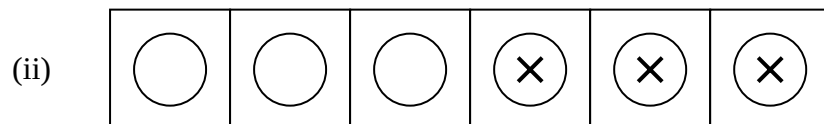


To brikker som ligger ved siden av hverandre flyttes opp ned samtidig. Kan du få brikkene til å ligge slik

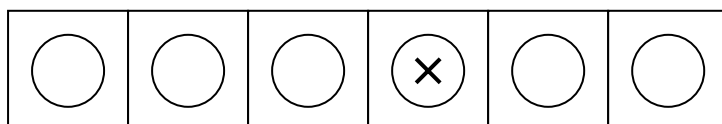


på tre trekk?

Flytt brikkene tilbake til utgangspunktet igjen. Kan du få plassert brikkene på følgende måter ved å benytte 3 trekk?



Ekstra: Kan du snu brikkene fra startplasseringen til denne plasseringen;



på to trekk?

OVERFLATEAREAL

Materiell: 7 kuber.

- Oppgave:**
- (i) Sett sammen 4 kuber slik at formen de utgjør, har så lite overflateareal som mulig.
 - (ii) Sett sammen 7 kuber slik at overflatearealet blir minst mulig. Hvor stort blir dette arealet?

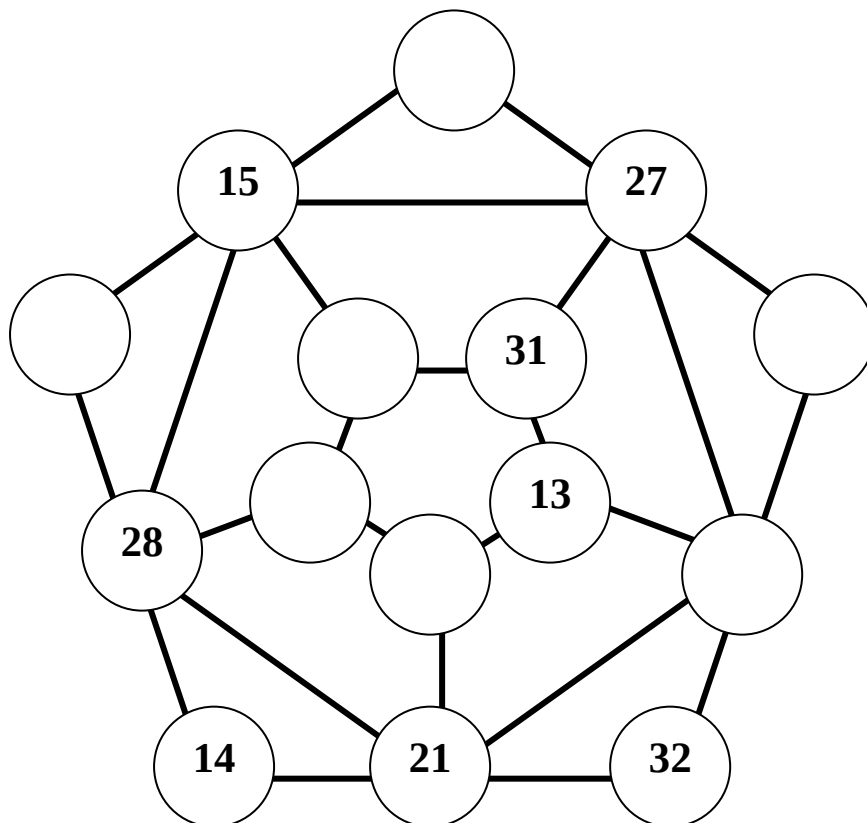
Ekstra: Tegn opp en tabell med to kolonner, der den første kolonnen viser antall kuber, og den andre viser det minste mulige overflatearealet. Fyll inn i tabellen det minste mulige overflatearealet for henholdsvis 1, 2, 3, 4, 5, 6 og 7 kuber.



PENTAGON

Materiell: 7 brikker nummerert 8, 9, 12, 19, 20, 25, og 26.

Oppgave: Et pentagon er en femkant. Kan du finne de 8 femkantene i figuren under?



Pentagonbygningen i Washington i USA har et design som ligner det på figuren over. Korridorene er rette linjer som deler bygningen inn i 8 forskjellige femkanter.

Vakter skal plasseres ut i hvert hjørne av de forskjellige femkantene, slik at det er 100 vakter tilsammen rundt hver femkant. Unntaket er den største femkanten, der det til sammen er 200 vakter.

Antall vakter på 8 av vaktpostene er skrevet inn på figuren over. Plasser brikkene i de tomme feltene slik at det vises hvor mange vakter det er i hvert hjørne.

PRODUKTER

Materiell: 6 brikker nummerert fra 1 til 6.

Oppgave: 1. Begynn med brikkene fra 1 til 4.
Plasser dem i boksene nedenfor slik at multipliseringen blir riktig. Det kan godt være flere tall i hver boks.

=

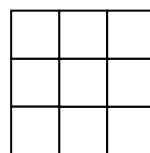
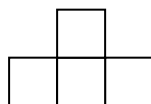
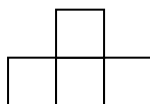
2. Gjenta oppgaven med brikkene fra 1 til 5.
3. Til slutt løser du oppgaven med brikkene fra 1 til 6.

Ekstra: Kan denne oppgaven løses med brikker nummerert fra 1 til 7?

PYRAMIDER

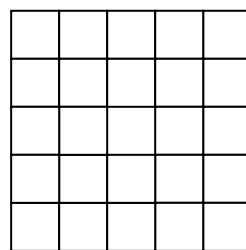
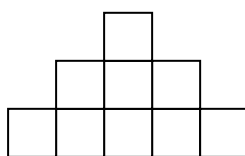
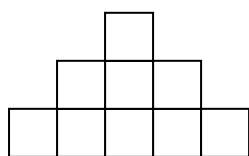
Materiell: 35 kuber.

Oppgave: 1. En to etasjers pyramide er vist forfra, fra siden og ovenifra i figurene nedenfor.



Bruk klossene til å bygge en slik pyramide og legg merke til hvor mange kuber som trengs.

2. En tre etasjers pyramide er vist forfra, fra siden og ovenifra i figurene nedenfor.



Bygg en slik pyramide og noter ned hvor mange klosser som må til.

3. Hvor mange kuber må til for å bygge en fem etasjers pyramide?

4. Hvor mange kuber trengs for å bygge en n etasjer høy pyramide?



PÅFØLGENDE TALL

Materiell: 9 kvadratiske brikker nummerert 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15 og 17.

Oppgave: Legg opp brikkene ved siden av hverandre på denne måten:

1	7	13
3	9	15
5	11	17

- ✓ Hva er summen langs hver rekke?
- ✓ Hva er summen langs hver kolonne?
- ✓ Hva er summen langs hver hoveddiagonal?
- ✓ Flytt en brikke til en annen kolonne slik at summen langs hver kolonne blir påfølgende tall.

Ekstra: Flytt om på brikkene slik at de fortsatt ligger i et 3x3 rutenett, men nå skal summen langs hver rad, kolonne og hoveddiagonal være den samme.

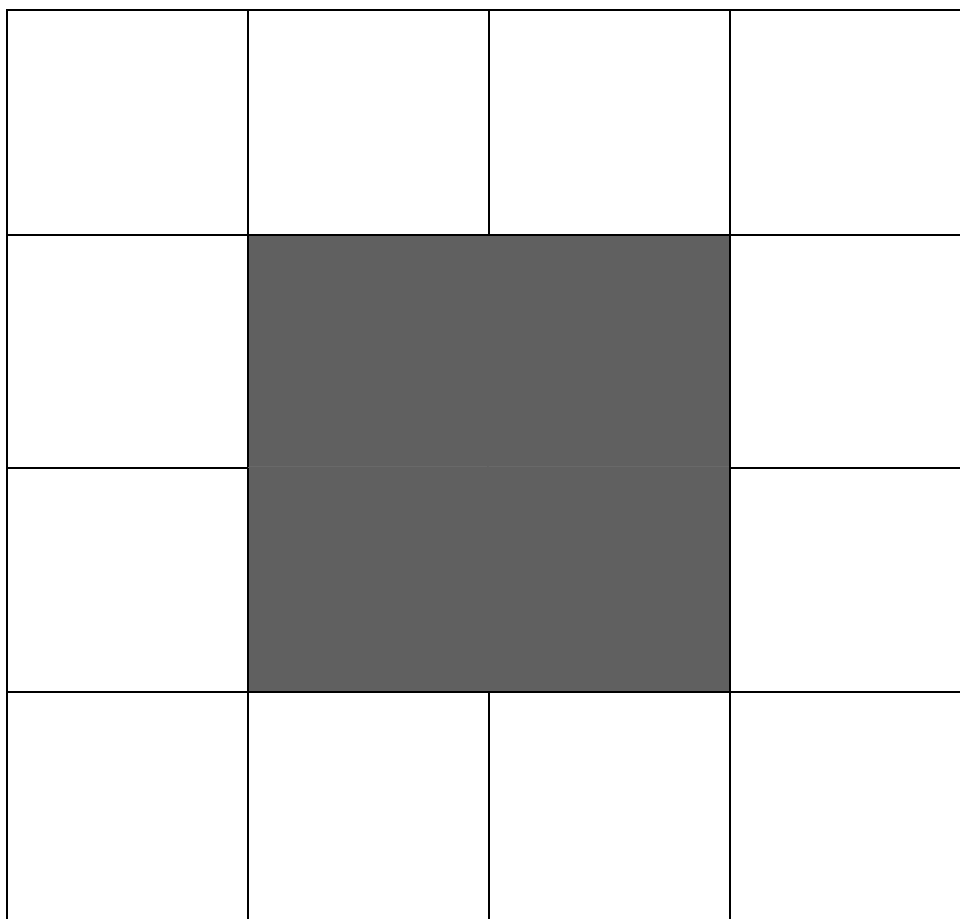


RADER OG KOLONNER

Materiell: 12 brikker.

Oppgave Alle 12 brikkene skal plasseres i de 12 kvadratiske feltene nedenfor. Det kan godt være mer enn en brikke i hvert felt.

- ✓ Legg de 12 brikkene slik at hver rad og hver kolonne inneholder 4 brikker.
- ✓ Deretter legger du brikkene slik at det er 5 brikker i hver rad og kolonne.
- ✓ Så legger du brikkene slik at det er 6 brikker i hver rad og kolonne.
- ✓ Kan brikkene legges slik at det er 3 av dem i hver rad og kolonne?



REGNEOPERASJONER

Materiell: 12 regnebrikker, hvorav 3 med gangetegn, 3 med deleetegn, 3 med plusstegn og 3 med minustegn.

Oppgave: Plasser brikkene i de mørke feltene nedenfor slik at regnestykkene stemmer.
(Husk at gange- og deleoperasjoner utføres før pluss og minus).

4		6		2	= 7
9		3		5	= 8
8		1		7	= 1
= 5		= 2		= 3	



REKTANGLER

Materiell: 24 kvadratiske brikker.

Oppgave:

1. Sett alle brikkene sammen til et rektangel.
2. Hvor mange forskjellige rektangler kan lages ved hjelp av 24 kvadratiske brikker?
3. Skriv opp hvor mange forskjellige rektangler som kan lages av henholdsvis 1, 2, 3, osv. helt opp til 24 kvadratiske brikker. Før inn tallene i en tabell som den nedenfor.

Antall brikker	Antall rektangler

4. Hva er sammenhengen mellom disse resultatene og primtall?

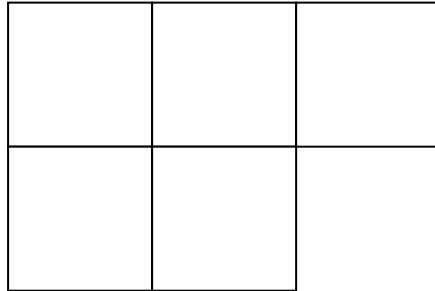
Ekstra: Hvilket antall kvadratiske brikker mellom 1 og 100 kan lage flest forskjellige rektangler?



RUNDT KVADRATENE

Materiell: 5 kvadratiske brikker.

Oppgave: Legg brikkene i følgende formasjon:



Omkretsen av denne formasjonen er ti enheter, der omkretsen er lengden rundt formens ytterkant.

Legg kvadratene i forskjellige formasjoner slik at omkretsen blir;

- (i) 12 enheter
- (ii) 16 enheter
- (iii) 20 enheter

Tegn av de forskjellige formene.

Ekstra: Hvilke andre omkretser kan man få med fem kvadrater? Tegn opp.

SETT SAMMEN KOLONNENE

Utstyr: 24 kuber

- Oppgaver:**
1. Bruk alle kubene til å lage 4 kolonner slik at;
 - ✓ Den første kolonnen inneholder 8 mindre enn den andre kolonnen.
 - ✓ Den andre kolonnen inneholder 3 flere enn den tredje kolonnen.
 - ✓ Den fjerde kolonnen består av halvparten så mange kuber som den andre kolonnen.
 2. Nå skal 20 kuber benyttes til å lage 4 kolonner slik at;
 - ✓ Den fjerde kolonnen inneholder like mange kuber som den andre og den tredje kolonnen til sammen.
 - ✓ Den første kolonnen inneholder $2\frac{1}{2}$ gang så mange kuber som det er i den tredje kolonnen.

Ekstra: Løs oppgavene ved hjelp av ligninger.

SETT SAMMEN KVADRATER

Materiell: 49 kvadratiske brikker.

Oppgave: Sett sammen 4 av brikkene til et kvadrat.

Hvor mange brikker må legges til for å lage det neste større kvadratet? Skriv av tabellen nedenfor og før opp hvor mange brikker som trengs i kolonnen til høyre.

Bygg ut kvadratet helt til det ikke er flere brikker igjen og skriv fortløpende ned hvor mange brikker som trengs for å lage det neste større kvadratet.

Sett sammen det største kvadratet som er mulig med 49 brikker. Hvor mange ekstra brikker må legges til for å lage et større kvadrat?

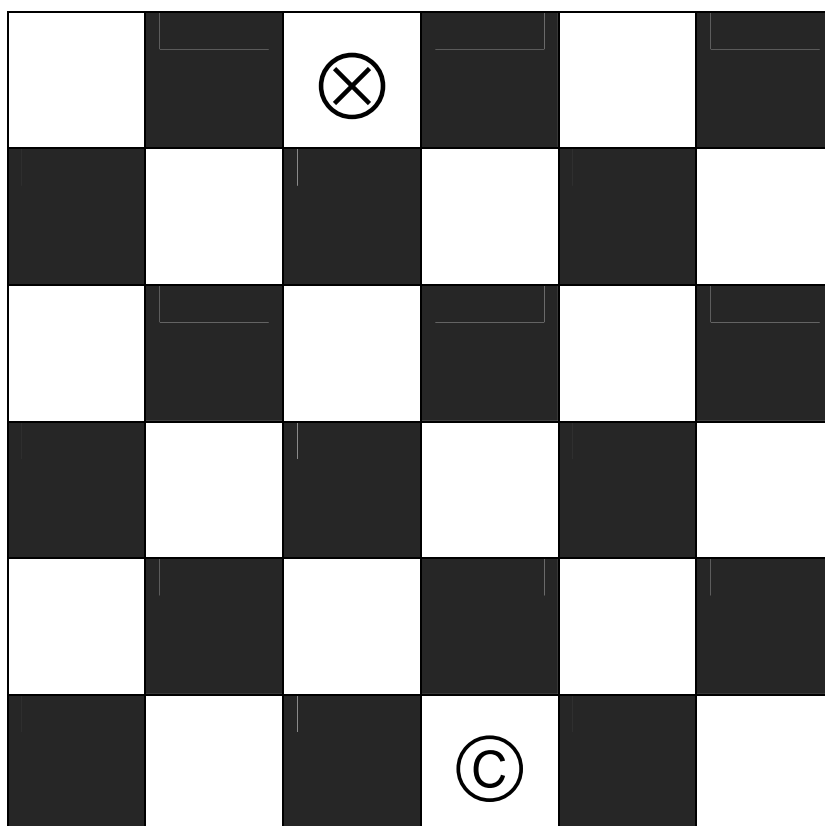
Antall brikker i kvadratet	Antall brikker som legges til for å få det neste større kvadratet
4	

Ekstra: Dersom n^2 er antall brikker i et kvadrat, hvor mange brikker må legges til for å lage det neste større kvadratet? Dette antallet skal uttrykkes ved hjelp av n .

SJAKKBRETT

Materiell: 1 brikke.

Oppgave: Plasser brikken på feltet merket ©. Brikken kan kun flyttes fremover og kun ta de hvite rutene i bruk. På hvor mange måter kan brikken flyttes til feltet merket ⊗ ?

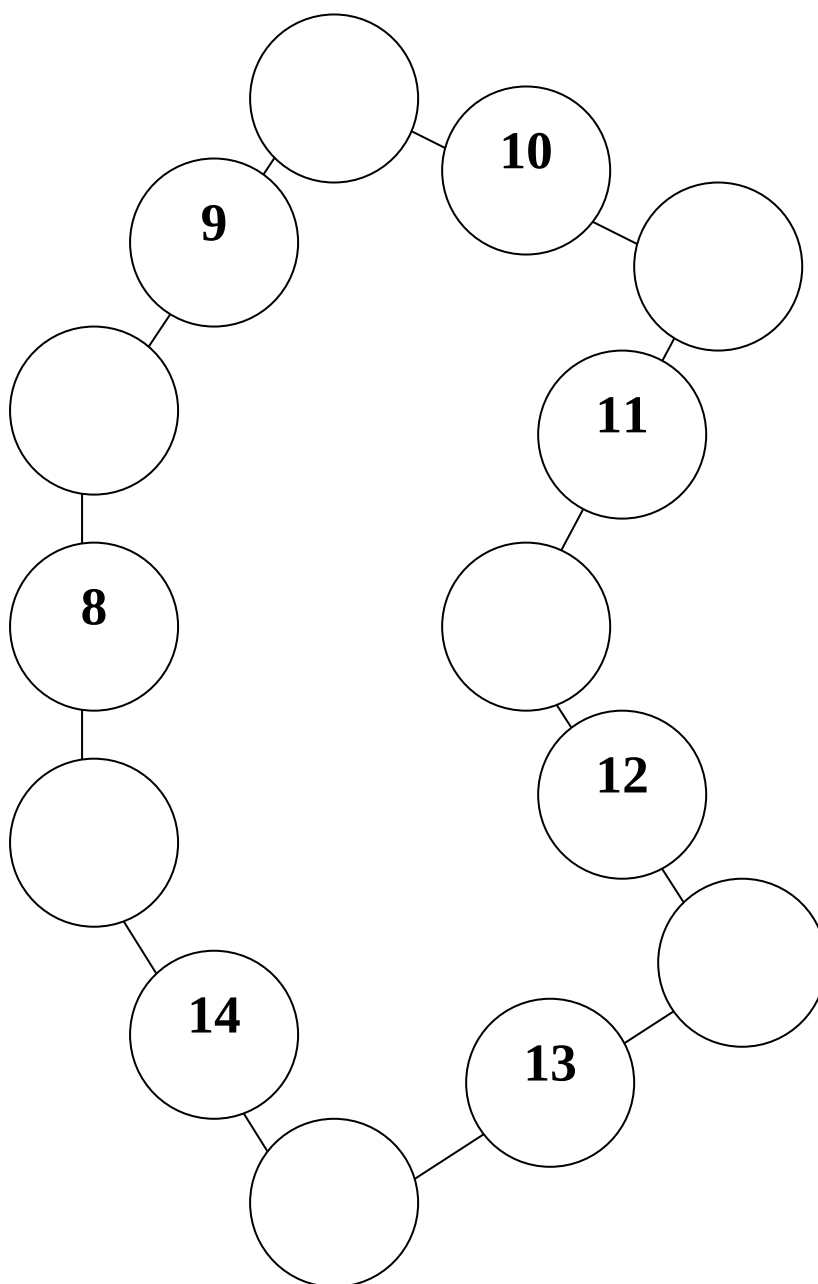


Beskriv de ulike veiene brikken kan flyttes langs.

SJUKANT

Materiell: 7 brikker nummerert fra 1 til 7.

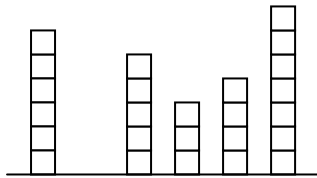
Oppgave: En sjukant er satt sammen av 7 rette linjer. I figuren nedenfor skal det legges brikker i de tomme feltene slik at summen blir den samme langs hver rette linje. Tallene midt på linjene er allerede fylt ut.



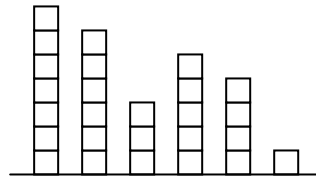
SKYSKRAPERE

Materiell: 28 kuber eller terninger.

Oppgave: Bygg 7 ”skyskrapere” med forskjellig høyde. Plasser skyskraperne i rutefeltet nedenfor slik at de ser slik ut:



Forfra



Fra siden



SNUOPERASJON

Materiell: 10 brikker merket med et kryss på den ene siden.

Oppgave: Legg brikkene i rutenettet med kryssene vendt opp, som vist nedenfor.

⊗	⊗	⊗	⊗
	⊗	⊗	
	⊗	⊗	
	⊗	⊗	

De ti brikkene skal i løpet av ti trekk snues slik at den blanke siden vender opp. For å snu en brikke må følgende regler være oppfylt:

- ✓ Den eneste måten en brikke kan flyttes på er ved at den hopper over en annen brikke.
- ✓ Hoppene kan skje horisontalt, vertikalt eller diagonalt.
- ✓ Et hopp svarer til et trekk.
- ✓ Alle brikkene skal være snudd i løpet av ti trekk.
- ✓ Brikken som hopper blir snudd.

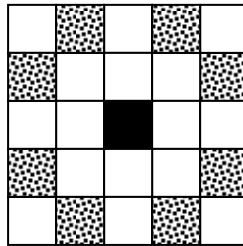
Ekstraoppgave: Gjennomfør den samme oppgaven der den siste regelen er endret til

- ✓ Brikken som hoppes over blir snudd.

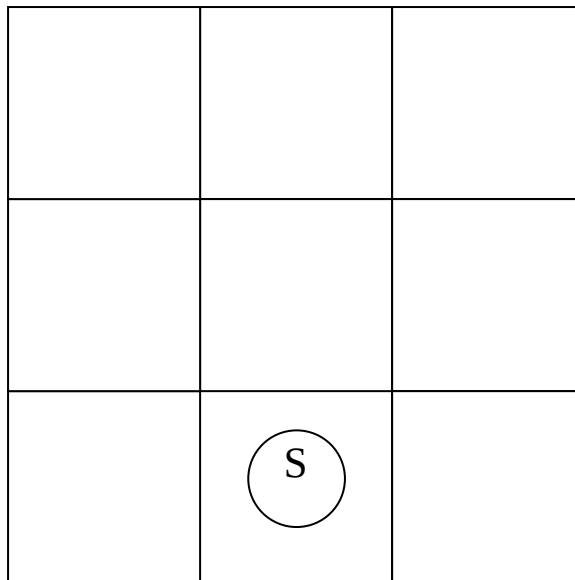
SPRINGER PÅ TUR

Materiell: 1 brikke.

Oppgave: I sjakk kan springeren flyttes i en "L-formet" bevegelse. Starter springeren i det svarte feltet i figuren nedenfor kan den flyttes til en av de åtte skraverte feltene.



Bruk brikken som springer i rutenettet nedenfor. Plasser den først i feltet merket S. Flytt brikken fra rute til rute ved å benytte springerbevegelser. Til hvor mange ruter kan brikken flyttes uten å være innom samme rute mer enn en gang?

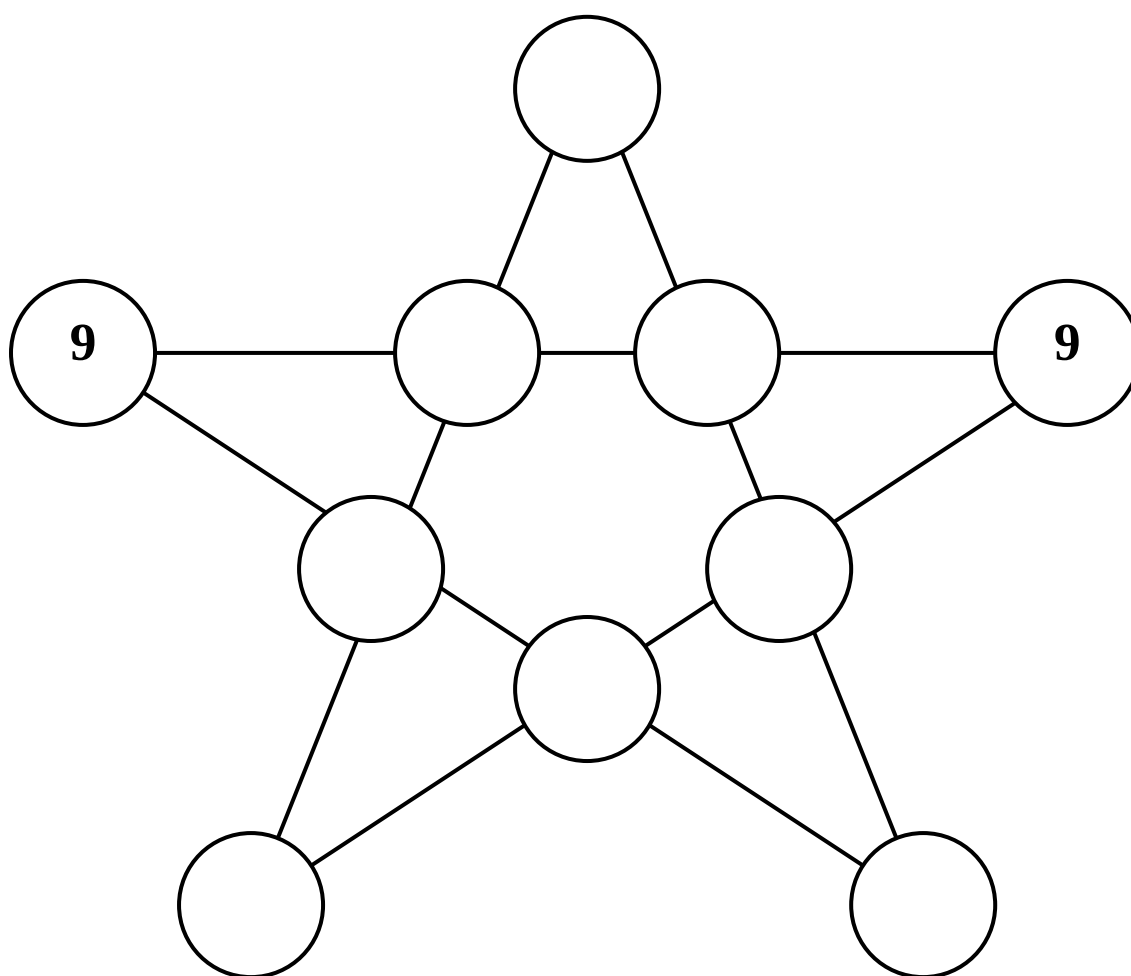


Ekstra: Start i en valgfri rute i et 4 X 4 rutenett. Gjenta samme oppgave.

STJERNEADDISJON

Materiell: 8 brikker påskrevet tallene 3, 4, 5, 6, 7, 8, 11 og 13.

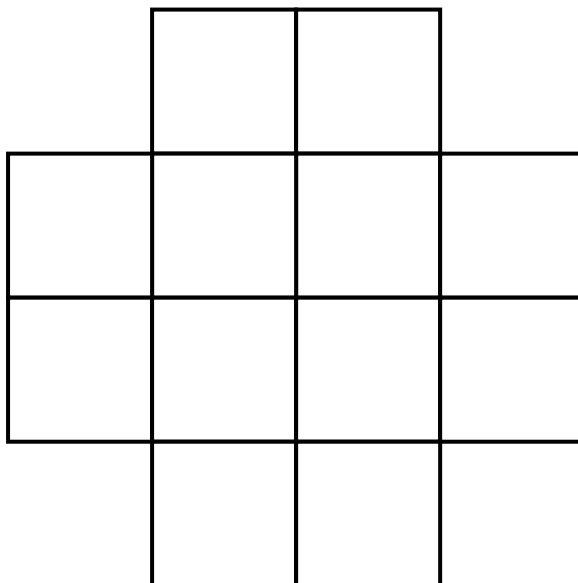
Oppgave: Plasser en brikke i hver tomme sirkel nedenfor, slik at summen langs hver rette linje blir 30.



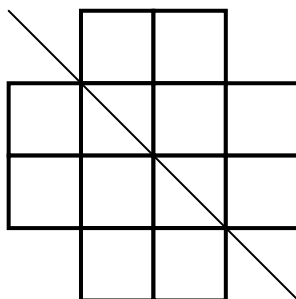
SYMMETRISKE MØNSTER

Materiell: 6 brikker med en farge og 6 brikker med en annen farge.

Oppgave: (i) Legg brikkene i rutene nedenfor slik at du får et symmetrisk mønster om den loddrette linjen i midten.



(ii) Hvor mange forskjellige symmetriske mønster kan lages dersom en også kan velge symmetrilinjen langs figurens hoveddiagonal?



TALL I FARGER

Materiell: 4 røde brikker nummerert fra 1 til 4, 4 blå brikker nummerert fra 1 til 4, 4 gule brikker nummerert fra 1 til 4 og 4 blå brikker nummerert fra 1 til 4.

Oppgave: Legg brikkene i rutenettet nedenfor, en i hvert felt, slik at ingen brikke med samme farge eller tall ligger i samme rad, kolonne eller hoveddiagonal.



TALLRUTENE

Materiell: 50 brikker.

Oppgave: Benytt rutenettet nedenfor. Legg en brikke i den første ruta, to i de neste ruta, tre i de tredje ruta og fortsett slik til det ikke er flere brikker igjen.

- ✓ I hvilken rute går du tom for brikker?
- ✓ Hvor mange brikker må du starte med for å ha nok til å fylle brettet?

Fjern brikkene fra rutenettet.

Nå legger du en brikke i den første ruta, to i den andre, fire i den tredje, åtte i den fjerde og fortsett til det går tomt for brikker. Antallet dobles for hver rute.

- ✓ I hvilken rute går du tom for brikker?
- ✓ Hvor mange brikker trengs for å fylle hele brettet?

1	2	3	4
5	6	7	8
9	10	11	12
13	14	15	16

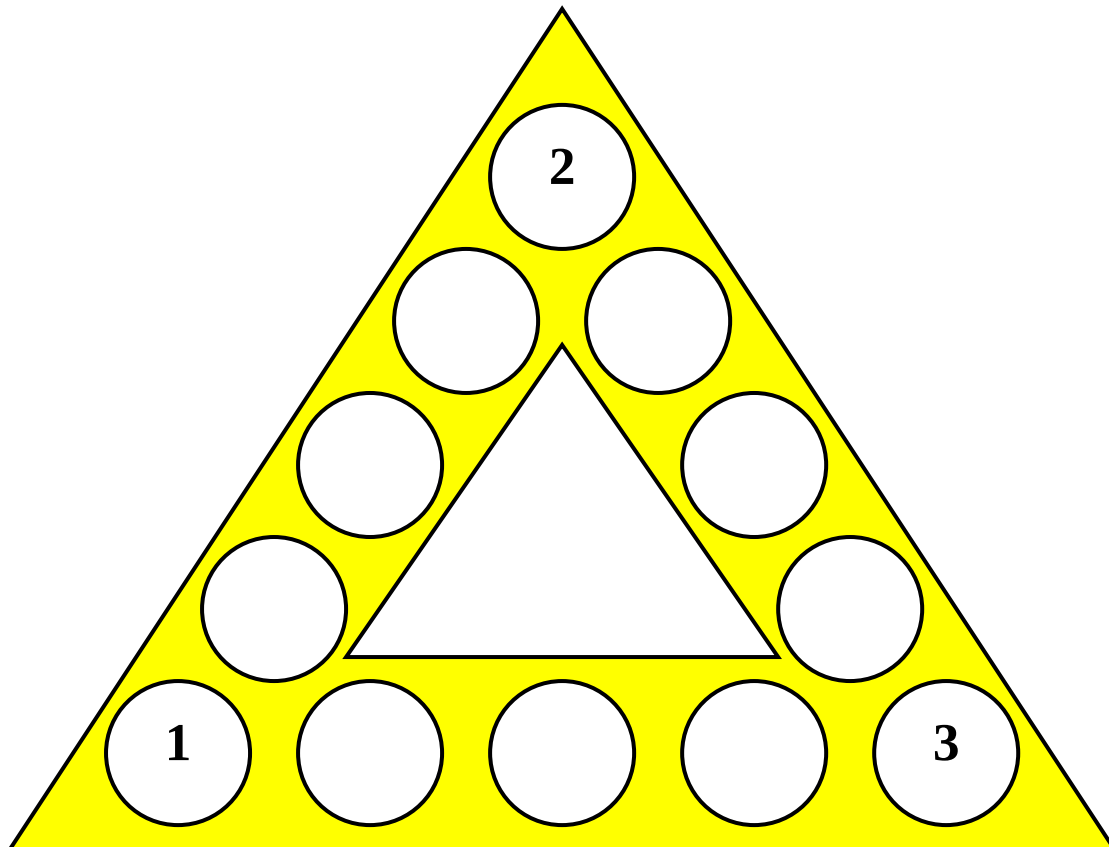
Ekstra: Prøv å gjenta oppgaven på et sjakkbrett. (8 X 8 rutenett)



TALLTREKANTEN

Materiell: 12 brikker nummerert fra 1 til 12.

Oppgave: Plasser brikkene 1, 2 og 3 i feltene markert 1, 2 og 3 i trekanten nedenfor.
Plasser resten av brikkene i de gjenværende feltene slik at summen langs hver sidekant blir 28.



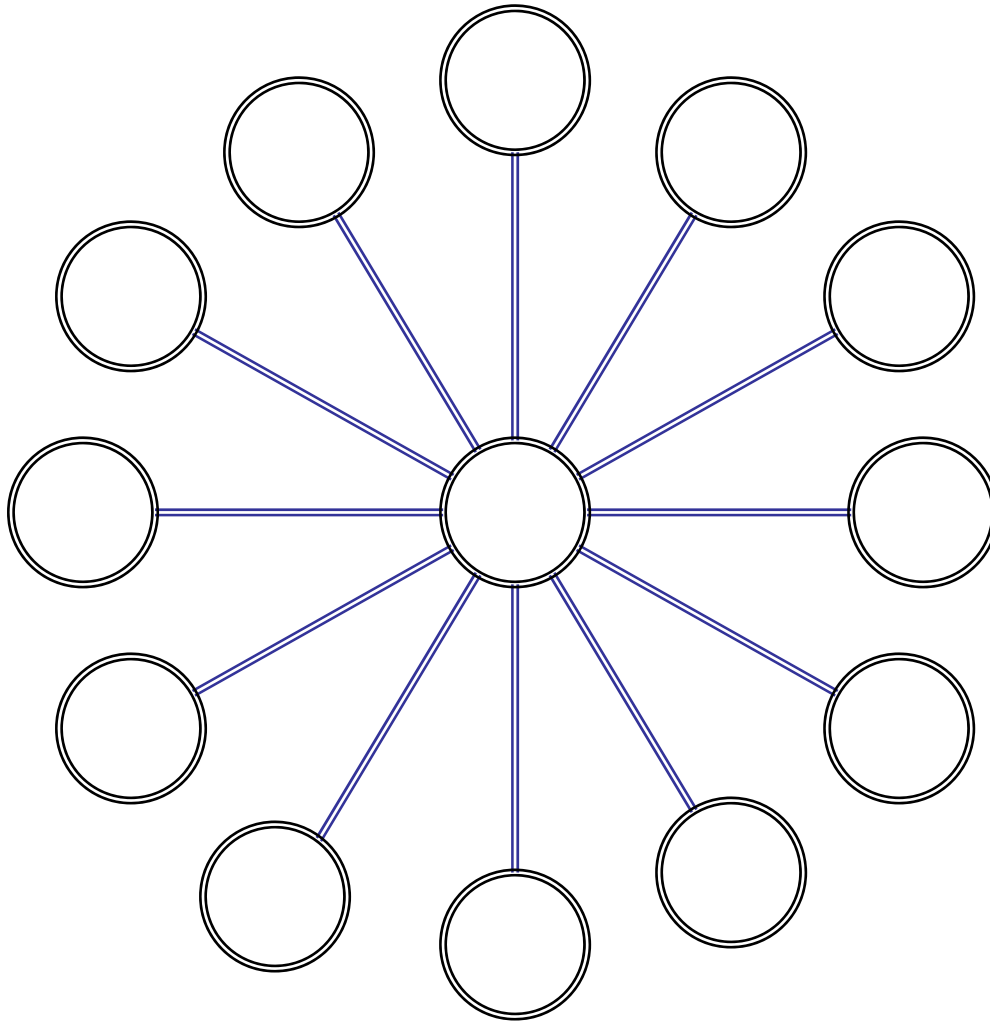
Ekstra: Bytt om på alle brikkene slik at summen langs hver sidekant blir 31.



TJUEEN

Materiell: 13 brikker nummerert fra 1 til 13.

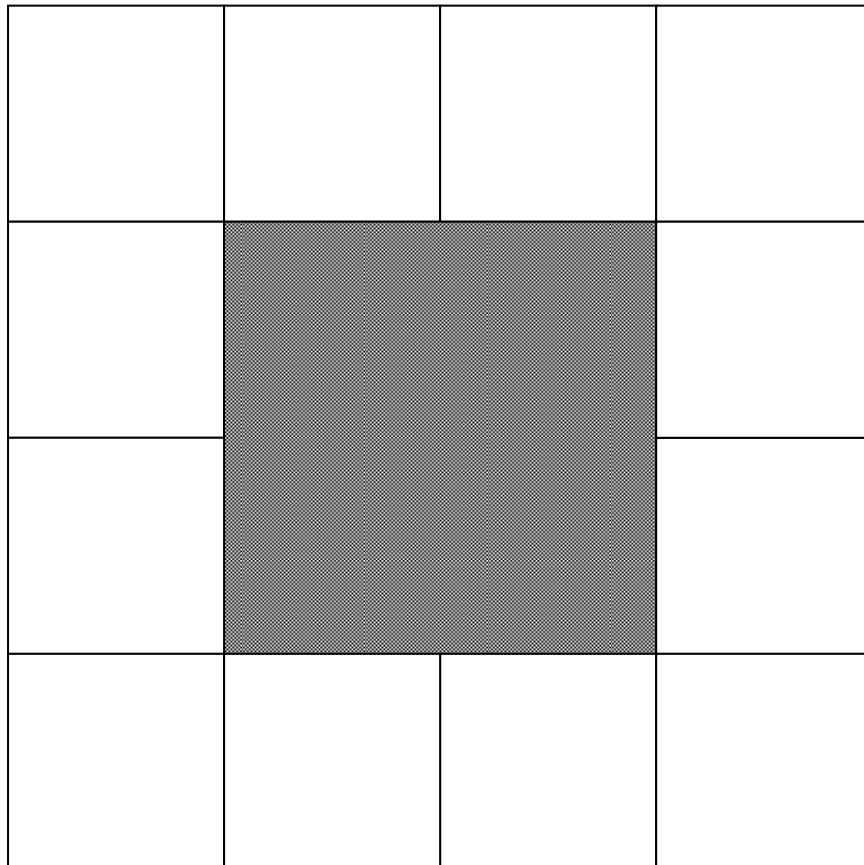
Oppgave: Plasser brikkene i sirklene nedenfor slik at summen langs hver rette linje blir tjueen.



TJUEFEM

Materiell: 12 brikker nummerert fra 1 til 12.

Oppgave: (i) Plasser brikkene i feltene nedenfor slik at summen langs hver side blir 30.



(ii) Plasser brikkene slik at summen langs hver side blir 26.

(iii) Plasser brikkene slik at summen langs hver side blir 25.

Ekstra: Hvilke andre summer er mulige?

TOTALSUMMEN

Materiell: 13 brikker nummerert fra 1 til 13.

Oppgave: På høyre side av rutenettet står totalsummen langs hver av de fem radene.
Nedenfor rutenettet står totalsummen langs hver av de fem kolonnene.
Plasser de 13 brikkene i de hvite rutene slik at hver rad og kolonne får den rette totalsummen.

					16
					19
					21
					19
					16
16	20	19	18	18	



TRE UTSAGN

Materiell: 9 brikker nummerert fra 1 til 9.

Oppgave: Plasser brikkene i feltene nedenfor slik at de tre matematiske utsagnene blir sanne.

$$\square + \square = \square$$

$$\square - \square = \square$$

$$\square \times \square = \square$$

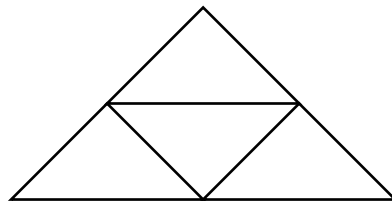
Ekstra: Dersom gangetegnet erstattes med et pluss eller minustegn, blir oppgaven umulig å løse. Kan du bevise dette?

TREKANTER

Materiell: 30 fyrstikker.

Oppgave: (i) Lag en trekant ved å bruke så få fyrstikker som mulig. Hvor mange må benyttes?

Lag to rader av trekanter som vist på figuren nedenfor



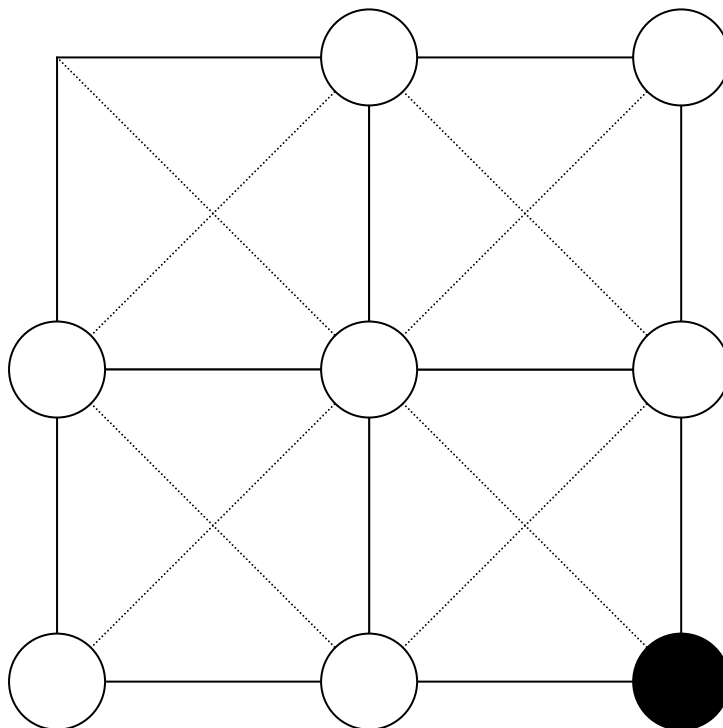
- (ii) Hvor mange fyrstikker trenger du til disse to radene?
- (iii) Hvor mange trekanter av samme størrelse som den øverste er det i de to radene?
- (iv) Gjenta samme oppgaver for 3 og 4 rader og før inn svarene i en tabell.
- (v) Hvor mange fyrstikker må til for å bygge 8 rader med trekanter? Hvor mange trekanter av samme størrelse som den minste er det i 8 rader?
- (vi) Hvor mange fyrstikker og trekanter er det i n rader?

Ekstra: Gjenta oppgaven på samme måte, bare at nå regnes trekanter i alle størrelser med.

TREKK FOR TREKK

Materiell: 7 hvite og 1 svart brikke.

Oppgave: Plasser brikkene i feltene nedenfor som angitt på figuren.



(i) Brikkene flyttes etter følgende regler:

- Det kan være høyst 1 brikke i hvert kryss.
- Brikkene kan kun flyttes horisontalt eller vertikalt.

Hva er det minste antall trekk som skal til for å flytte den svarte brikken opp til det ledige hjørnet?

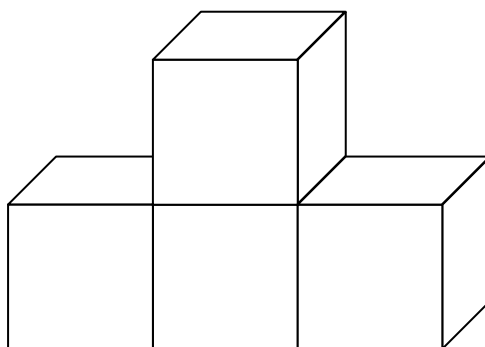
(ii) Anta fra nå av at brikkene også kan flyttes diagonalt (langs de stiplede linjene).

Hva er nå det minste antall trekk som må til for å flytte den svarte brikken til det motsatte hjørnet av rutenettet?

TÅRN

Materiell: 25 kuber.

Oppgave: Tårn av "type-A" består av en kube i øverste trinn, tre kuber i nest øverste trinn, 5 kuber i det tredje øverste trinn, og så videre. Tårn av type-A kan beskrives ved hvor mange trinn det har. For eksempel består et slikt 2-trinns tårn av 4 kuber som vist nedenfor:



- (i) Bygg så mange forskjellige type-A tårn som mulig med de 25 brikkene. Etter å ha bygd hvert enkelt tårn, lag en tabell som den nedenfor og skriv inn de forskjellige tallverdiene. Kun ett tårn skal bygges om gangen, deretter rives slik at alle de 25 kubene er tilgjengelig hver gang et nytt tårn skal bygges.

Antall trinn	Antall kuber

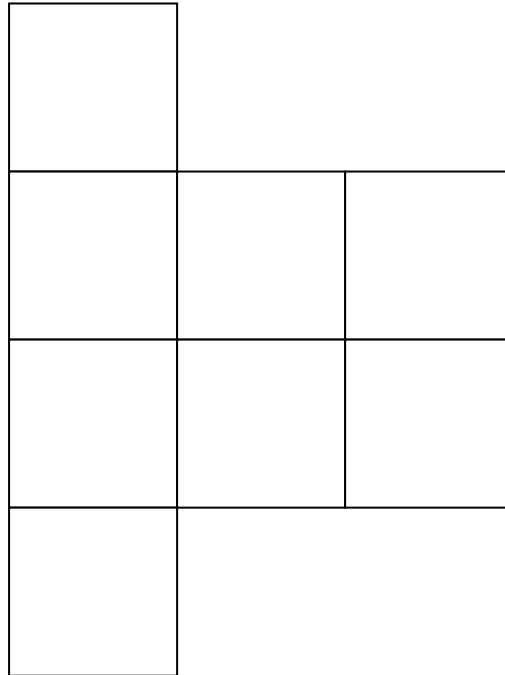
- (ii) Hvor mange kuber må til for å bygge et type-A tårn på 11 trinn? (Bruk verdiene i tabellen til hjelp.)

Ekstra: Hvor mange kuber må til for å bygge et type-A tårn på n trinn?

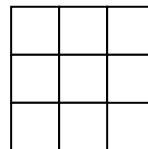
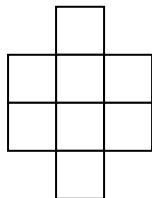
ÅTTE SIFFER

Utstyr: 8 brikker nummerert fra 1 til 8.

Oppgave: Legg brikkene i rutenettet nedenfor slik at tall som følger etter hverandre ikke kommer i nærheten av hverandre, verken vannrett, loddrett eller på skrå.



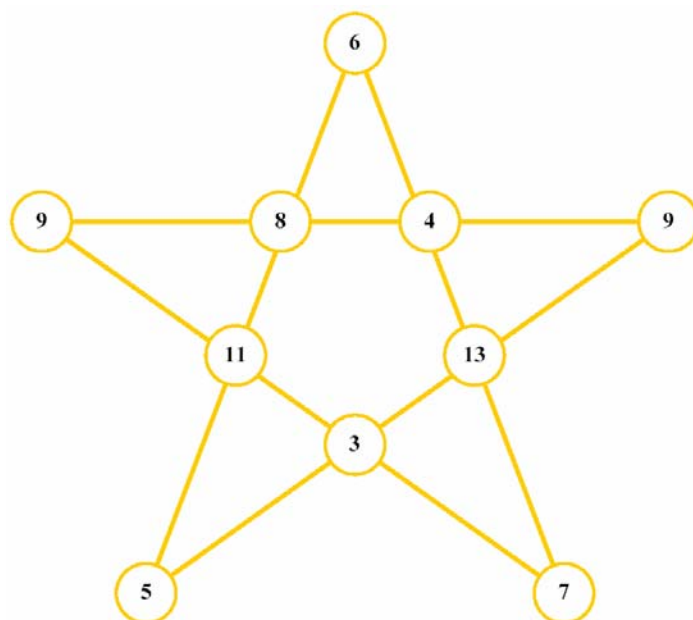
Ekstra: Utfør det samme opplegget med disse rutemønstrene:



Løsninger

Til oppgavene

I alfabetisk rekkefølge



ADDISJONSMYSTERIET

Løsning: Plasser x -en i det midterste feltet.

Deretter kompletteres andre rad, andre kolonne og de to hoveddiagonalene med parene av brikker $(x+1, x-1)$ $(x+2, x-2)$ $(x+3, x-3)$ og $(x+4, x-4)$.

Dette innebærer at summen langs hver diagonal vil bli $3x$. Summen langs radene og kolonnene som inneholder det midterste feltet vil også være $3x$.

Til slutt er det prøving og feiling helt til summen i alle radene og kolonnene er $3x$. En mulig løsning er denne:

$x - 1$	$x + 4$	$x - 3$
$x - 2$	x	$x + 2$
$x + 3$	$x - 4$	$x + 1$

Det finnes også andre løsninger, en kan f. eks. bytte om rad 1 og rad 3, eller kolonne 1 og kolonne 3 eller ”speilvende” hele tabellen.



BLINKSKUDD

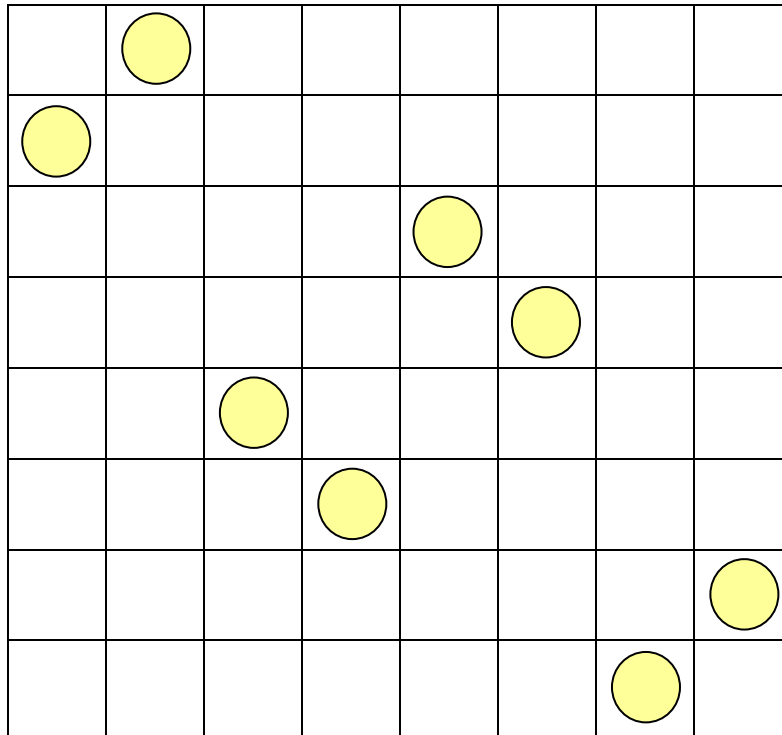
- (i) For å få nøyaktig 100 ved hjelp av 6 brikker, legger man 2 brikker i 36-feltet og 4 brikker i sjuerfeltet. $36 + 36 + 7 + 7 + 7 + 7 = 100$.
- (ii) For å få nøyaktig 100 ved hjelp av 7 brikker bruker man $36 + 17 + 13 + 13 + 7 + 7 + 7$.

Ekstraoppgaven har en stor mengde med utfall:

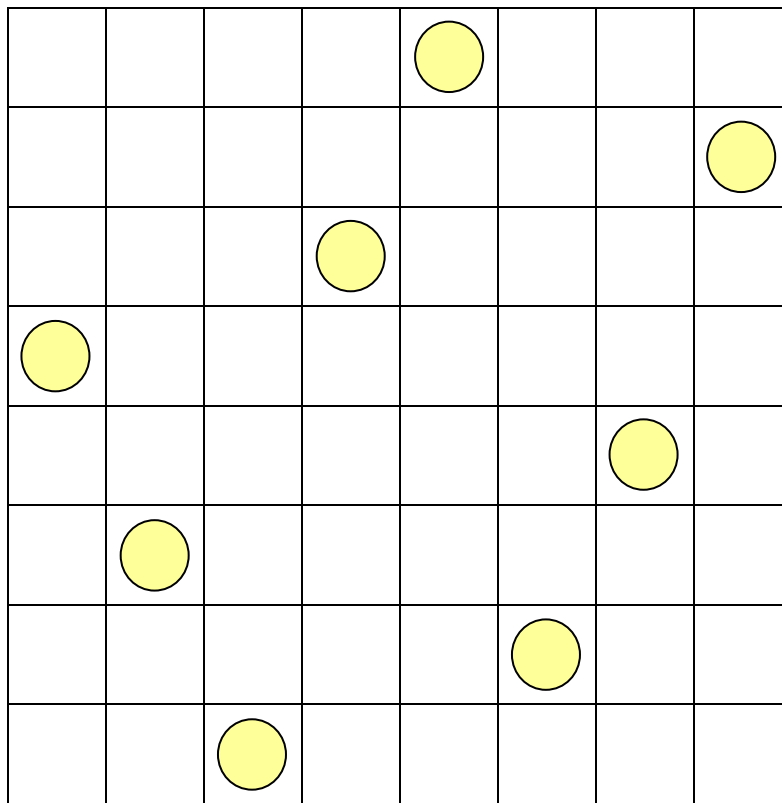
$7 + 7 + 7 = 21$	$13 + 13 + 41 = 67$
$7 + 7 + 13 = 27$	$13 + 17 + 17 = 47$
$7 + 7 + 17 = 31$	$13 + 17 + 36 = 66$
$7 + 7 + 36 = 50$	$13 + 17 + 41 = 71$
$7 + 7 + 41 = 55$	$13 + 36 + 36 = 85$
$7 + 13 + 13 = 33$	$13 + 36 + 41 = 90$
$7 + 13 + 17 = 37$	$13 + 41 + 41 = 95$
$7 + 13 + 36 = 56$	$17 + 17 + 17 = 51$
$7 + 13 + 41 = 61$	$17 + 17 + 36 = 70$
$7 + 17 + 17 = 41$	$17 + 17 + 41 = 75$
$7 + 17 + 36 = 60$	$17 + 36 + 36 = 89$
$7 + 17 + 41 = 65$	$17 + 36 + 41 = 94$
$7 + 36 + 36 = 79$	$17 + 41 + 41 = 99$
$7 + 36 + 41 = 84$	$36 + 36 + 36 = 108$
$7 + 41 + 41 = 89$	$36 + 36 + 41 = 113$
$13 + 13 + 13 = 39$	$36 + 41 + 41 = 118$
$13 + 13 + 17 = 43$	$41 + 41 + 41 = 123$
$13 + 13 + 36 = 62$	

BRIKKENE PÅ ET BRETT

En løsning kan se slik ut:



En mulig løsning på ekstraoppgaven kan se slik ut:



BRIKKESPILLET

De mulige utfallene er:

Ingen gjenværende brikker

H
S
SH
HS
HSH

der H betegner hvit og S betegner svart brikke.

Mulige utfall av ekstraoppgaven er:

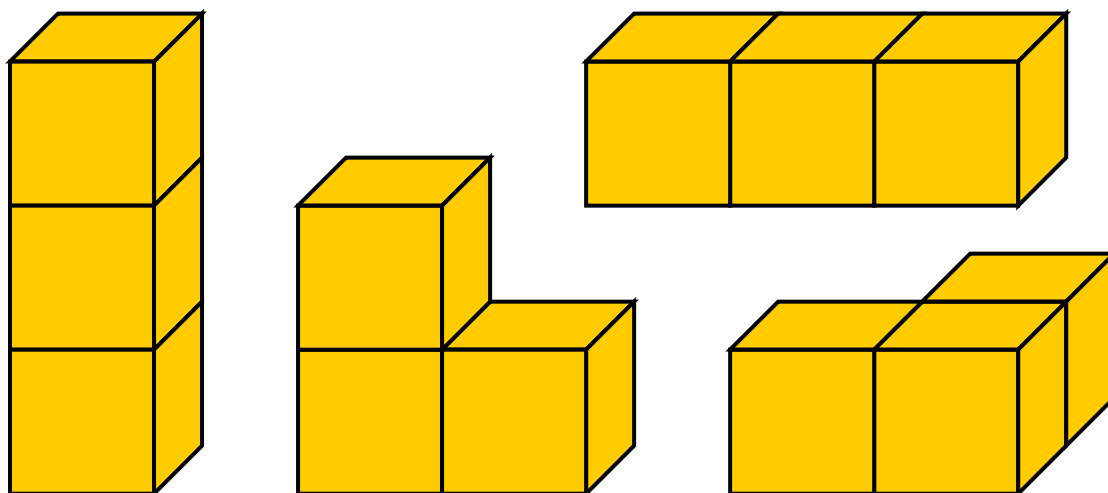
Ingen gjenværende brikker

H
S
SH
SS
HSH
HSS
SSH
HSSH



BYGNINGER

1. Med 3 kuber kan man sette sammen 4 ulike bygninger.



- 2.

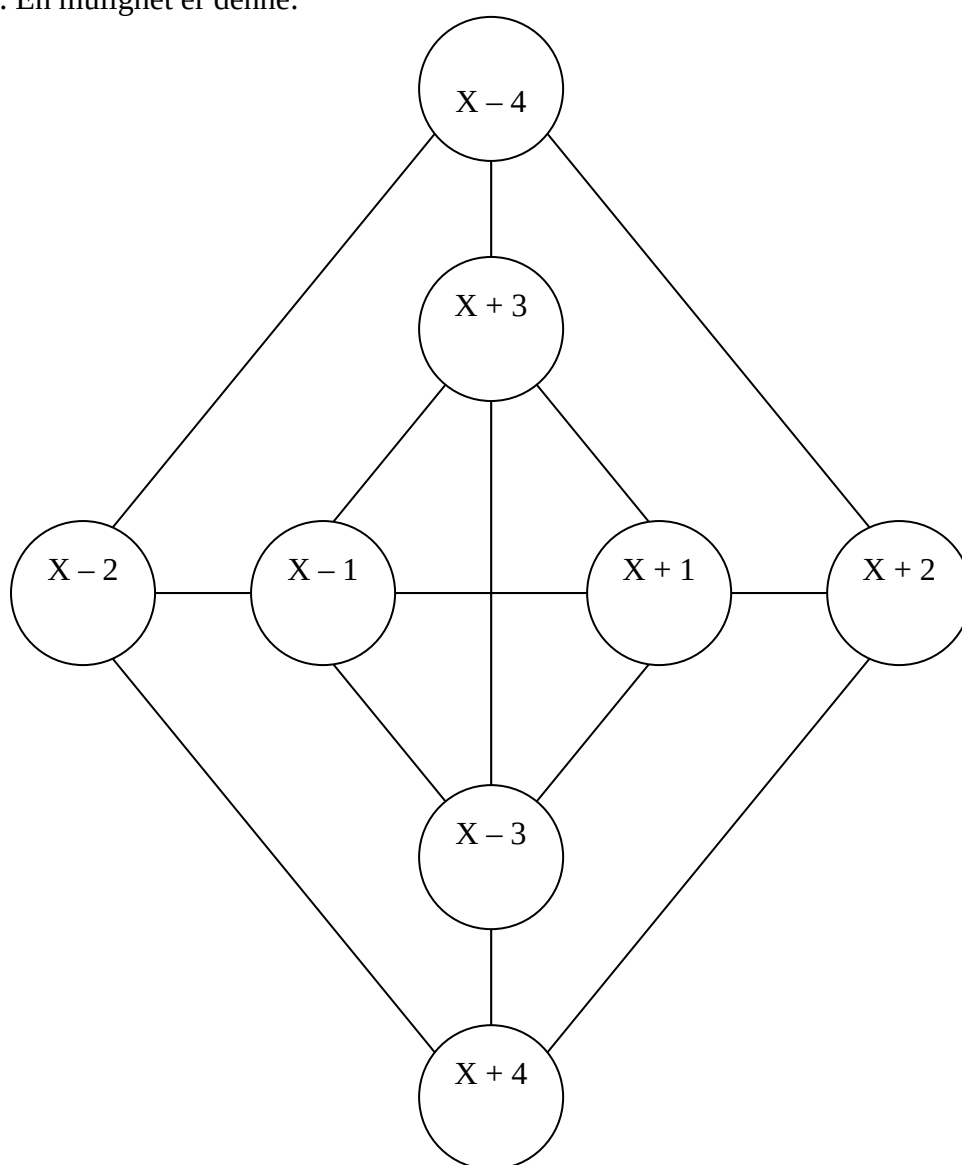
Antall kuber	Antall forskjellige bygninger
1	1
2	2
3	4
4	13
5	35

DEN FINURLIGE RUTEREN

Summen av alle brikkene er $8x$. Dersom summen rundt den store og den lille ruter skal være den samme, må denne summen være $4x$.

Dette kan oppnås ved å plassere $x - 2$, $x + 2$, $x - 4$ og $x + 4$ rundt den store ruter og $x - 1$, $x + 1$, $x - 3$ og $x + 3$ rundt den lille.

Til slutt bytter man om på brikkene slik at summen langs den vertikale og horisontale linjen blir $4x$. En mulighet er denne:

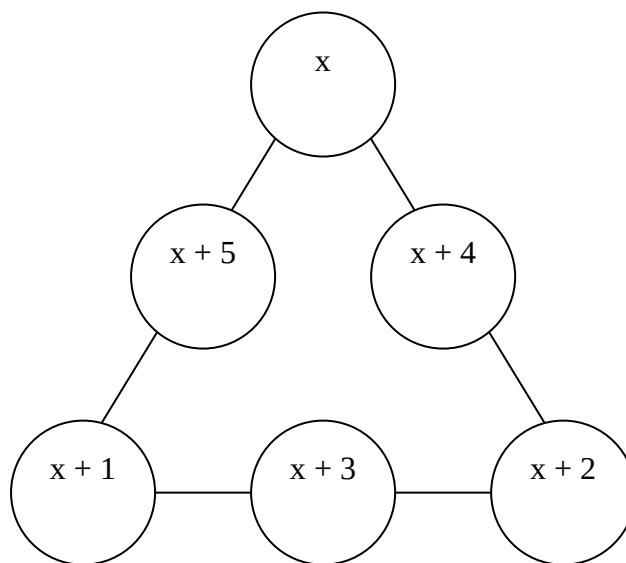


DEN MAGISKE TREKANTEN

Brikkene som legges i hjørnene på trekanten blir telt med to ganger når vi regner ut summen langs hver enkelt side. Brikkene midt på sidene av trekanten telles bare en gang. Derfor er det naturlig å legge brikkene med minst verdi i hjørnene. Dersom vi gjør dette så vil totalsummen bli:

$$x + (x + 1) + (x + 2) + (x + 3) + (x + 4) + (x + 5) + x + (x + 1) + (x + 2) = 9x + 18$$

Summen langs hver side blir da $3x + 6$. Dermed er dette en løsning:

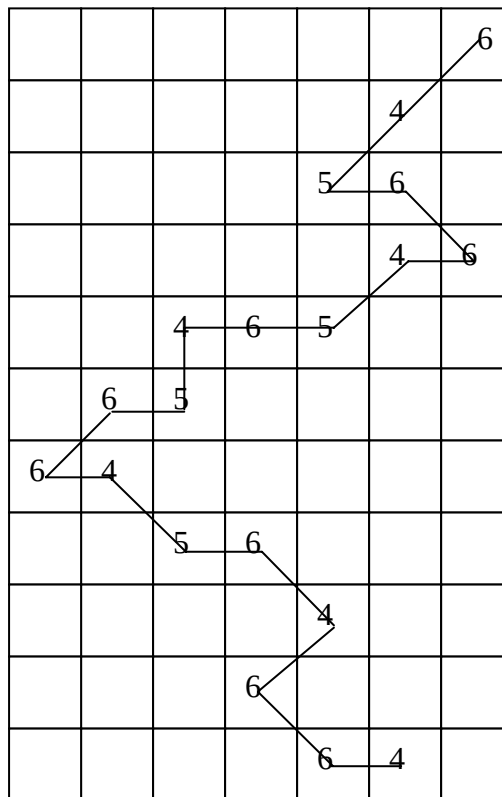


Summen langs hver side kan endres såfremt totalsummen blir delelig med 3. Følgende summer er mulige:

Hjørnebrikker	Summen langs hver side
$x, x + 2, x + 4$	$3x + 7$
$x + 1, x + 3, x + 5$	$3x + 8$
$x + 3, x + 4, x + 5$	$3x + 9$

DEN OPTIMALE RUTEN

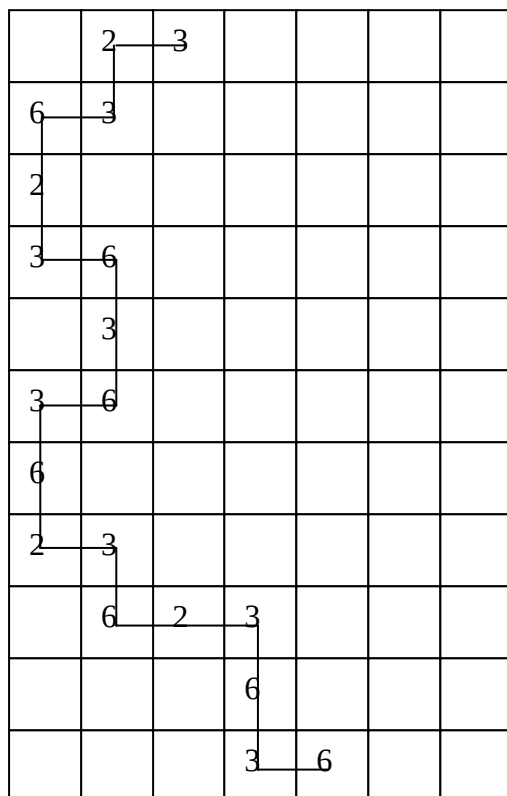
Ser etter en vei som inneholder tallene 4, 5 og 6.



Denne ruten gir totalsum 98.



Dersom vi bare kan bruke vertikale og horisontale trekk, kan vi følge en rute med 2, 3 og 6.



Denne ruten gir totalsum 74.

DET LATINSKE KVADRATET

- (i) Et 3X3 latinsk kvadrat kan se slik ut:

gul	rød	blå
blå	gul	rød
rød	blå	gul

- (ii) Et 4X4 latinsk kvadrat kan se slik ut:

rød	blå	gul	grønn
grønn	rød	blå	gul
gul	grønn	rød	blå
blå	gul	grønn	rød

Når man først har funnet et 4X4 latinsk kvadrat kan en finne flere ved å bytte om rader og kolonner. Starter man med rødt i øverste venstre hjørne kan man bytte kolonner på 6 måter og bytte rader på 5 måter. Derfor er det $(6+5) \times 4 = 44$ forskjellige 4X4 latinske kvadrater. Et av dem er dette

rød	grønn	blå	gul
gul	blå	grønn	rød
grønn	rød	gul	blå
blå	gul	rød	grønn

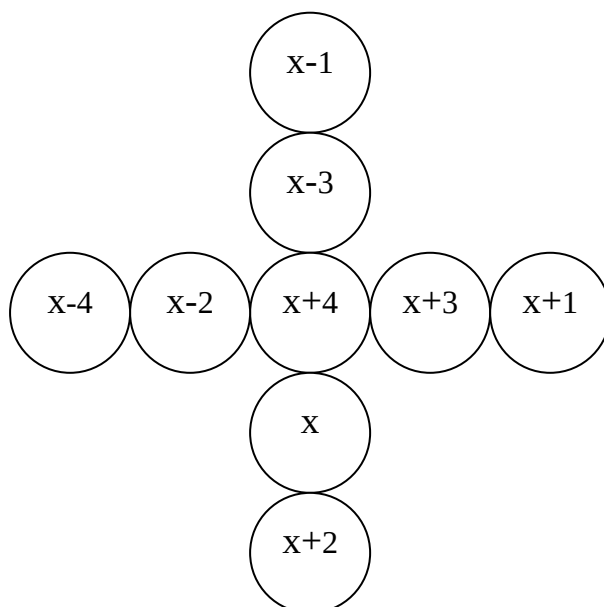
som har forskjellige farger i hver av rutene langs hoveddiagonalene.

DET MAGISKE KORSET

1. Dersom totalen langs hver rette linje skal være $5x + 2$, så må summen langs de 2 rette linjene bli $10x + 4$. I denne summen inngår alle brikkene en gang, unntatt den midtre brikken som blir summert to ganger.

Summen av de ni brikkene er $9x$. Ser vi på differansen $(10x + 4) - 9x = x + 4$, får vi et hint om hvilken brikke som skal ligge i midten. De gjenværende brikkene organiseres så i 2 grupper på fire brikker der summen i hver gruppe blir $4x - 2$.

En løsning blir dermed:



2. Andre mulige totalsummer langs hver linje er $5x - 2$, $5x - 1$, $5x$ og $5x + 1$. Disse summene har henholdsvis $x - 4$, $x - 2$, x og $x + 2$ som midtbrikke.

DET MAGISKE KVADRATET

Løsning: Fyll ut tredje kolonne først ved å plassere 14 i første rad. Deretter kompletteres andre rad ved å plassere 9 i første kolonne. Det er nå en rad, en kolonne og to diagonaler som mangler to tall. Summen av de to tallene i den ene diagonalen er 23. Det mangler altså 19 på at summen skal bli 42. De eneste gjenværende brikkene som kan summeres til 19 er 6 og 13. Disse brikkene gjør den ene diagonalen ferdig.

Den andre hoveddiagonalen har totalsum 18 så langt og mangler derfor 24. De eneste gjenværende brikkene som kan summeres til 18 er 8 og 16. Rekkefølgen mellom disse er foreløpig likegyldig.

Legg så merke til at første rad har 14 og 5 i seg. Den mangler altså 23 på å bli komplett. 16 kan dermed ikke legges i det øverst venstre hjørnet fordi det er ingen brikker med tallet 7. Derfor må 8 legges i første rad sammen med 15. 16 plasseres i stedet i nederste høyre hjørne. Fjerde kolonne kan nå kompletteres ved å legge 17 i tredje rad.

Nå gjenstår det å plassere brikkene 10, 12, 6 og 13 riktig. Etter litt fintenkning kommer vi fram til at den eneste måte å gjøre det på er å legge 12 i rad 3, kolonne 1; legge 6 i rad 3, kolonne 2; legge 13 i rad 4, kolonne 1 og til slutt 10 i rad 4, kolonne 2.

Den endelige løsningen ser slik ut:

8	15	14	5
9	11	18	4
12	6	7	17
13	10	3	16



DIGITALKLOKKA

(i)

TALL	KLOKKE TALL	ANTALL FYRSTIKKER
0		6
1		2
2		5
3		5
4		4
5		5
6		6
7		3
8		7
9		6

(ii) Tidspunktet 12:58 kan skrives ved å bruke 19 fyrstikker.

(iii) Tidspunktet 20:08 krever 24 fyrstikker.

(iv) Tidspunktet 1:11 krever 6 fyrstikker.



FEM GANGER

Summen av tallene fra 1 til 12 er 78.

La S stå for summen i de skraverte feltene. Da vil 5S være summen av tallene i de blanke feltene. Dermed vil:

$$6S = 78$$

$$S = 13$$

De eneste tallene som lar seg summere til 13 er 1, 3, 4 og 5. Dermed følger løsningen:

1	2	6	3
	7	8	
	9	10	
4	11	12	5

Fremgangsmåten i ekstraoppgaven er likedan. La T være summen av tallene i de skraverte rutene og 2T være summen av tallene i de blanke rutene.

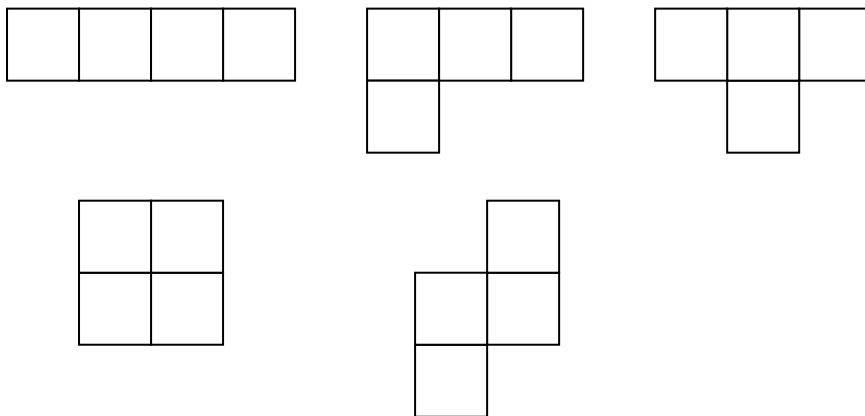
$$3T = 78$$

$$T = 26$$

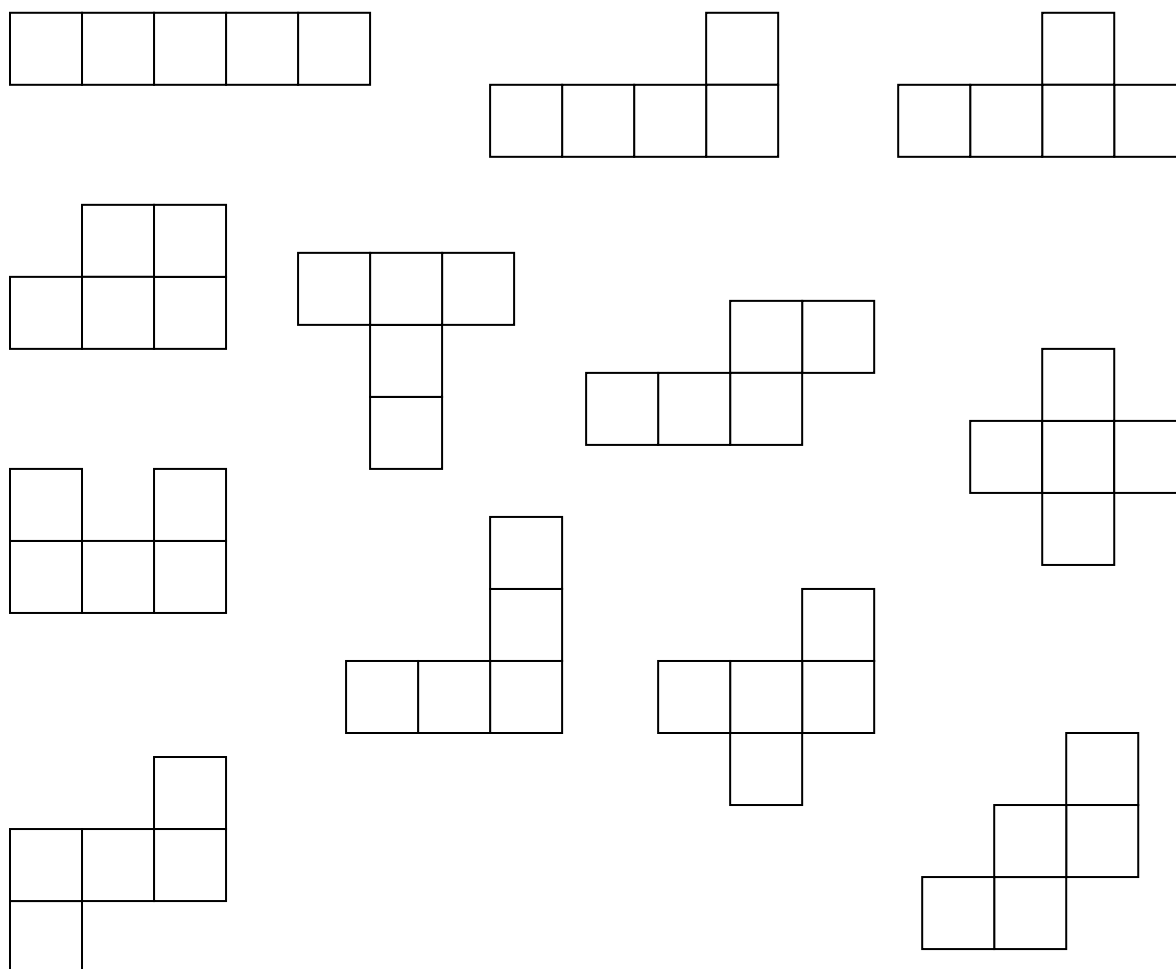
Det er mange kombinasjoner av 4 tall som gir summen 26. Så enhver sum av tallparene (1,12) (2,11) (3,10) (4,9) (5,8) (6,7) vil representere mulige løsninger på oppgaven.

FIRE OG FEM KVADRATER

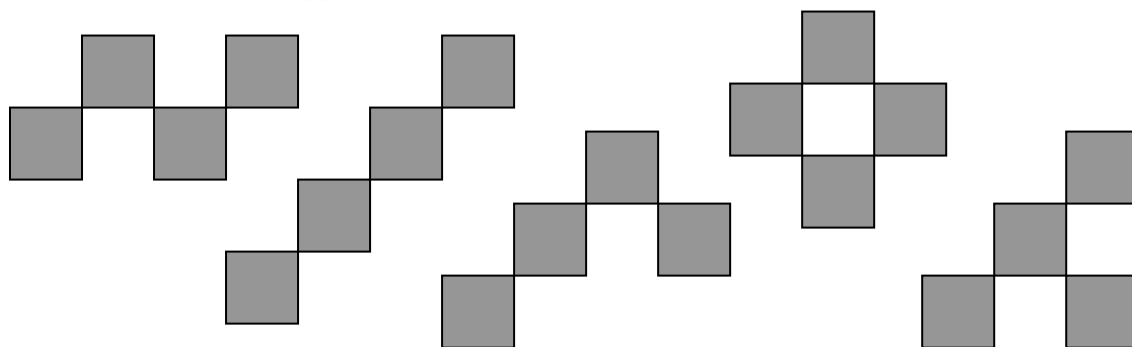
- (i) Det kan settes sammen fem grunnformer av fire kvadrater.



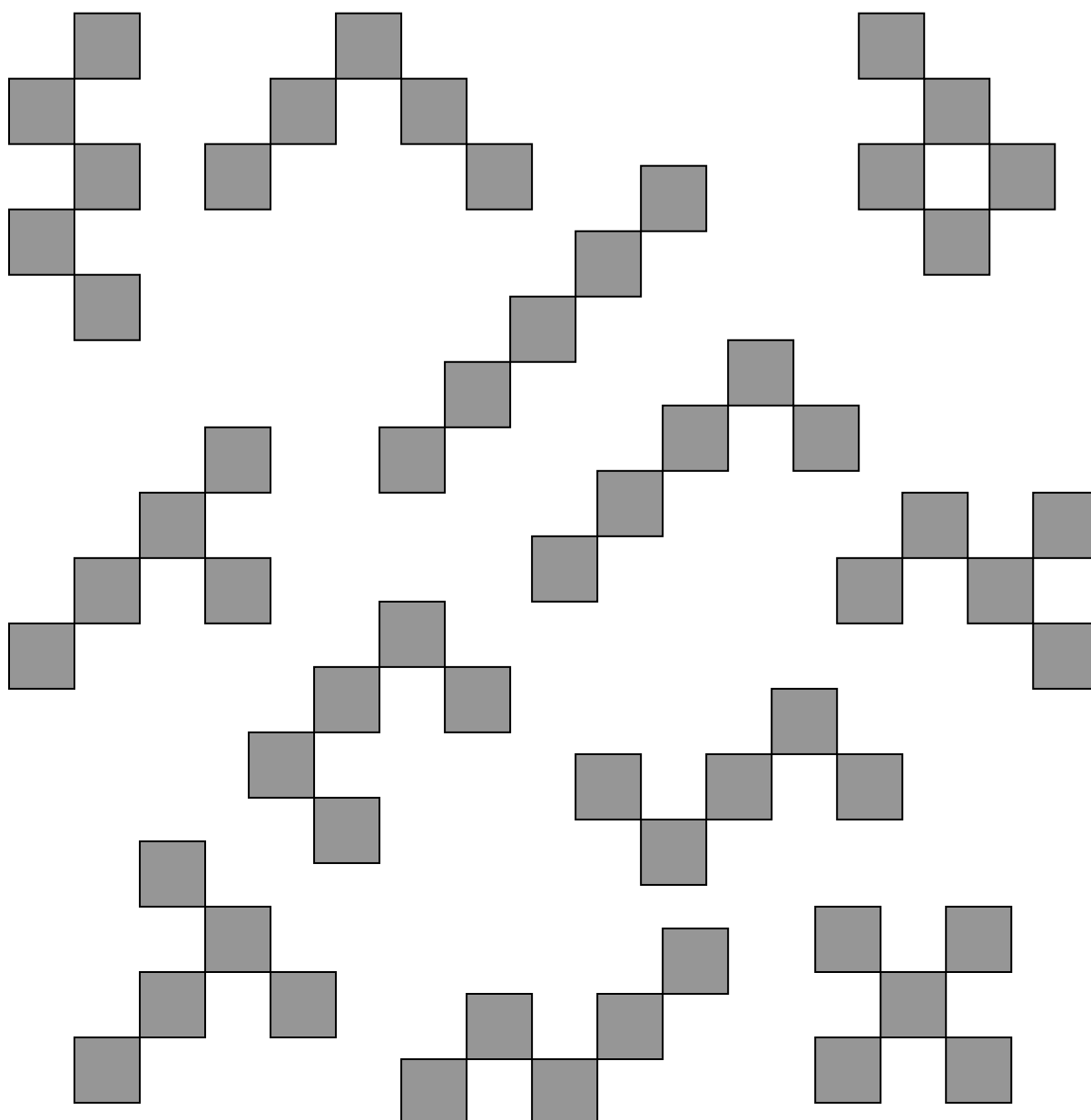
- (ii) 12 grunnformer kan settes sammen med fem kvadrater.



Når det gjelder ekstraoppgaven så kan det lages 5 former med fire kvadrater.



12 grunnformer kan settes sammen med fem kvadrater.



FLYTT BRIKKENE

	A	B	C	Kommentar
Start	9	3	24	
Første trekk	9	6	21	3 fra C til B
Andre trekk	18	6	12	9 fra C til A
Tredje trekk	12	12	12	6 fra A til B

Siden alle tallene involvert i denne oppgaven er delelige med 3, kan oppgaven forenkles ved å plassere 3 brikker på felt A, 1 på felt B, 8 på felt C, og prøve å la det ligge fire brikker i hvert felt etter tre trekk.



FLYTTE PARVIS

Dette kan gjøres på 6 trekk som vist nedenfor:

START:

				●	○	●	○	●	○
		○	●	●	○	●			○
○	●	○	●	●					○
○			●	●			●	○	○
○	○	○	●	●			●		
○	○	○			●	●	●		
○	○	○	●	●	●				

SLUTT:

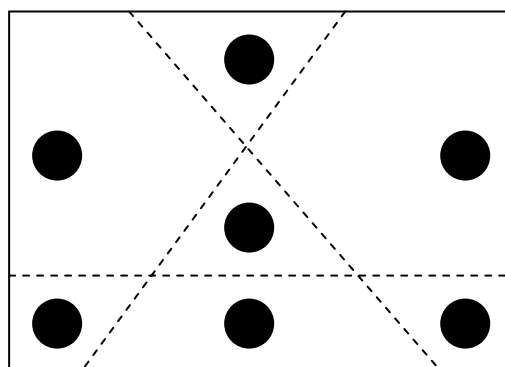
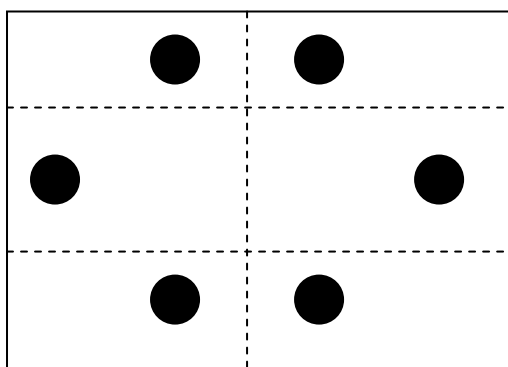
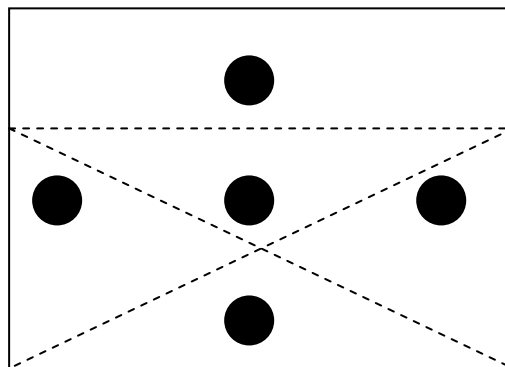
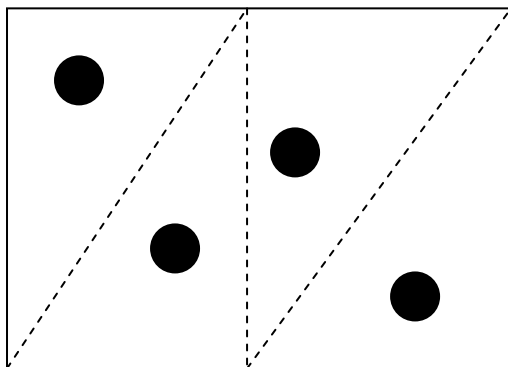
Ekstraoppgaven kan løses på 4 trekk som vist nedenfor:

START:

		●	○	●	○	●	○	●	○
○	●	●	○	●	○	●			○
○	●	●	○			●	●	○	○
○			○	●	●	●	●	○	○
○	○	○	○	●	●	●	●		

SLUTT:

GJERDER



HESTER OG HØNS

1. Det er totalt 12 dyr på gården, siden det totale antall øyne er 24. Legg derfor ut 12 par med brikker. Dyrene har minst to ben, derfor kan man legge 2 fyrstikker ved hvert par av brikker. Etter å ha gjort dette blir det 16 fyrstikker til overs. Disse legges ved de andre fyrstikkene 2 og 2 helt til det er tomt. Da vil det være 8 hauger med 4 fyrstikker og 2 brikker. Dette svarer til antall hester. Det er derfor 8 hester og 4 høns på gården til Anna Lena.
2. Dersom X står for antall hester og Y står for antall høns, så vil antall ben kunne uttrykkes som:
(I) $4X + 2Y = 40$
3. Det totale antall øyne vil kunne uttrykkes som:
(II) $2X + 2Y = 24$

Dette gir to algebraiske ligninger med to ukjente som løses med hensyn på hverandre: (II) kan skrives som $X = 12 - Y$. Dette settes inn i (I) og vi får at $Y = 4$. Setter til slutt Y - verdien inn i (I) og får $X = 8$.

Dette stemmer med løsningen ovenfor, det er 8 hester og 4 høns.

*

I ekstraoppgaven er det totale antall øyne og ben uendret. Fortsatt er det derfor 12 dyr på gården, men av 3 forskjellige arter. For å finne ut hvor mange det er av hver art, kan brikkene og fyrstikkene legges opp som i den første oppgaven. Fjern fyrstikkene i en av de haugene med to fyrstikker. De to gjenværende brikkene vil representere en huggorm, siden den har to øyne og ingen ben. De to fyrstikkene flyttes så til en av haugene med to fyrstikker slik at det blir totalt 4 fyrstikker i den haugen. Da en mulig løsning at det er 1 huggorm 2 høns og 9 hester. Dette er faktisk den eneste løsningen siden det skal være minst en av hver art.

HUSNUMMER

Følgende husnummer kan settes sammen:

2
4
6
24
26
42
46
62
64
246
264
426
462
624
642

I ekstraoppgaven kan følgende tall settes sammen:

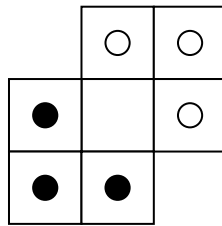
2
4
24
42
44
244
424
442



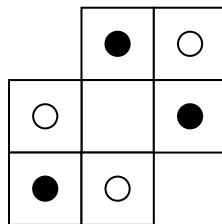
I MOTSATTE HJØRNER

De svarte og hvite brikkene kan bytte plass etter 17 trekk som vist nedenfor:

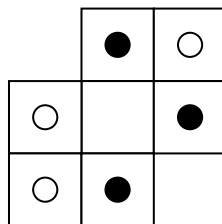
START:



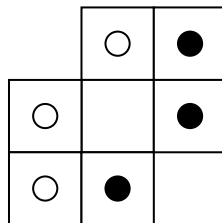
Først flytter man 6 trekk via sentrum i figuren, til brikkene ligger slik:



På 4 trekk forskyver man brikkene nederst til venstre til de ligger slik:

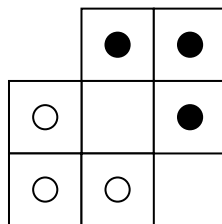


På 4 trekk forskyver man brikkene øverst til høyre til de ligger slik:

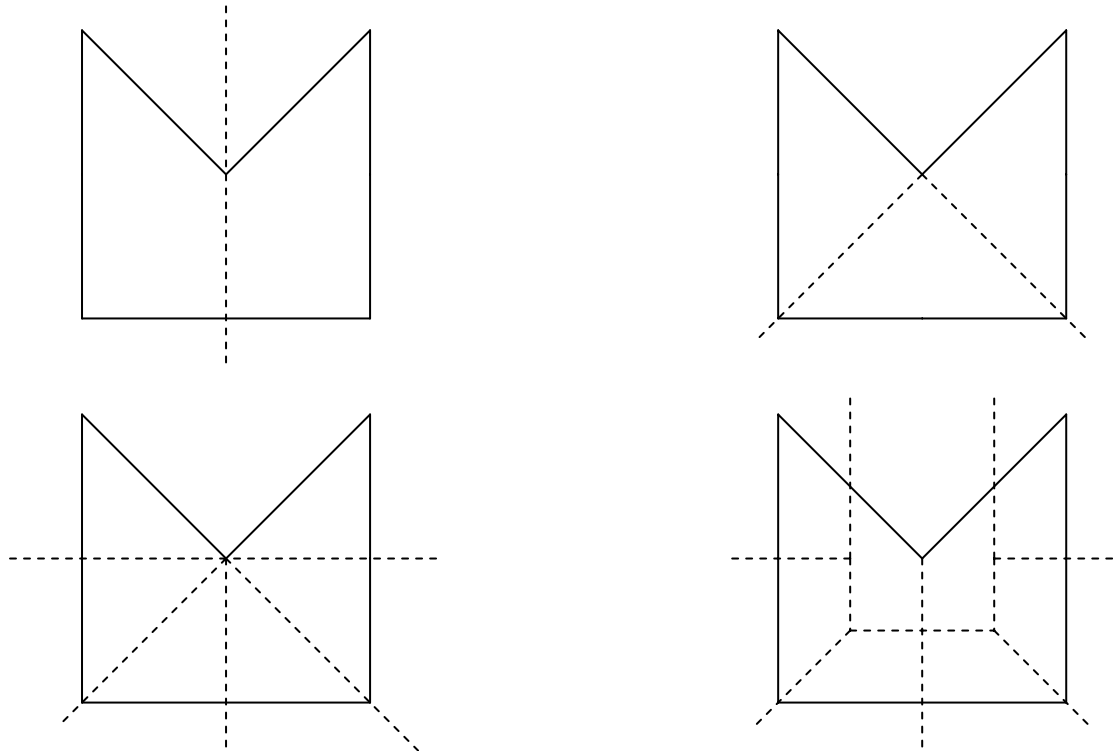


Da gjenstår kun to forskyvninger og et hopp via sentrum i figuren for at brikkene er i mål:

MÅL:



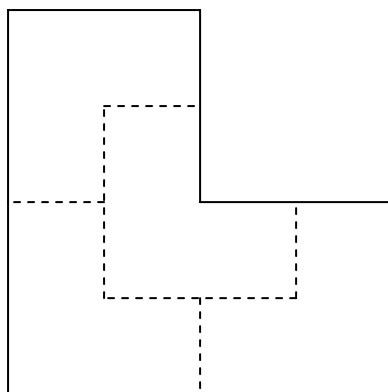
IDENTISKE DELER



Det er viktig at alle delene har det samme arealet. Det er 12 enhetskvadrater i figuren. Sammenhengen mellom antall deler og arealet på hver del er indikert i tabellen nedenfor.

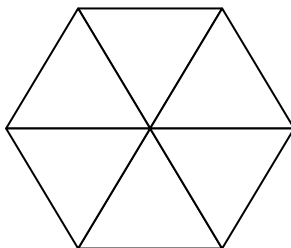
Antall deler	Areal pr. del
2	6
3	4
6	2
8	1.5

Løsningen på ekstraoppgaven:



INNHEGNINGER

- (i) Den første innhegningen krever 3 gjerdelengder (fyrstikker), og for hver ny innhegning som legges til kreves det 2 gjerdelengder.
For å bygge 5 innhegninger må man altså bruke $3 + (2 \times 4) = 11$ gjerdelengder.
- (ii) 6 innhegninger krever $3 + (2 \times 5) = 13$ gjerdelengder. Det er riktignok mulig å klare seg med 12 gjerdelengder dersom man bygger slik:



Men i denne oppgaven så skal innhegningene ligge på linje.

- (iii) For å bygge 7 innhegninger kreves $3 + (2 \times 6) = 15$ gjerdelengder.
- (iv) For å finne ut hvor mange innhegninger som kan lages med 23 gjerdelengder kan man sette opp en ligning: $3 + 2(c-1) = 23$ der c står for antall innhegninger. Løser man denne ligningen finner man ut at det kan bygges 11 innhegninger av 23 gjerdelengder.

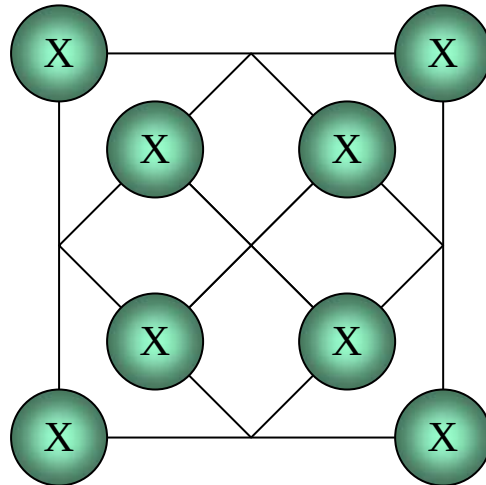
Innhegninger	Gjerdelengder
1	3
2	5
3	7
4	9
5	11
6	13
7	15

Svarene på ekstraoppgavene er $2n + 1$ og $\frac{1}{2}(p - 1)$.



KRYSTALLGITTER

Begynner med det største tallet, nemlig 15. For at summen av 15 og to andre tall skal bli 20, kan man enten velge 2 og 3 eller 1 og 4. Ingen andre brikker kan benyttes, så 15 kan kun legges på en plass der den inngår i to addisjoner. Disse plassene er markert med et kryss på figuren under.



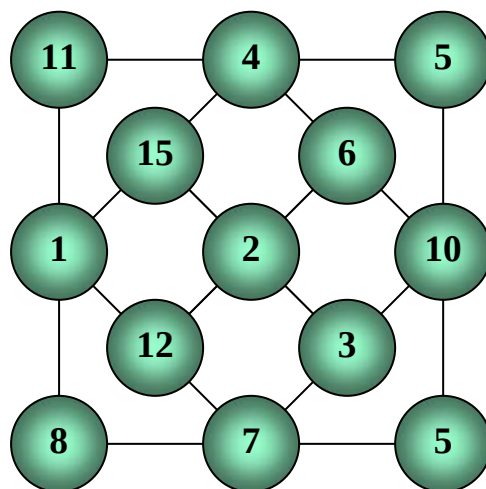
Fordi figuren er symmetrisk og alle felt foreløpig er ledige trenger vi kun å betrakte et av hjørnene og en av de indre posisjonene.

Dersom 15 legges i et av de ytre hjørnene, så må 1 og 4 ligge langs den ene sidekanten og 2 og 3 ligge langs den andre. For at summen langs linjen som går mellom midtpunktene på sidekantene skal bli 20, trenger vi 13, 14, 16 eller 17. Det er ingen brikker med disse tallene, så 15 kan ikke ligge i noe ytre hjørne.

Dersom 15 plasseres i en av de indre posisjonene så vil 1 og 4 ligge langs en av skrålinjene og 2 og 3 langs en skrålinje som går gjennom sentrum av figuren eller omvendt.

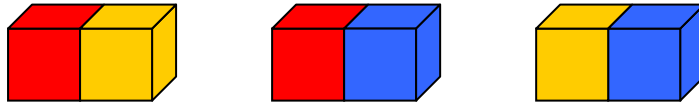
Ser nå på det minste tallet som er 1. For at summen av en og to av de andre tallene skal bli 20 trenger vi 7 og 12, eller 15 og 4, eller 11 og 8. 1 kan altså inngå i tre forskjellige summer, noe som tyder på at brikken bør plasseres midt på en av de ytre sidene.

Da gjenstår det bare litt prøving og feiling før man kommer fram til løsningen:

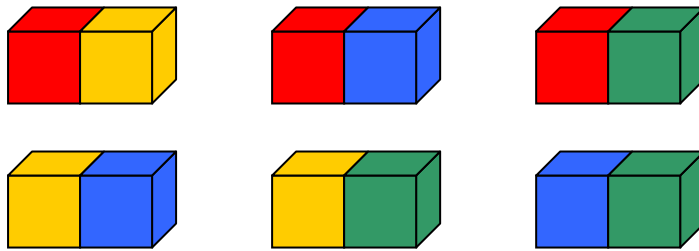


KUBEKOMBINASJONER

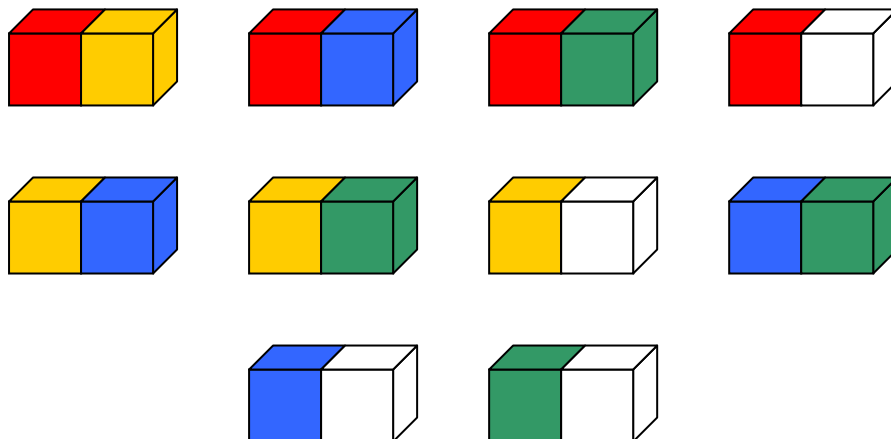
1. Man kan sette sammen 3 ulike kombinasjoner av 2 kuber når en benytter 3 forskjellige farger:



2. Man kan sette sammen 6 ulike kombinasjoner av 2 kuber når en benytter 4 forskjellige farger:

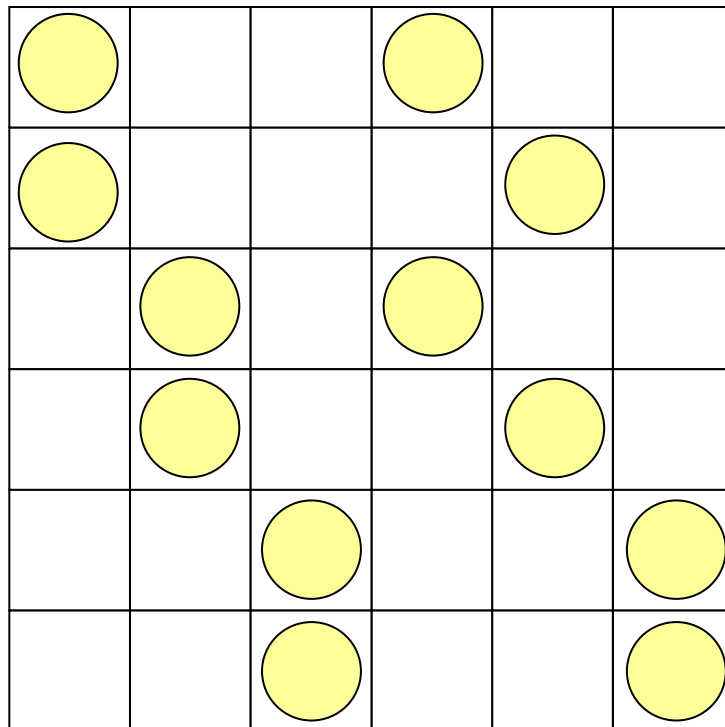


3. Man kan sette sammen 10 ulike kombinasjoner av 2 kuber når en benytter 5 forskjellige farger:



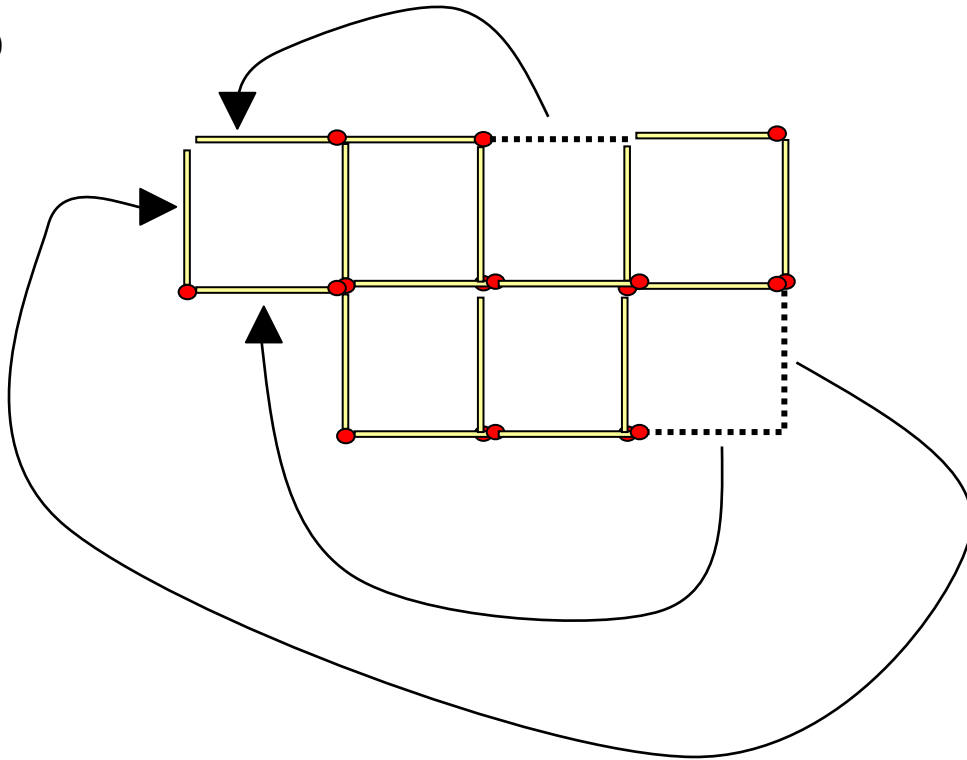
KUN TO

En løsning, av flere mulige, er denne:

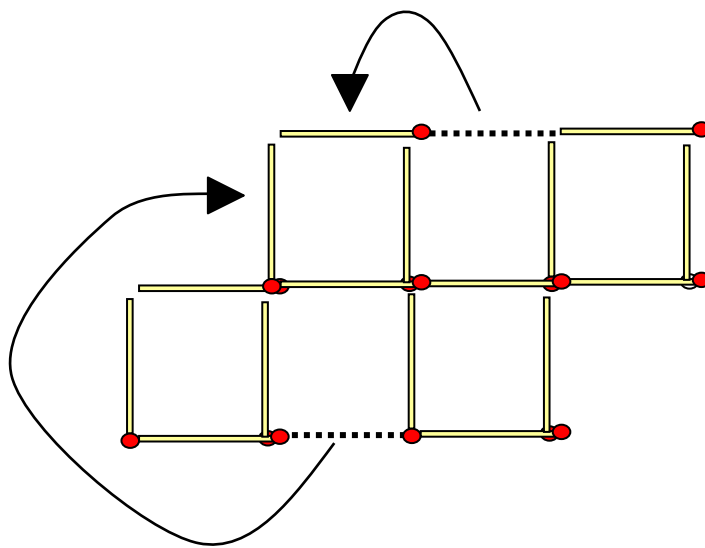


KVADRATER

(i)

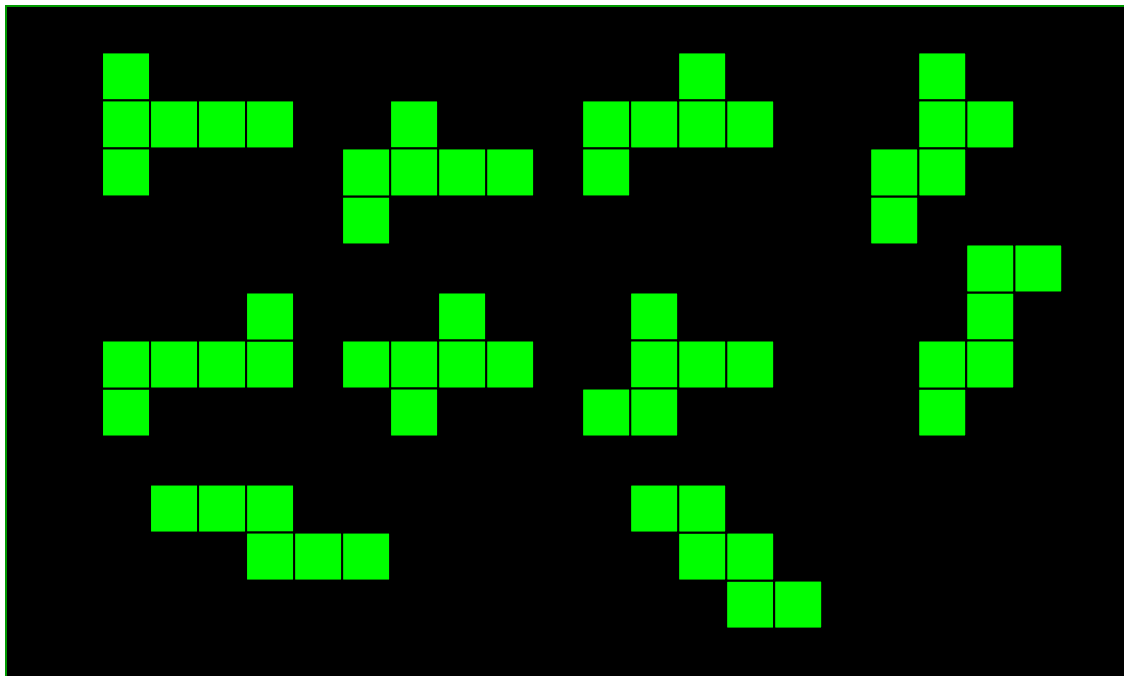


(ii)

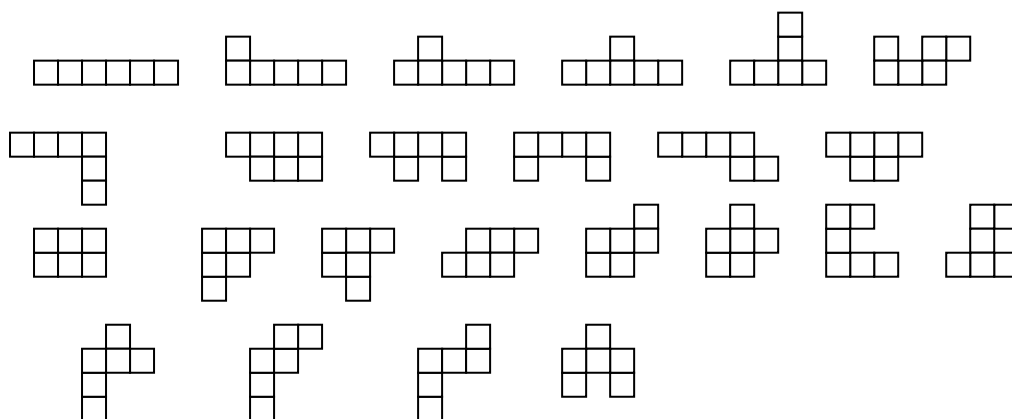


LAG EN KUBE

Det er 10 kombinasjoner i tillegg til den vist på oppgavearket som kan brettes sammen til kuber. Disse er:

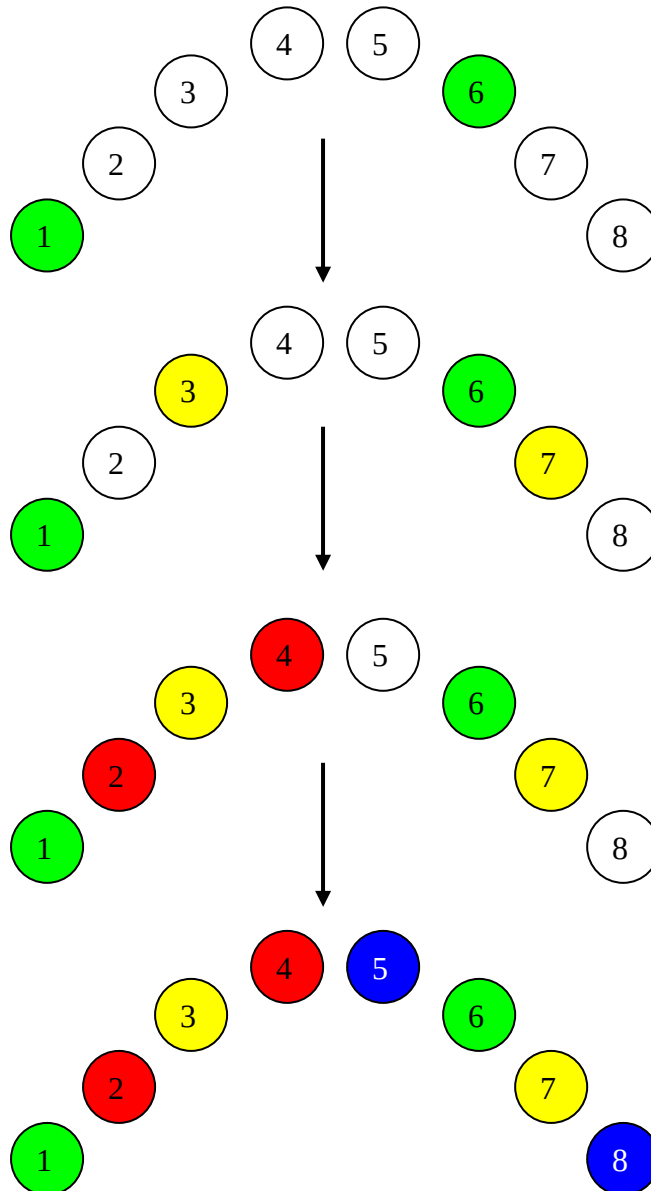


De gjenværende 24 kombinasjonene kan ikke brettes sammen til en kube:



MELLOMROM

Dersom det skal være 4 brikker mellom de grønne brikkene, så kan en grønn brikke plasseres i posisjon 1 og den andre i posisjon 6. Her er det bare å prøve å feile seg fram.



MINUSMAGI

Summen av første og siste tall i raden er 6 og trekker vi fra tallet i midten av raden så får vi 5. Svaret skal derfor bli 5 i hver av de andre radene, kolonnene og diagonalene. Brikkene kan ordnes i grupper på (3,5,7) og (6,9,8) siden $3+5-7=5$ og $6+9-8=5$. Sørger vi i tillegg for å plassere 5 i midten av kvadratet, vil også svaret langs hver diagonal bli 5.

Løsning:

2	1	4
3	5	7
6	9	8

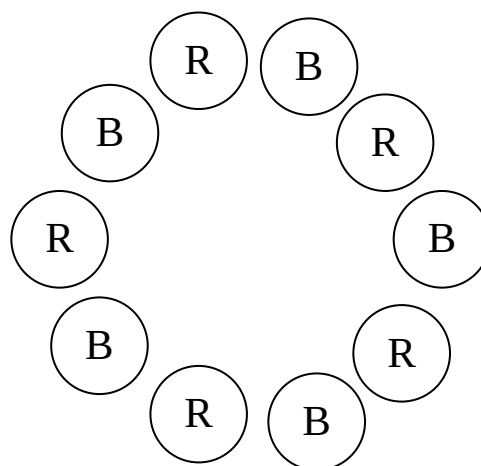
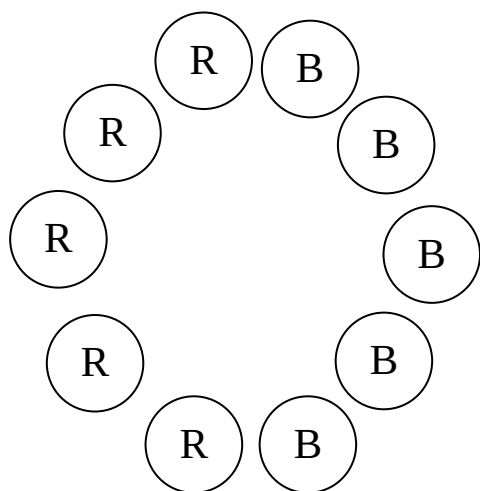


OMBYTTE

(i) Det minste antall ombytter for 5 røde og 5 blå brikker er 10.

(ii) For 6 røde og 6 blå er 15 det minste antall ombytter.

Ekstraoppgaven tar for seg de røde og blå brikkene i sirkel. Nå er det nok med bare 6 trekk for å bytte om 5 røde og 5 blå brikker til alternerende rekkefølge:



For 6 røde og 6 blå brikker i sirkel er 9 det minste antall ombytter som må til.

OPP NED

(i) Start: X X X O O O
 X O O O O O
 X O X X O O
 Slutt: X O X O X O

(ii) Start: X X X O O O
 X X O X O O
 O O O X O O
 Slutt: O O O X X X

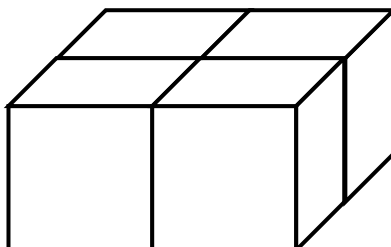
(iii) Start: X X X O O O
 O O X O O O
 O O O X O O
 Slutt: O O O O X O

(iv) Start: X X X O O O
 X O O O O O
 X X X O O O
 Slutt: X O O O O O

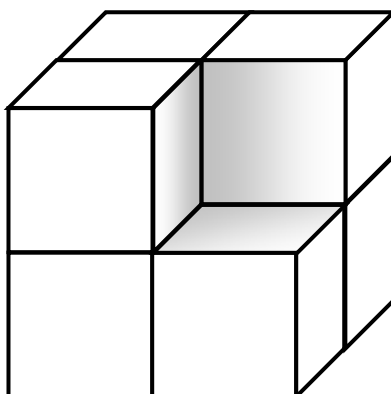
Ekstra: Start: X X X O O O
 O O X O O O
 Slutt: O O O X O O

OVERFLATEAREAL

- (i) Det minste overflatearealet inntreffer når flest mulig sider dekker hverandre. Dersom vi legger kubene ved siden av hverandre som vist nedenfor, blir overflatearealet bestående av 16 sideflater. Det er det minste arealet.



- (ii) Det minste mulige overflatearealet som kan oppnås ved å sette sammen 7 kuber bestående av 24 sideflater. Dette oppnås ved å sette klossene i 2x2x2 formasjon for deretter å fjerne en av klossene.

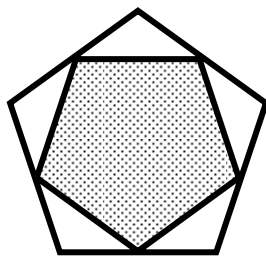


Ekstra:

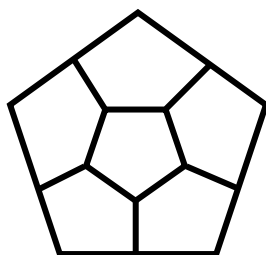
Antall kuber	Minste mulige overflateareal
1	6
2	10
3	14
4	16
5	20
6	22
7	24

PENTAGON

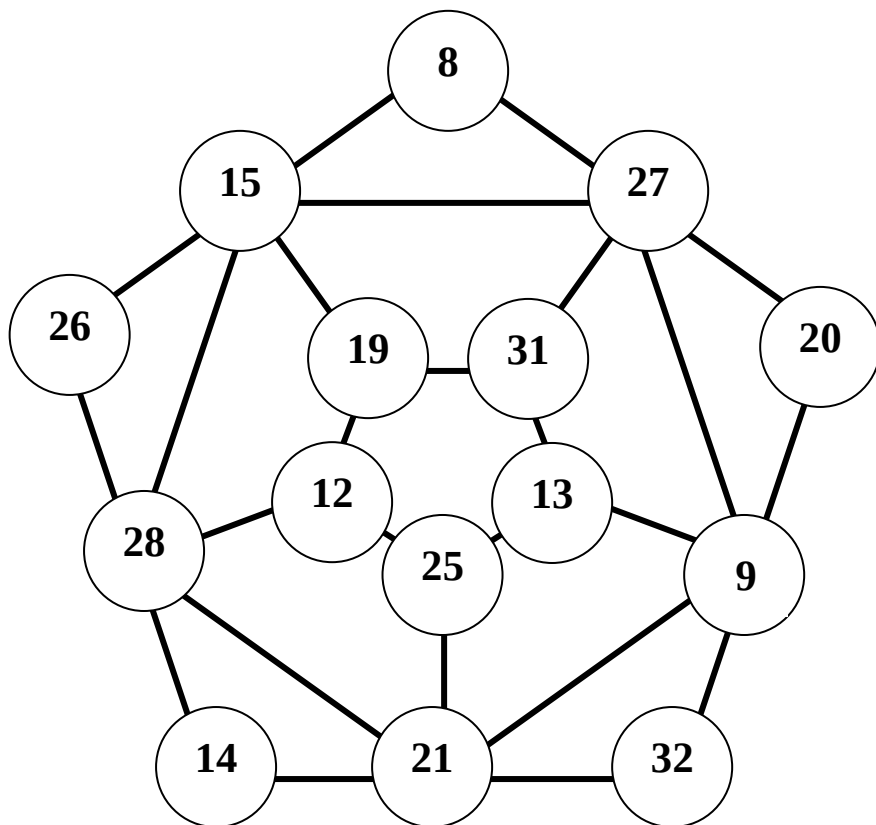
To av femkantene er;



De andre seks femkantene er;



I korridorene langs den skraverte femkanten øverst, mangler det 9 vakter. Når brikken med 9 er plassert, er det lett å plassere de andre brikkene:



PRODUKTER

(i) For brikkene fra 1 til 4 er løsningene

$$3 \times 4 = 12 \quad \text{eller}$$

$$4 \times 3 = 12$$

(ii) Fra brikkene fra 1 til 5 er løsningene

$$13 \times 4 = 52 \quad \text{eller}$$

$$4 \times 13 = 52$$

(iii) For brikkene fra 1 til 6 er løsningene

$$3 \times 54 = 162 \quad \text{eller}$$

$$54 \times 3 = 162$$

Det er ennå ikke oppdaget noen løsning for tallene fra 1 til 7.

PYRAMIDER

1. Antall kuber i en 2-etasjers pyramide er: $1 + 9 = 10$
2. Antall kuber i en 3-etasjers pyramide er: $1 + 9 + 25 = 35$
3. Antall kuber i en 4-etasjers pyramide ville vært $1 + 9 + 25 + 49 = 84$. En femetasjers pyramide har en grunnflate på 81 kuber. Derfor er antall kuber i en 5-etasjers pyramide: $1 + 9 + 25 + 49 + 81 = 165$
4. Antall kuber i en n-etasjers pyramide er $1 + 9 + 25 + \dots + (2n - 1)^2 = \frac{(2n - 1)2n(2n + 1)}{6}$



PÅFØLGENDE TALL

Totalen i rad 1 = 21

Totalen i rad 2 = 27

Totalen i rad 3 = 33

Totalen i kolonne 1 = 9

Totalen i kolonne 2 = 27

Totalen i kolonne 3 = 45

Totalen langs ↘ diagonalen = 27

Totalen langs ↗ diagonalen = 27

Hvis 17 flyttes fra den tredje kolonnen til den første kolonnen vil det se slik ut:

1	7	13
3	9	15
5	11	
17		

Totalen i hver kolonne blir da henholdsvis 26, 27 og 28.

En mulig løsning av ekstraoppgaven er:

15	1	11
5	9	13
7	17	3

RADER OG KOLONNER

(i)

1	1	1	1
1			1
1			1
1	1	1	1

(ii)

2		1	2
			1
1			
2	1		2

(iii)

3			3
3			3

(iv)

		3	
3			
			3
	3		

REGNEOPERASJONER

Løsningen er:

4	+	6	÷	2	= 7
+		÷		X	
9	÷	3	+	5	= 8
-		X		-	
8	-	1	X	7	= 1
= 5		= 2		= 3	

Husk at gange og deling utføres før pluss og minus, når det ikke er parenteser.

REKTANGLER

Med 24 kvadratiske brikker kan man lage 4 ulike rektangler: (24 X 1, 12 X 2, 8 X 3 og 6 X 4).

Antall brikker	Antall rektangler
1	1
2	1
3	1
4	2 (4 X 1, 2 X 2)
5	1
6	2 (6 X 1, 3 X 2)
7	1
8	2 (8 X 1, 4 X 2)
9	2 (9 X 1, 3 X 3)
10	2 (1 X 10, 2 X 5)
11	1
12	3 (12 X 1, 6 X 2, 4 X 3)
13	1
14	2 (14 X 1, 7 X 2)
15	2 (15 X 1, 5 X 3)
16	3 (16 X 1, 8 X 2, 4 X 4)
17	1
18	3 (18 X 1, 9 X 2, 6 X 3)
19	1
20	3 (20 X 1, 10 X 2, 5 X 4)
21	2 (21 X 1, 7 X 3)
22	2 (22 X 1, 11 X 2)
23	1
24	4 (24 X 1, 12 X 2, 8 X 3, 6 X 4)

Dersom antall brikker er et primtall, så er det bare mulig å lage en rektangelform av dem.

Svaret på ekstraoppgaven er 60, 72, 90 og 96. Alle disse kan sette sammen 6 ulike rektangler.

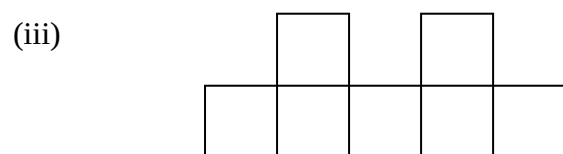
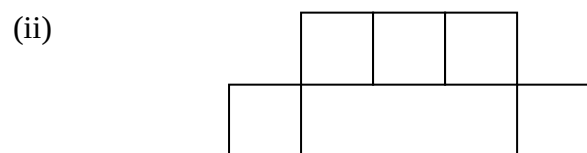
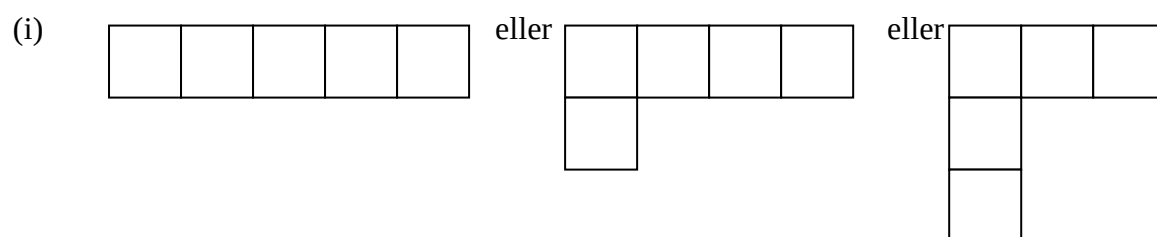
For 60 brikker: (60 X 1, 30 X 2, 20 X 3, 15 X 4, 12 X 5, 10 X 6).

For 72 brikker: (72 X 1, 36 X 2, 24 X 3, 18 X 4, 12 X 6, 9 X 8).

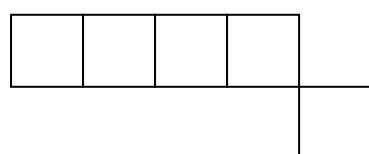
For 90 brikker: (90 X 1, 45 X 2, 30 X 3, 18 X 5, 15 X 6, 10 X 9).

For 96 brikker: (96 X 1, 48 X 2, 32 X 3, 24 X 4, 16 X 6, 12 X 8).

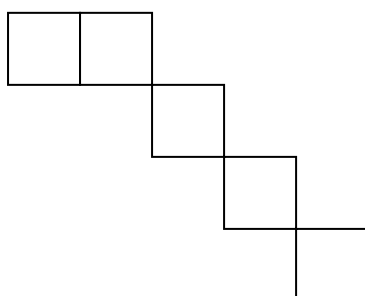
RUNDT KVADRATENE



Ekstra:



(14 enhetslengder omkrets)



(18 enhetslengder omkrets)

SETT SAMMEN KOLONNENE

1. Siden den første kolonnen skal inneholde 8 færre kuber enn den andre kolonnen, starter vi med å legge en kube i den første kolonnen. I følge reglene får vi da denne fordelingen av kuber i de ulike kolonnene:

Kolonne 1	Kolonne 2	Kolonne 3	Kolonne 4	Totalt
1	9	6	$4\frac{1}{2}$	$20\frac{1}{2}$

Siden vi ikke har halve kuber, øker vi antall kuber i første kolonne til 2 og får:

Kolonne 1	Kolonne 2	Kolonne 3	Kolonne 4	Totalt
2	10	7	5	24

Vi har dermed benyttet alle kubene og funnet løsningen.

2. Anta det skal være 1 kube i den andre kolonnen og 1 kube i den tredje kolonnen, da må det være 2 kuber i den fjerde kolonnen. Den første kolonnen vil da inneholde $2\frac{1}{2}$ kube. Siden dette ikke er mulig så dobler vi antall kuber i tredje kolonne og får:

Kolonne 1	Kolonne 2	Kolonne 3	Kolonne 4	Totalt
5	1	2	3	11

Vi kan og øke antall kuber i andre kolonne til 2 og få:

Kolonne 1	Kolonne 2	Kolonne 3	Kolonne 4	Totalt
5	2	2	4	13

Dersom vi øker tallet på kuber i andre kolonne vil vi hele tiden få en odde totalsum og totalsummen vi er på utkikk etter er 20; altså et partall. Vi kan derimot øke tallet på kuber i tredje kolonne til 4, og dette gir oss løsningen:

Kolonne 1	Kolonne 2	Kolonne 3	Kolonne 4	Totalt
10	1	4	5	20

Når det gjelder ekstraoppgaven så skal den løses algebraisk.

1. La x være antall kuber i første kolonne. Da har vi:

Andre kolonne: $x + 8$ kuber.

Tredje kolonne: $x + 5$ kuber.

Fjerde kolonne: $\frac{x+8}{2}$ kuber.

Av dette får vi:

$$x + (x + 8) + (x + 5) + \left(\frac{x}{2} + 4\right) = 24$$

$$\frac{7x}{2} + 17 = 24$$

$$\frac{7x}{2} = 7$$

$$x = 2$$

Som gir løsningen 2, 10, 7, 5.

2. La x være antall kuber i første kolonne og y være antall kuber i andre kolonne.

Vi får da:

Første kolonne: $\frac{5x}{2}$ kuber.

Andre kolonne: $x + y$ kuber.

Av dette får vi:

$$\frac{5x}{2} + x + y + (x + y) = 20$$

$$\frac{9x}{2} + 2y = 24$$

der verdiene av x og y er positive heltall. Antall kuber i første kolonne må være et partall.

$x = 2$ fører til at y ikke blir heltall

$x = 4$ gir $y = 1$

$x = 8$ gir negativ y .

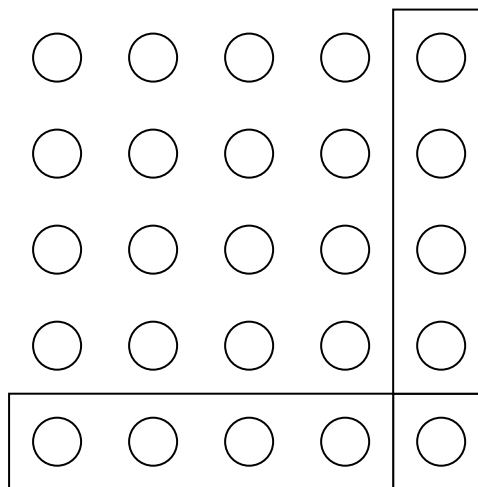
Den eneste løsningen er 10, 1, 4, 5.

SETT SAMMEN KVADRATER

Antall brikker i kvadratet	Antall brikker som må legges til
4	5
9	7
16	9
25	11
36	13
49	

For å sette sammen det neste større kvadratet trengs 15 brikker.

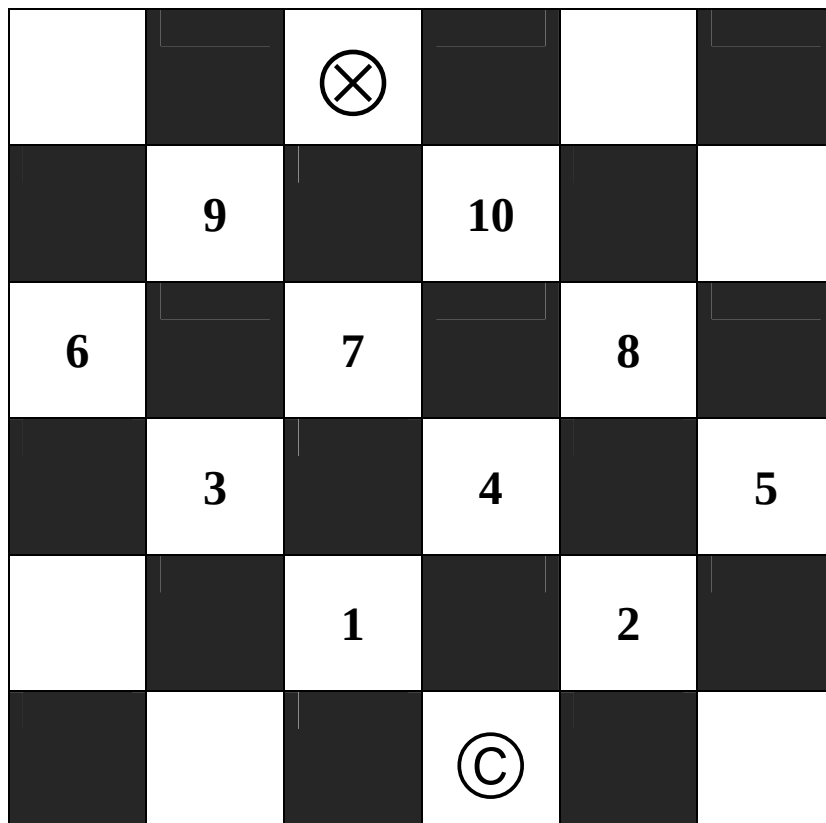
Hvis n^2 er antall brikker i et kvadrat så er lengden på kvadratets sider lik n . For å lage det neste større kvadratet legger man to rektangler av størrelse $n \times 1$ samt et lite kvadrat av størrelse 1×1 til utgangspunktet.



Derfor må vi legge til $2n + 1$ brikker for å få det neste større kvadratet.

SJAKKBRETT

De eneste rutene © kan benytte for å flytte til ⊗, er nummerert fra 1 til 10 i figuren nedenfor.



Det er 10 forskjellige veier som kan benyttes. Disse er:

- 1-3-6-9
- 1-3-7-9
- 1-3-7-10
- 1-4-7-9
- 1-4-7-10
- 1-4-8-10
- 2-5-8-10
- 2-4-8-10
- 2-4-7-10
- 2-4-7-9

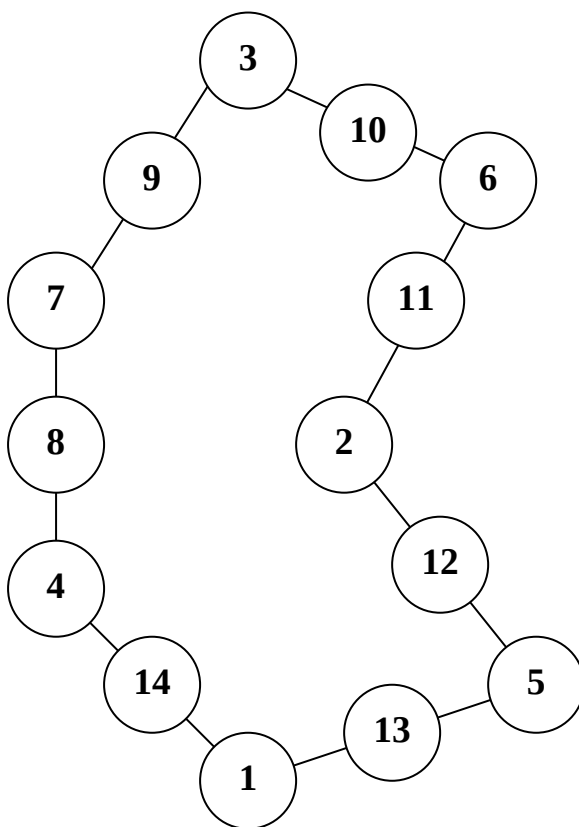
SJUKANT

Siden tallene fra 1 til 7 blir liggende på knutepunktene mellom de rette linjene, vil de telles to ganger når vi legger sammen totalen rundt hele sjukanten. Totalsummen for de sju sidene blir:

$$(1 + 2 + \dots + 13 + 14) + (1 + 2 + \dots + 6 + 7) = 105 + 28 = 133$$

Dersom vi deler 133 på 7 så får vi 19, som da blir summen langs hver enkelt rette linje.

La oss se på den siden med 14 midt på. For at summen skal bli 19, må vi enten benytte 1 og 4, eller 2 og 3. 1, 2 og 3 kan ikke legges mellom 8 og 14, for da ville vi ha trengt 8, 9 eller 10 mellom 8 og 9 og disse tallene har vi ikke. Derfor er det bare 4 som kan legges mellom 8 og 14. Da må 1 legges mellom 14 og 13. Dette fører igjen til at 5 må legges mellom 13 og 12 og slik fortsetter det til vi har den endelige løsningen:



SKYSKRAPERE

Skyskraperne som kan sees både forfra og fra siden er henholdsvis 3, 4, 5, 6 og 7 etasjer høye.

Disse kan plasseres entydig ved å benytte plasseringen forfra som x koordinat og plasseringen fra siden som y koordinat. Den største skyskraperen får da plasseringen (6, 1), seks-etasjers skyskraperen får (1, 2), fem-etasjeren får (3, 4), fire-etasjeren får (5, 5) og tre-etasjeren blir plassert i (4, 3).

Den minste bygningen vises bare fra siden. Når vi ser bygningene forfra er den borte, altså den må ligge bak en større bygning. Mulige plasseringer er (1, 6), (3, 6), (4, 6), (5, 6) og (6, 6).

To-etasjersbygget vises verken forfra eller fra siden. Det ligger skjult bak et større bygg. Vi vet derfor at den ikke ligger på bakerste rad, for der ligger en-etasjeren. Etter litt prøving og feiling kommer man frem til at det kan ligge i en av følgende posisjoner; (4, 5), (3, 5), (1, 3), (1, 4), (1, 5).

Her er løsningen tegnet inn:

1		1	1	1	1
2		2	2	4	
2		5			
2			3		
6					
					7

Fra siden

Forfra

SNUOPERASJON

Løsning: Det er flere måter å løse denne oppgaven på.
Posisjonen bestemmes ut fra hvilken rad og kolonne (r, k) brikken ligger i. En av løsningene er denne:

Flytt $(4, 3)$ til $(2, 1)$

Flytt $(4, 2)$ til $(2, 4)$

Flytt $(1, 1)$ til $(3, 1)$

Flytt $(1, 4)$ til $(3, 4)$

Flytt $(3, 2)$ til $(1, 4)$

Flytt $(3, 3)$ til $(1, 1)$

Flytt $(1, 2)$ til $(3, 2)$

Flytt $(1, 3)$ til $(3, 3)$

Flytt $(2, 2)$ til $(4, 2)$

Flytt $(2, 3)$ til $(4, 3)$

SPRINGER PÅ TUR

I et rutenett på 3x3 kan springeren nå 7 andre felter uten å være innom noe felt mer enn en gang:

7	4	1
2		6
5	S	3

Uansett hvor springeren starter kan den nå 7 på 7 andre felter:

2	7	4
5		1
S	3	6

Dersom en starter i et 4x4 rutenett kan springeren nå 14 andre felter uten å være innom samme felt mer enn en gang:

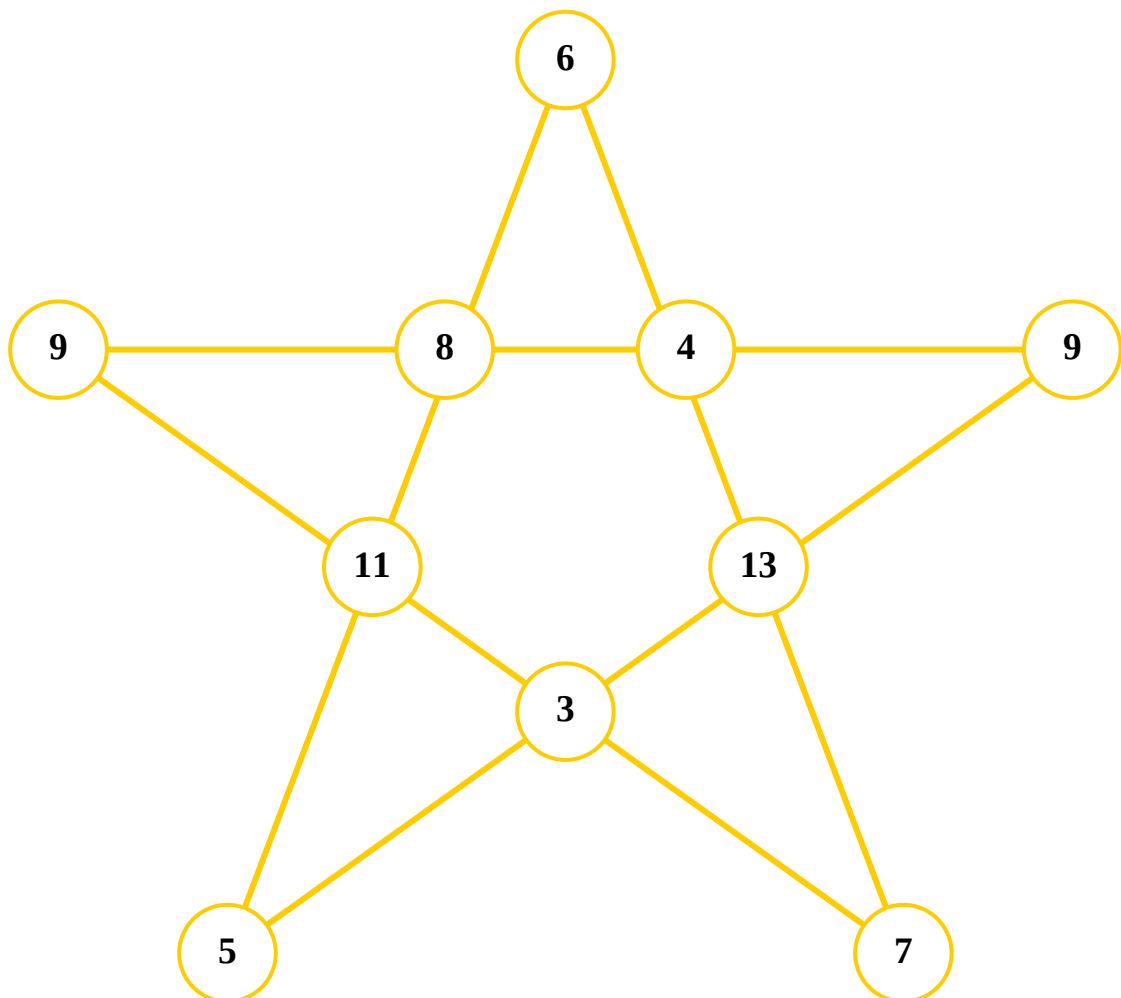
12	7	2	5
1	4	13	10
8	11	6	3
	S	9	14

STJERNEADDISJON

Summen langs den rette horisontale linjen er allerede opp i 18 så i de ledige feltene må vi plassere to tall som summeres til 12. Her har vi valgt mellom 4 og 8 eller 5 og 7.

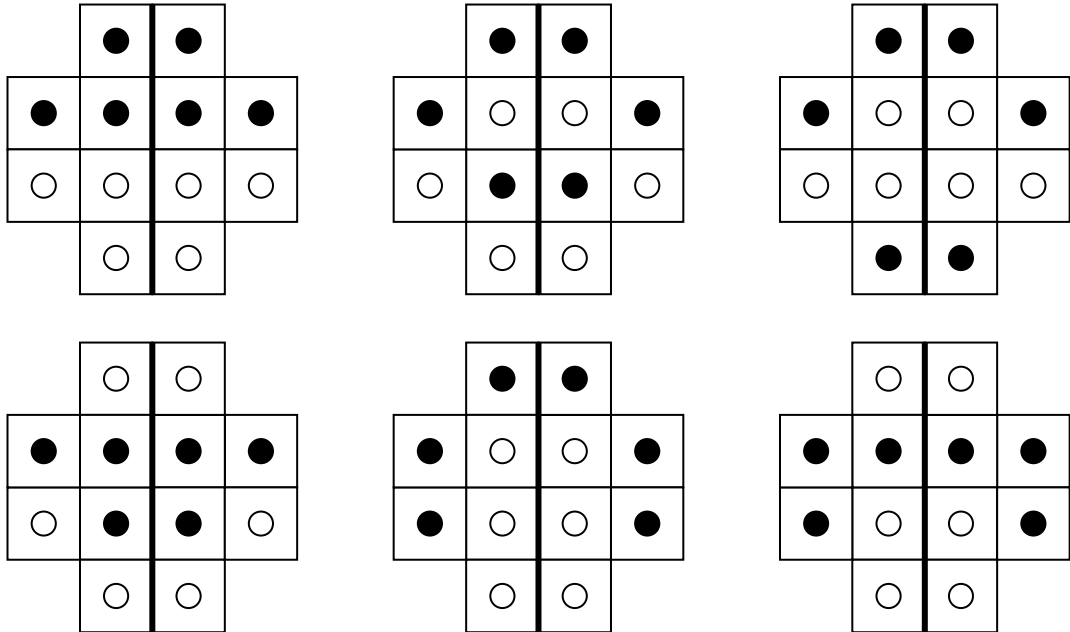
Ved prøving og feiling kommer vi frem til at det bare er ved å plassere 4 og 8 i de ledige feltene at summen kan bli 30 langs de andre rette linjene.

Løsningen vises nedenfor.

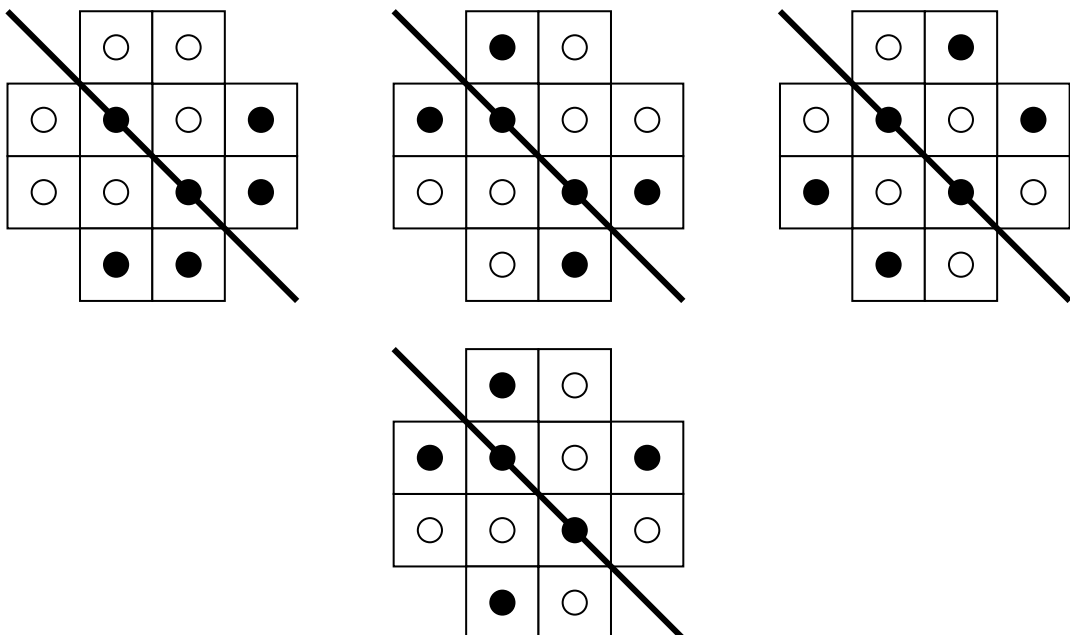


SYMMETRISKE MØNSTER

- (i) Det kan dannes 6 symmetriske mønster om den lodrette linja i midten;



- (ii) Dersom en velger symmetriaksen på tvers, oppdager en ytterligere fire symmetrier;



TALL I FARGER

Start med å få plassert fargene rett. Plasser de blå brikkene slik at det kun er en i hver rad, kolonne og hoveddiagonal. De kan f. eks. plasseres i (1, 1), (4, 2), (2, 3) og (3, 4), der det første tallet viser til raden, og det andre viser til kolonnen brikken befinner seg i.

Plasser deretter de gule brikkene som et speilbilde av de blå brikkene om den midtre horisontale linjen i rutenettet. Altså i (1, 4), (1, 2), (3, 2) og (2, 4).

Plasser så de røde brikkene som et speilbilde av de blå om den midtre vertikale linjen i rutenettet, det vil si i feltene (1, 4), (2, 2), (3, 1) og (4, 3).

De grønne brikkene plasseres i de gjenværende fire feltene.

Til slutt bytter du om på brikkene av samme farge slik at det bare er en av hvert tall i hver rad, kolonne og hoveddiagonal.

En mulig løsning er denne:

B1	Gu2	Gr3	R4
Gr4	R3	B2	Gu1
R2	Gr1	Gu4	B3
Gu3	B4	R1	Gr2



TALLRUTENE

1. Vi går tom for brikker i den tiende ruta siden $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 = 45$.
2. For å fylle hele brettet ville vi ha trengt $1 + 2 + \dots + 15 + 16 = 136$ brikker.
3. Vi går tom for brikker på den sjette ruta siden $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ og vi kun har 19 brikker igjen.
4. For å fylle hele brettet ville vi ha trengt $2^{16} - 1 = 65\,535$ brikker.

*

Når det gjelder ekstraoppgaven så trenger vi $1 + 2 + \dots + 63 + 64 = 2080$ brikker for å fylle hele sjakkbrettet. Dersom antallet brikker skulle doble seg for hver nye rute ville vi ha trengt $2^{64} - 1 = 184\,467\,440\,737\,095\,511\,615$ brikker.

TALLTREKANTEN

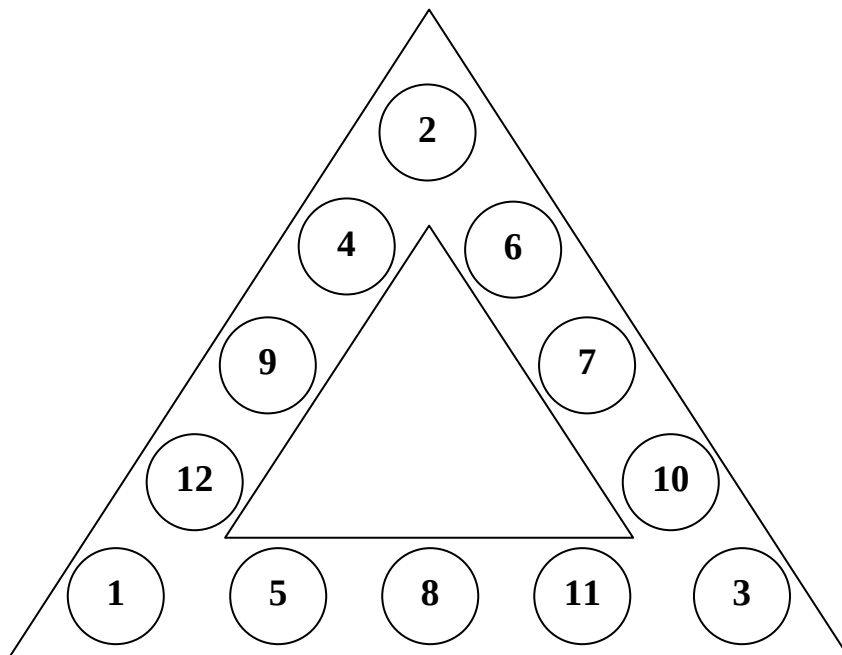
Det er 3 ledige felter igjen langs hver side av trekanten. Summen av de ledige feltene langs hver side må være henholdsvis 23, 24 og 25 dersom totalsummen skal bli 28. Vi arrangerer de gjenværende brikkene i grupper på 3. I stigende rekkefølge kan dette gjøres slik:

4	5	6
7	8	9
10	11	12

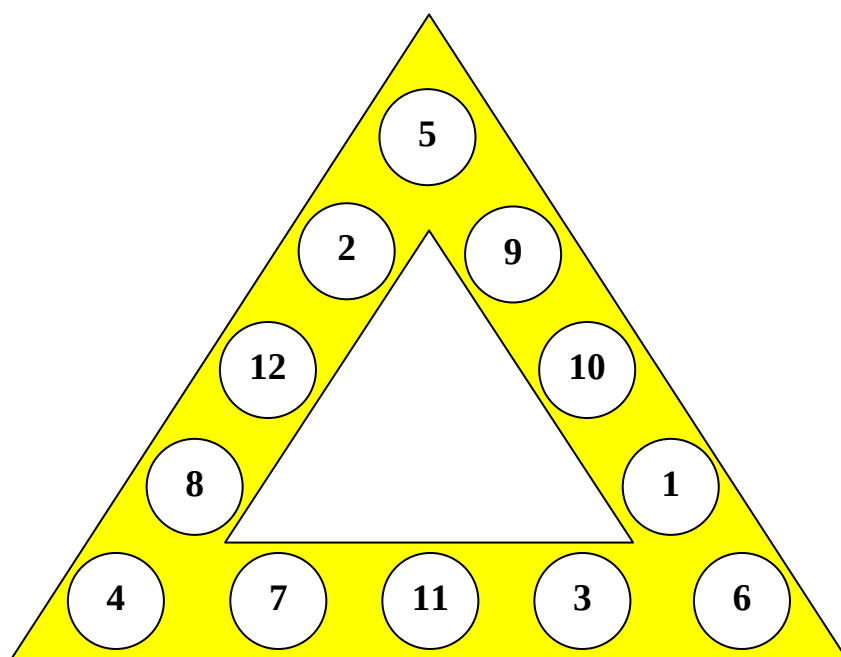
Totalen i hver kolonne er nå 21, 24 og 27. Den midterste kolonnen har riktig sum, de to andre har enten to for lite eller to for mye i sum. Derfor bytter vi om for eksempel 4 og 6 slik:

6	5	4
7	8	9
10	11	12

Totalen i hver kolonne er nå 23, 24 og 25. Dermed oppnår vi følgende løsning:



I ekstraoppgaven vil 9 av brikkene adderes en gang og 3 av brikkene vil adderes 2 ganger. Summen av de tolv brikkene er 78, mens summen av de tre sidekantene er 93. Derfor vil vi at hjørnebrikkene skal summeres til 15. I løsningen nedenfor er brikkene 4, 5 og 6 valgt, men andre løsninger ville også ha vært mulige. De gjenværende brikkene sorteres i grupper med summer på henholdsvis 20, 21 og 22. En mulig løsning er:

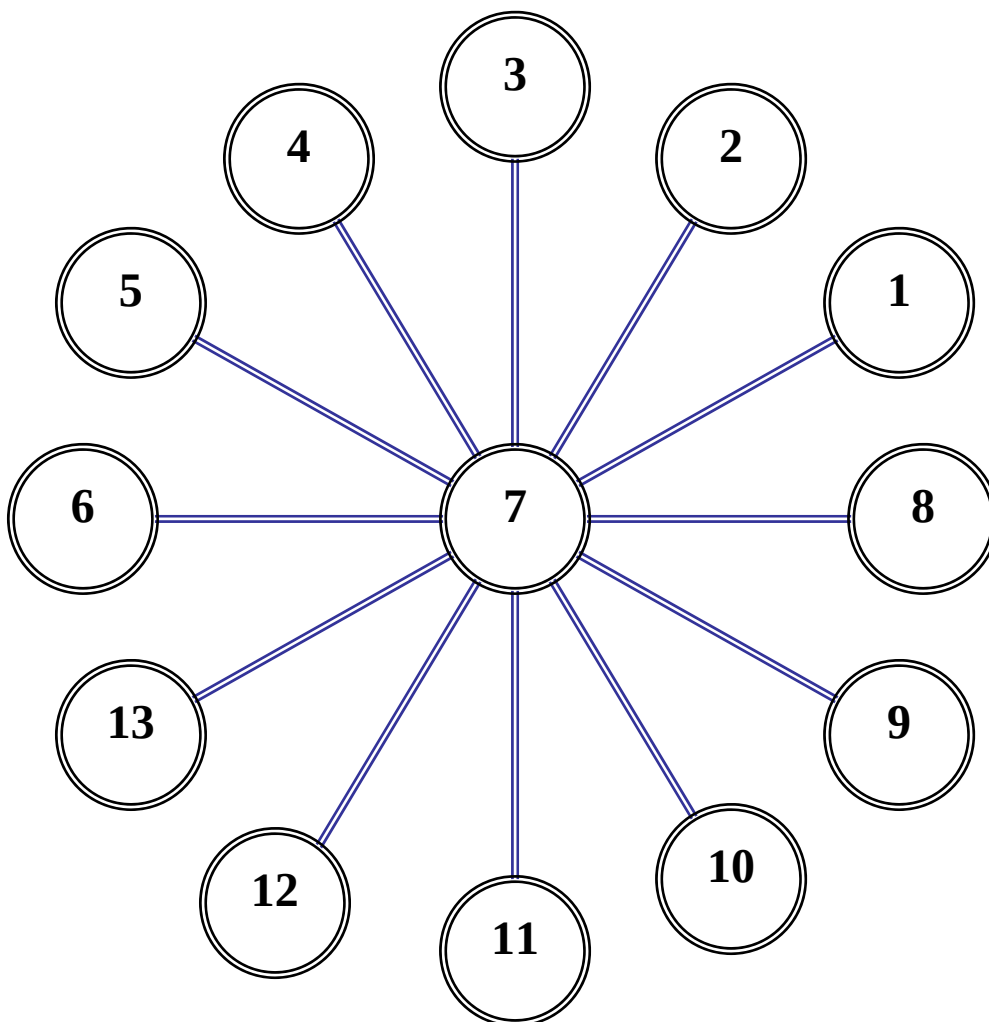


TJUEEN

12 av tallene telles en gang, mens tallet i midten telles 6 ganger. Totalsummen langs de 6 rette linjene skal være $6 \cdot 21 = 126$. På en annen side er summen av tallene fra en til 13 lik 91. Siden tallet i midten skal telles med 5 ganger til og differansen mellom 126 og 91 er 35, tyder det på at tallet i midten er 7. ($5 \cdot 7 = 35$).

Dersom 7 plasseres i midten behøver vi danne 6 par med brikker som summeres til 14. Det går ganske greit å innse at disse parene må være (6,8) (5,9) (4,10) (3,11) (2,12) og (1,13).

Dette gir følgende løsning:



TJUEFEM

- (i) Siden summen langs hver side skal være 30, må summen av alle sidene bli 120. Da blir hjørnetallene telt dobbelt opp. Summen av tallene fra 1 til 12 er 78, derfor må summen av hjørnetallene være $120 - 78 = 42$, siden disse teller dobbelt.

Det betyr at tallene i hjørnene er 9, 10, 11 og 12. Når vi vet dette er det enkelt å komme frem til denne løsningen:

9	5	6	10
8			1
2			7
11	3	4	12

- (ii) Siden summen langs hver side skal være 26, må summen av alle sidene bli 104. Som ovenfor blir hjørnetallene telt opp dobbelt, og i dette tilfelle blir summen av hjørnetallene $104 - 78 = 26$. Da kan vi for eksempel velge 5, 6, 7 og 8 som hjørnetall:

5	4	11	6
12			9
2			3
7	10	1	8

- (iii) Hvis summen langs hver side skal være 25, så må summen av hjørnetallene være 22. Hjørnetallene kan blant annet velges til å være 1, 3, 6 og 12 og vi oppnår følgende løsning:

1	11	10	3
4			9
8			7
12	2	5	6

EKSTRAOPPGAVEN

Hvilke andre summer er mulige?

Basert på løsningsmetoden ovenfor, ser vi at den minste summen av hjørnetall som kan oppnås er $1+2+3+4 = 10$. Når dette legges til 78 får vi 88 som totalsum av alle sidene. Det vil si at summen langs hver enkelt side er 22. Dette er minste mulige sum for hver side.

For å finne den høyest mulige summen, tar vi for oss de største mulige hjørnetallene nemlig 9, 10, 11 og 12. Fra (i) vet vi at dette gir sum 30 langs hver side som også er høyest mulig sum for hver side.

Alle heltallige sidesummer mellom 22 og 30 er derfor mulige.

TOTALSUMMEN

Blant tallene fra 1 til 13 er det 6 partall og 7 oddetall. I andre og fjerde rad skal to tall legges sammen til et oddetall. Da må det ene tallet være et partall og det andre et oddetall.

I andre og fjerde kolonne skal to tall legges sammen til partall, så her må enten begge være partall eller begge være oddetall. Vi kan bruke enten (6,7,12,13) eller (8,9,10,11) som vist under:

	13		6		19
	7		12		19
	20		18		

	11		8		19
	9		10		19
	20		18		

Det gjenstår nå å plassere de 5 gjenværende oddetallene og de 4 gjenværende partallene.

Totalsummen i den tredje raden og den tredje kolonnen er et oddetall, noe som indikerer at tallet i midten er et oddetall. Nå gjenstår kun litt prøving og feiling og vi er mål:

10		2		4	16
	13		6		19
1		9		11	21
	7		12		19
5		8		3	10
16	20	19	18	18	

TRE UTSAGN

De eneste brikkene som kan inngå i produktet er enten $2*3 = 6$ eller $2*4 = 8$.

Dersom vi benytter $2*4 = 8$ blir det bare igjen et eneste partall. Det vil gjøre det umulig å innfri de andre betingelsene.

Derfor benytter vi $2*3 = 6$. Det er nå to gjenværende partall (4,8) og fire gjenværende oddetall (1,5,7,9). Disse kan settes sammen i grupper på tre som (1,7,8) og (4,5,9).

Dette gir følgende mulige løsninger:

$$4+5=9$$

$$8-1=7$$

$$2*3=6$$

$$4+5=9$$

$$8-7=1$$

$$2*3=6$$

$$7+1=8$$

$$9-4=5$$

$$2*3=6$$

$$7+1=8$$

$$9-5=4$$

$$2*3=6$$

Når det gjelder ekstraoppgaven så inngår kun pluss og minusoperasjoner. Det er ingen løsning på ekstraoppgaven siden vi har 5 oddetall og 4 partall og disse er underlagt følgende regler:

$$\text{partall} + \text{partall} = \text{partall}$$

$$\text{oddetall} + \text{oddetall} = \text{partall}$$

$$\text{oddetall} + \text{partall} = \text{oddetall}$$

Antall oddetall som må til er alltid et heltallig produkt av 2, og siden vi skal plassere 5 oddetall, vil vi aldri kunne gjøre de tre utsagnene sanne.

TREKANTER

- (i) For å lage en enkelt trekant, trenger du 3 fyrstikker.
- (ii) For å lage to rader av trekanter trenger du 9 fyrstikker.
- (iii) Det er totalt 4 små trekanter i de to radene.

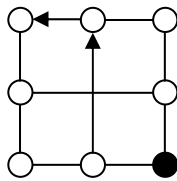
(iv)

Antall rader	Antall fyrstikker	Antall trekanter	Antall trekanter med spiss oppover
1	3	1	1
2	9	4	3
3	18	9	6
4	30	16	10
5	45	25	15

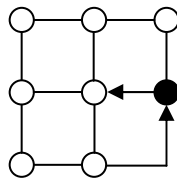
- (v) For å bygge 8 rader med trekanter kreves 108 fyrstikker. Antall trekanter blir 64.
- (vi) For n rader kreves $\frac{3n(n+1)}{2}$ fyrstikker og antall trekanter blir n^2 . Tallet på trekanter som peker oppover blir $\frac{n(n+1)}{2}$, det vil si $\frac{1}{3}$ av antallet fyrstikker.

TREKK FOR TREKK

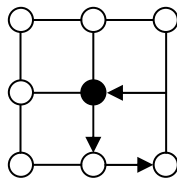
- (i) Det minste antall trekk er 13. Rekkefølgen vises nedenfor:



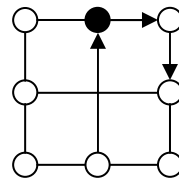
2 trekk



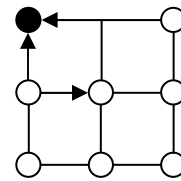
2 trekk



3 trekk

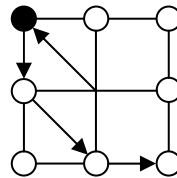
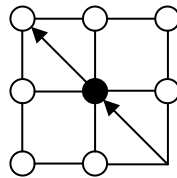


3 trekk



3 trekk

- (ii) Når diagonalene kan benyttes blir det minste antall trekk 6.



TÅRN

(i)

Antall trinn	Antall kuber
1	1
2	4
3	9
4	16
5	25

(ii) Et tårn av type A på 11 trinn vil bestå av $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + 21 = 121$ kuber.

Et tårn av type A med n trinn vil bestå av

$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n - 1) = n^2$ kuber hvilket vi vil forvente utifra tallene i tabellen.

ÅTTE SIFFER

Denne oppgaven løses med prøving og feiling. En mulig løsning er denne:

2		
5	8	4
3	1	6
7		

En løsning på den første ekstraoppgaven kan se slik ut:

	2	
5	8	6
3	1	4
	7	

Den andre ekstraoppgaven har ingen mulige løsninger siden ruten i midten er i kontakt med alle de andre rutene. Det kan derfor ikke unngås at påfølgende tall kommer i kontakt vertikalt, horisontalt eller på skrå.

