Skriftserie for

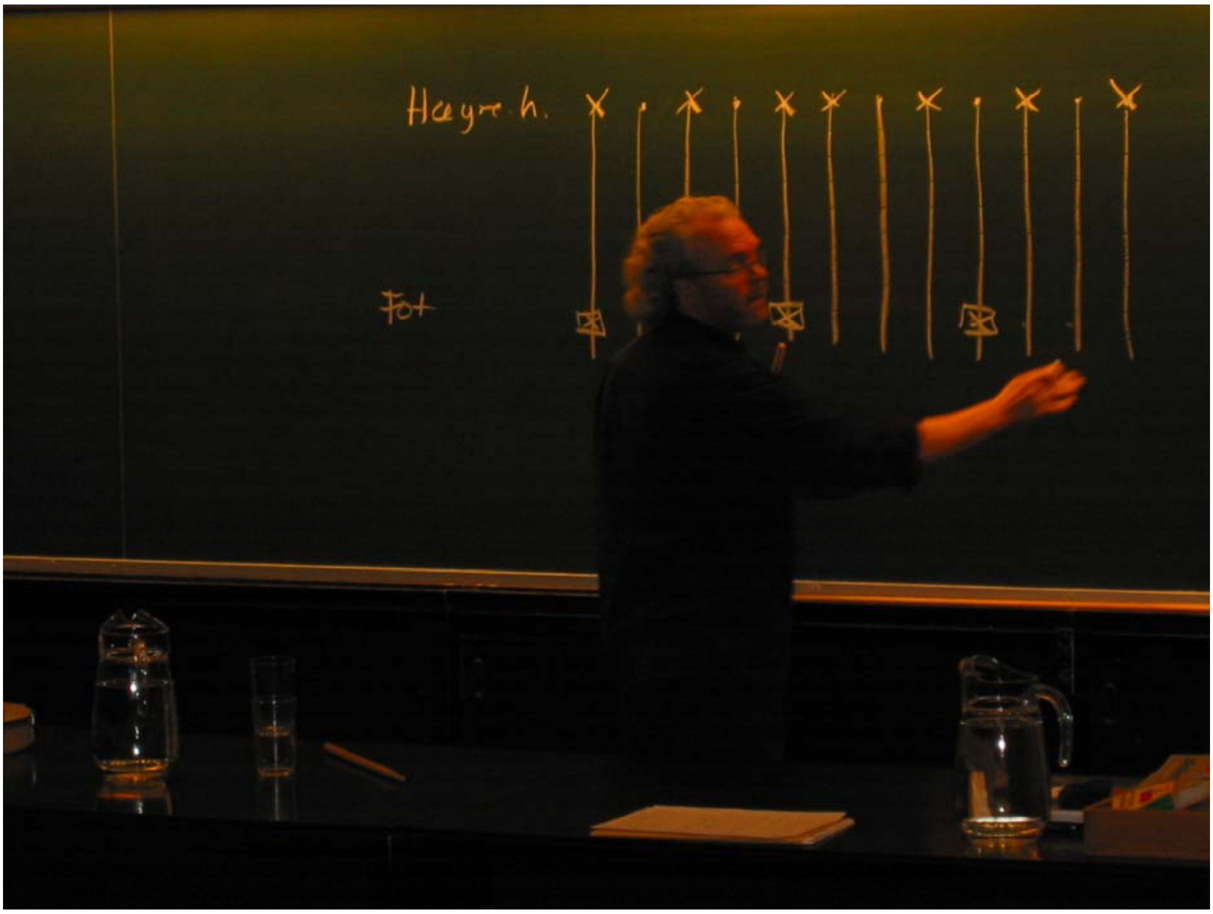
Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen

No 2 - 2004

KONFERANSERAPPORT

Popularisering av matematikk –
En måte å øke interessen for faget og et bindeledd mellom skolematematikken og matematikk som forskningsfag

Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU
17. og 18. november 2003



Nasjonalt Senter for
Matematikk i Opplæringen

Forside: Carl Haakon Waadeland forteller ivrig om musikk og matematikk
Foto: NSMO

Trykk: NTNU-trykk
ISSN 1503-5366
ISBN 82-471-6015-3

Innledning

Av Ingvill M. Stedøy

Novemberkonferansen ved Matematikksenteret skal bli noe lærere og forskerer gleder seg til hvert år. Vi satser mye på å få til et variert program med høy kvalitet. Årets konferanse, som er den andre i rekken, hadde et tema som gjorde det naturlig å ha en kombinasjon av matematikere, lærere og matematikkdidaktikere som bidragsytere. Temaet "Popularisering av matematikk" var valgt både fordi det er viktig å se hvordan vi kan nå ut med matematikken til ikke-eksperter, og fordi det er spennende og engasjerende for en stor gruppe mennesker. Det er i tillegg en møteplass for matematikere og lærere, en arena der matematikere kan teste ut sin formidlingsevne og faglige glede for lærere, der lærere kan få innsikt i mer avansert matematikk enn det vanligvis fokuseres på i skolen, og der hvor alle kan få ideer og drøfte hvordan matematikk kan gjøres spennende, forståelig og interessant for elever i skolene, og et generelt publikum.

Programmet ved årets novemberkonferanse var variert og spennende. Det var lagt opp med en kombinasjon av plenumsforedrag, og parallelle workshops og forelesninger.

Bidragene er gjengitt i denne konferanserapporten, og vi håper at det gir inspirasjon til alle som leser den.

En stor takk til alle bidragsyterne for flotte presentasjoner under konferansen, og for å ha bidratt med papers til denne konferanserapporten
.

Innhold:

How to become rich by gambling

Av Erhard Behrends

professor of mathematics at the Free University of Berlin
behrends@math.fu-berlin.de

Parrondo's paradox: a stochastic perpetuum mobile

- see next page (Author's original).

Parrondo's paradox: a stochastic perpetuum mobile

Ehrhard Behrends

Abstract. Several hundred pages in the WWW and a number of articles in scientific and popular journals deal with Parrondo's paradox: it states that there are losing gambling games which, when being combined stochastically or in a suitable deterministic way, give rise to winning games.

Here we investigate the probabilistic background, methods from graph theory, (elementary) functional analysis and stochastic control theory come into play.

We show how the properties of the equilibrium distributions of the Markov chains under consideration give rise to the paradoxical behaviour, and we provide methods how to find the best a priori and adaptive strategies.

AMS-classification: 60J10, 60J20;

keywords: Parrondo, paradox, Markov chain, stochastic control theory.

1. Introduction

Several years ago the physicists Juan M. Parrondo from the university of Madrid has provided a new paradox in probability theory. (It is described in detail in [10]). Parrondo considers *two games*, where one starts with 0 Euro, and in both games one can win or loose one Euro at every round:

- In *game 1* one uses a fair coin: With probability $1/2$ one wins or looses.
- For *game 2* the rules are more complicated, the winning probability depends on the amount of money which one has won so far. If the capital is a multiple of three it is rather likely to loose: One wins with probability $1/10$, the loosing probability is consequently $9/10$.

  If, however, the present capital is *not* a multiple of three the probabilities are $3/4$ and $1/4$ for winning and loosing, respectively.

It can then be shown that both games are fair: If a person is going to play one of these games for a long time, the expected total gain is zero.

But very strange things happen if one switches between the games. Imagine, e.g., that before every round one decides stochastically with equal probability 0.5 whether to play with the rules of game 1 or with those of game 2 next. Rather surprisingly, then *a winning game results!* This is *Parrondo's* paradox.

Below one can find a discussion of this paradox. It will turn out that the phenomenon can be explained in the framework of classical probability theory. In *section 2* it will be tried to explain in non-technical terms what's going on. The mathematical background which is needed there is rather elementary. In the *following sections* everything is developped more systematically.

A reasonable *generalization* is discussed, we consider a given finite number of games. And then we investigate different approaches how to switch between these games, it is described how one can find in each of this versions the optimal strategy.

2. Parrondo games and the explanation of the paradox

The original version of the Parrondo games corresponds to certain random walks on the integers: One starts at $0 \in \mathbb{Z}$, and winning or loosing one Euro results in a step to the right or to the left. However, in order to understand the game it is not important *where precisely* the walk is at a certain moment, only the position modulo three matters. Therefore it is natural to consider a walk on $\{0, 1, 2\}$ (= the possible remainders modulo three) and to associate with each of these three states a number: the expected gain when being there. This will be zero at every i for game 1, but it will be negative at 0 and positive at 1 and 2 for game 2. And moving around on $\mathbb{Z}$ is replaced by a walk on $\{0, 1, 2\}$ where the transition probabilities are induced by those of the original game.

With this observation one arrives at a game which is called a simple *Parrondo game* here:

Let $\mathbf{P} = (p_{i,j})_{i,j=1,\ldots,s-1}$ be a stochastic $s \times s$-matrix[1] and $\mathbf{x} = (x_i)_{i=0,\ldots,s-1}$ a real vector. $\mathbf{P}$ and $\mathbf{x}$ give rise to the following "game" which will be called a *simple Parrondo game*:

> Consider the random walk on $\{0, \ldots, s-1\}$ which starts at 0 and which is driven by $\mathbf{P}$. At any stage of the game the player receives the "reward" x_i when being in state i.

If one „translates" the original Parrondo games one arrives at the following situation:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0.5 & 0.5 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{P}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.1 & 0.9 \\ 0.25 & 0 & 0.75 \\ 0.75 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{x}_2 = \begin{pmatrix} -0.8 \\ 0.5 \\ 0.5 \end{pmatrix}.$$

Lets now start to analyze such games. Everything what is necessary to know has been proved a long time ago in the theory of *Markov chains* (those readers who are interested should consult the book [1] for an introduction). One has to combine *the following facts:*

[1] This means that the entries are nonnegative and the that sum over very row is one. The interpretation is as follows: If one is at position i, the entries in row i are thought of as probabilities which are used to move to another state.

- Under rather general conditions a random walk governed by a stochastic matrix $\mathbf{P}$ has a certain regular behaviour after some time: One can associate numbers π_i with the $i \in \{0, \ldots, s-1\}$ such that π_i stands for the probability to find the walk at i if one observes the walk at a random moment in the far future. Therefore states i which are frequently visited have a large π_i whereas others might have tiny π_i.

  Because of this fact it is natural to consider $\pi_0 x_0 + \cdots + \pi_{s-1} x_{s-1}$ as the *expected gain per round*.

- For two vectors $x, y \in \mathbb{R}^s$ the number

  $$\langle x, y \rangle := x_0 y_0 + \cdots + x_{s-1} y_{s-1}$$

  occurs frequently in different parts of mathematics: it is the *inner product* or *scalar product* of x and y. It is known that $\langle x, y \rangle$ coincides with the length of x times the length of y times the cosine of the angle between x and y.

  Thus $\langle x, y \rangle$ will be negative resp. zero resp. positive iff this angle is larger than a right angle resp. a right angle resp. smaller than a right angle.

- Therefore the characteristic feature of a simple Parrondo game is the angle between $\mathbf{x}$ and $\pi := (\pi_0, \ldots, \pi_{s-1})$. One will play a loosing resp. fair resp. winning game iff $\langle \mathbf{x}, \pi \rangle$ is negative resp. zero resp. positive.

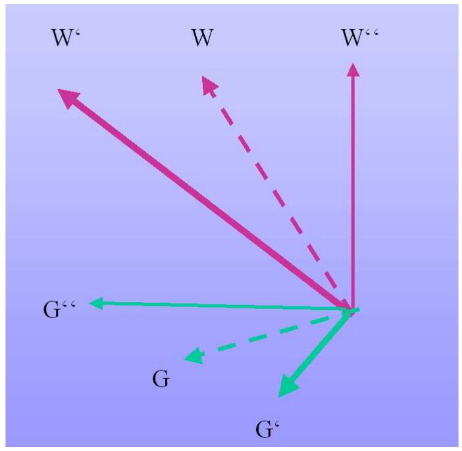
Now we turn to *mixtures*, we suppose that one switches between two simple Parrondo games $(\mathbf{P}_1, \mathbf{x}_1)$ and $(\mathbf{P}_2, \mathbf{x}_2)$ with probability 0.5. It is not hard to see that this is equivalent to a situation where one deals with a suitable *single* game $(\mathbf{P}, \mathbf{x})$, here $\mathbf{P}$ and $\mathbf{x}$ have to be defined as

$$\mathbf{P} := \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2\right), \ \mathbf{x} := \frac{1}{2}\left(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2\right).$$

Also, the new equilibrium π is (very close) to the midpoint of the probability vectors π_1 and π_2. And therefore the paradox is a consequence of the following geometrical fact:

> Suppose one has orthogonal vectors G' and W' and other orthogonal vectors G'' and W''. Then it is in general *not true* that the midpoints $(G' + G'')/2$ and $(W' + W'')/2$ are orthogonal.

In the present situation the G', G'' correspond to the gain vectors of two Parrondo games and the W', W'' are the corresponing equilibrium distributions.



Final remark: If one changes the rules of the games slightly in that the player has to pay a tiny amount of money for every round one arrives at an even more spectacular situation: There are two loosing games such that a stochastic combination gives rise to a winning game. In the geometrical picture the angle between G' and W' as well as between G'' and W'' is (slightly) larger than 90 degrees whereas the angle between the midpoints is still acute.

3. A more thorough investigation: survey

Consider once more a simple Parrondo game given by $\mathbf{P}$ and $\mathbf{x}$. The expected gain after m rounds of the game is the first component of the vector

$$(Id + \mathbf{P} + \mathbf{P}^2 + \cdots + \mathbf{P}^{m-1})\mathbf{x}.$$

If $\mathbf{P}$ is aperiodic and irreducible the $\mathbf{P}^\mu$ tend fast to a matrix $\mathbf{W}$ with identical rows $\pi = (\pi_0, \ldots, \pi_{s-1})$, the *equilibrium of* $\mathbf{P}$, and thus the expected gain is - in the case of "large" m – roughly $m\langle \pi, \mathbf{x}\rangle$. (For the sake of readability we suppress the difference between row vectors and column vectors.) This is the reason why we speak of a *winning* – resp. *losing* resp. *fair – game* if $\langle \pi, \mathbf{x}\rangle$ is positive (resp. negative resp. zero).

Now we consider r such games, $(\mathbf{P}_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (\mathbf{P}_r, \mathbf{x}_r)$. Rather to deal with a fixed $(\mathbf{P}_\rho, \mathbf{x}_\rho)$ the player is now allowed to switch. More precisely, we consider the following *three variants*:

The a priori strategy: The number m of rounds of the game is fixed in advance, the player chooses probability measures $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$ on $\{1, \ldots, r\}$. Then indices $\rho_1, \ldots, \rho_m$ are selected in $\{1, \ldots, r\}$, ρ_1 according to the law $\mathbf{p}_1$, ρ_2 according to $\mathbf{p}_2$ etc. (the choices are assumed to be independent).

The game is now played as in the $(\mathbf{P}, \mathbf{x})$-case, but in the μ'th round one "plays" with $(\mathbf{P}_{\rho_\mu}, \mathbf{x}_{\rho_\mu})$: the first reward is the first component of $\mathbf{x}_{\rho_1}$, and for the first step – from 0 to some i – one uses the transition probabilities from $\mathbf{P}_{\rho_1}$;

the second reward is the i'th component of $\mathbf{x}_{\rho_2}$, the second step is according to $\mathbf{P}_{\rho_2}$, etc.

The constant a priori strategy: The same as before, but now all $\mathbf{p}_\mu$ are identical with a probability vector $\mathbf{p} = (p_1, \ldots, p_r)$.

The adaptive strategy: Here the player may choose any of the $(\mathbf{P}_\rho, \mathbf{x}_\rho)$, say $(\mathbf{P}_{\rho_1}, \mathbf{x}_{\rho_1})$, to start with: the first component of $\mathbf{x}_{\rho_1}$ will be his or her first reward, and the first step from 0 to a state i will be according to $\mathbf{P}_{\rho_1}$. Now a $(\mathbf{P}_{\rho_2}, \mathbf{x}_{\rho_2})$ may be chosen, and so on.

The Spanish physicist *Parrondo* has observed a strange phenomenon in connection with such games which is described above, the *Parrondo paradox*.

This paradox has given rise to a number of articles in mostly popular journals (see [4] and [5] and the literature cited there). Also, when searching for the key words "Parrondo" and "paradox" in the *WorldWideWeb*, one finds several hundred web pages. The fascination stems from the fact that the paradox seemingly "explains" certain aspects of the experience of everyone: in the game of chess, pieces can be sacrificed in order to win the overall game; a politician can win the votes although he was involved in a sex scandal and his party performs rather weakly, ...

Needless to say that these examples to "apply" the paradox – one finds them over and over again – have not the slightest justification in any provable result, be it by Parrondo or by someone else.

There are some natural problems associated with the paradox and with a priori and adaptive strategies which will be systematically studied in the sequel.

Our paper is organized as follows:

Section 4 contains *preliminaries*. We introduce some definitions, prove results concerning the complexity of finding optimal walks in weighted graphs and study a certain finite dimensional normed quotient spaces. This space will be used later to apply Banach's fixed point theorem.

Section 5 is devoted to a *systematic study of a priori strategies*. It will easily turn out that suitable bang-bang strategies are optimal: all $\mathbf{p}_\mu$ can be chosen to be Dirac measures (propositon 5.2). There are, however, r^m such strategies, and one needs further results in order to find solutions in polynomial time which are at least "nearly optimal". The problem will be reduced to the study of finite graphs with "not too many" vertices, we show that nearly optimal strategies can be found in polynomial time (theorem 3.4).

We continue in *section 6* with the study of *constant a priori strategies*. Our main result, theorem 6.2, will relate properties of equilibrium distributions associated with the $\mathbf{P}_\rho$ with the problem whether or not a paradoxical behaviour is to be expected. In *section 7* we turn to *adaptive strategies*. The problems we are faced with are similar to those considered in stochastic control theory. One can use backward induction to find an optimal strategy explicitly (proposition 7.1), and the optimal strategies converge fast to a constant strategy. (theorem 7.3). Our short proof is self-contained, it uses Banach's fixed point theorem in the quotient space introduced in section 2.

For other approaches to explain the paradox and for its applications to understand certain phenomena in the physical and biological sciences we refer the reader to [4], [5], [6], [7], and [12]. Finally we note that there is a similar paradox in the theory of Markov processes in continuous time: in [11] it is shown that the random mixture of positive recurrent chains might be transient.

4. Some fundamental definitions and auxiliary results

A. Parrondo games

In the introduction we have described games which are defined by a stochastic $s \times s$-matrix $\mathbf{P}$ and a gain vector. As already noted this approach is slightly different form Parrondo's, a proper generalization of his examples could is given by the following definition.

Let $\tilde{\mathbf{P}} = (\tilde{p}_{i,j})_{i,j \in \mathbb{Z}}$ be an *infinite* stochastic matrix such that there is an $s \in \mathbb{N}$ for which $\tilde{p}_{i+s,j+s} = \tilde{p}_{i,j}$ for all i, j; we will call $\tilde{\mathbf{P}}$ *s-periodic* in this case. One can then define a stochastic $s \times s$-matrix $\mathbf{P} = (p_{i,j})$ by

$$p_{i,j} = \sum_{j'=j \bmod s} \tilde{p}_{i,j'}, \quad i, j = 0, \ldots, s-1,$$

and one can consider – provided these expressions exist – the numbers

$$x_i := (\sum_j j\tilde{p}_{i,j}) - i; \quad i = 0, \ldots, s-1.$$

Then, as is easy to see, the expected gain after m rounds played with the game defined by $\mathbf{P}$ and $\mathbf{x} := (x_i)$ is precisely the expectation of the position of the random walk on $\mathbb{Z}$ defined by $\tilde{\mathbf{P}}$. We note that every game $(\mathbf{P}, \mathbf{x})$ arises in this way by a suitable $\tilde{\mathbf{P}}$ (which is not unique).

By a *Parrondo game* we here mean a collection $(\mathbf{P}_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (\mathbf{P}_r, \mathbf{x}_r)$ of r stochastic $s \times s$-matrices and gain vectors as in the introduction. We will assume that the $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_r$ satisfy the following condition: there is an $L < 1$ such that the l^1-distance of the rows of the $\mathbf{P}_\rho$ is bounded by $2L$:

$$\sum_{j=0}^{s-1} |p^{\rho_1}_{i_1,j} - p^{\rho_2}_{i_2,j}| \leq 2L$$

for arbitrary $1 \leq \rho_1, \rho_2 \leq r$ and $0 \leq i_1, i_2 \leq s-1$ (the numbers $p^\rho_{i,j}$ are the entries of $\mathbf{P}_\rho$). The matrices are called *uniformly L-contractive* in this case.

This condition implies that the map $(y_0, \ldots, y_{s-1}) \mapsto (y_0, \ldots, y_{s-1})\mathbf{P}$ is a contraction with Lipschitz constant L on $\{(y_0, \ldots, y_{s-1}) \mid y_i \geq 0, \sum y_i = 1\}$ for every $\mathbf{P}$ in the convex hull of the $\mathbf{P}_\rho$ (see chapter 7 in [1]), in particular there exists a unique equilibrium distribution $\pi_{\mathbf{P}}$ for such $\mathbf{P}$. We note that the $\mathbf{P}_\rho$ are uniformly L-contractive for some $L < 1$ if in each row of any $\mathbf{P}_\rho$ there are more than $s/2$ strictly positive entries[2].

[2]This is satisfied in particular for Parrondo's matrices.

The proof of the following assertions are straightforward, they are left to the reader:

Lemma 4.1 *Let* $(\mathbf{P}_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (\mathbf{P}_r, \mathbf{x}_r)$ *be a Parrondo game.*

(i) *If* λ_ρ *are nonnegative numbers for* $\rho = 1, \ldots, r$ *such that* $\sum \lambda_\rho = 1$ *then the constant a priori strategy associated with* $\mathbf{p} := (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ *leads to the same expected gains as a play with the game defined by* $\mathbf{P} := \sum_\rho \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho$ *and* $\mathbf{x} := \sum \lambda_\rho \mathbf{x}_\rho$.

(ii) *Let* $\mathbf{P}_{\rho_1}, \ldots, \mathbf{P}_{\rho_m}$ *be any matrices from* $\{\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_r\}$, *we consider the game which starts at zero and for which the first resp. second, ..., resp.* m*'th round is played with game* $(\mathbf{P}_{\rho_1}, \mathbf{x}_{\rho_1})$ *resp.* $(\mathbf{P}_{\rho_2}, \mathbf{x}_{\rho_2})$, ..., *resp.* $(\mathbf{P}_{\rho_m}, \mathbf{x}_{\rho_m})$.
Then the expected gain after m *rounds is the first component of the vector*

$$\mathbf{x}_{\rho_1} + \mathbf{P}_{\rho_1}\mathbf{x}_{\rho_2} + \mathbf{P}_{\rho_1}\mathbf{P}_{\rho_2}\mathbf{x}_{\rho_3} + \cdots + \mathbf{P}_{\rho_1}\cdots\mathbf{P}_{\rho_{m-1}}\mathbf{x}_{\rho_m}.$$

B. Nearly optimal walks in weighted graphs

Let us call an a priori strategy *deterministic* if all $\mathbf{p}_\mu$ are Dirac measures. We will prove later that the optimal possible expected gain among all a priori strategies is achieved at a deterministic one. There are, however r^m such strategies, and it is hopeless to find the best by pure inspection.

Here we prepare the results of section 3 which will provide approximate solutions in polynomial time. The idea is to transform the problem to a graph theoretical one.

Let $G = (V, E, f)$ be a finite connected directed graph with $n := |V|$ vertices and a weight function $f : E \to \mathbb{R}$. (Self-loops and parallel edges are admissible.) We fix an integer m, and we are interested in finding *a walk of length* m *such that the total weight is as large as possible.* (Recall that a *walk of length* m is a sequence $v_0, \ldots, v_m$ of vertices such that all $(v_{\mu-1}, v_\mu)$ lie in E, the *total weight* of such a walk is the number $\sum_\mu f(v_{\mu-1}, v_\mu)$.)

Let r be the smallest integer which bounds the number of edges leaving a vertex of G. One has to check about $n \cdot r^m$ possibilities to find a walk of length m with maximal weigth, even for moderate m this is a hopeless task. The situation is more favourable if one is interested in *approximate solutions* only. We need some further notation:

Definition 4.2 Let G be as above.

(i) A *cycle* γ of length l in G is a walk of length l for which the starting point and the endpoint coincide. The *average weight* $m(\gamma)$ of γ is the total weight of γ, devided by l.

(ii) A cycle γ is said to be *maximal* if $m(\gamma)$ is as large as possible.

(iii) Let η be a positive number. A walk of length m which starts at s will be called η*-optimal* if it is optimal up to a possible error of ηm (i.e., its total weight plus ηm dominates the total weight of all walks of length m).

If one doesn't insist in the best but is satisfied with an η-optimal walk it suffices to find optimal cycles, and these can be found in polynomial time:

Proposition 4.3 *With G as above the following hold:*

(i) *An optimal cycle can be found in $O(r \cdot n^2)$ steps.*

(ii) *For any $\eta > 0$ one can find an η-optimal walk of length m in $O(r \cdot n^2)$ steps. (More precisely there are numbers K and M such that $K \cdot r \cdot n^2$ steps suffice to find an η-optimal walk of length m provided that $m \geq M/\eta$.)*

Proof. (i) This is essentially due to Karp, cf. [9], it is only necessary to make a slight modification.

Let's repeat the essential steps of Karp's argument, we will use the notation of [9]. First one reduces the claim to the case of connected graphs where the maximal average weight is zero. (Karp considers cycles with *minimal* average weight, but this should not cause much confusion.) The main idea is to fix a vertex s and to define, for $k = 0, \ldots, n$ and any vertex v, the number $F_k(v)$ as the maximal weight of a walk of length k from s to v. One puts $F_k(v) := -\infty$ if no such walks exist[3]. It then can be shown that

$$\lambda^*(=0) = \max_v \min_{0 \leq k < n} \frac{F_n(v) - F_k(v)}{n-k},$$

in particular the maximal average weight is known as soon as the $F_k(v)$ are determined[4].

It remains to show that this is possible with $O(r \cdot n^2)$ calculations. In Karp's paper this is done for the case of at most r *inbound* edges for any vertex whereas we need to consider graphs with at most r *outbound* ones.

We argue as follows. First we put $a_v^k := -\infty$ for $k = 1, \ldots, n$ and all vertices v.

Step 1: Consider, one after the other, all edges (s, v) which leave the distinguished vertex s and put $a_v^1 := \max\{a_v^1, f(s, v)\}$; it might happen that a_v^1 is updated several times during this procedure. After at most $O(r)$ steps, the a_v^1 coincide with the $F_1(v)$.

Step 2: For any v and any of the (at most r) v' such that there is an edge (v, v') put $a_{v'}^2 := \max\{a_{v'}^2, a_v^1 + f(v, v')\}$. After these $O(n \cdot r)$ calculations one has determined $F_2(v) = a_v^2$.

And so on.

If we continue this way for n steps all $F_k(v)$, $k = 1, \ldots, n$, are determined, and the total number of calculations is $O(r \cdot n^2)$ as claimed. Also, keeping track of the edges for which the optimal values are attained, we can construct from our data best possible walks of length k from s to v.

A cycle with maximal average weight can be found as a byproduct: choose a v such that $F_n(v)$ dominates all $(n-k)\lambda^* + F_k(v)$ and find an optimal walk

[3] Thus $F_0(v) = -\infty$ for all $v \neq s$; by definition, one puts $F_0(s) := 0$.

[4] It should be noted that in this formula one might have expressions of the form $(-\infty) - (-\infty)$. One has to define them as $+\infty$ in order to arrive at a true result.

of length n from s to v; this walk must contain a cycle which necessarily has maximal average weight (see [9]).
(ii) Let R be a positive constant such that the total weight of any walk which contains no cycles lies between $-R$ and R. (Such an R can easily be calculated from the $F_k(v)$.)

Put $W_m :=$ "the maximal weigth of a walk of length m" and consider any walk γ which achieves W_m. If γ contains a cycle of length k, then, by the definition of λ^*, we have $W_m \leq W_{m-k} + k\lambda^*$. If the optimal walk of length $m-k$ also has a cycle – of length k', say – we can continue with the estimate $\leq W_{m-k-k'} + (k+k')\lambda^*$. In this way we may get rid of cycles until we arrive at a $k_1 < n$ with

$$W_m \leq W_{k_1} + (m-k_1)\lambda^* \leq R + m\lambda^*.$$

Now let γ_0 be a cycle with optimal average weight, one had to perform $\leq K \cdot r \cdot n^2$ calculations to identify it. We consider a walk which leads from s to γ_0 as fast as possible, and then walks around γ_0 until m steps are completed. Suppose that there are d complete turns and $k_2 (< n)$ additional steps. The total weight of our walk is at least $-2R + dk\lambda^*$, where k denotes the length of γ_0 and $-2R$ bounds the weight of the initial and final segments of our walk of length k_1 and k_2. It then follows immediately from $dk = m - k_1 - k_2 > m - 2n$ that $M := 3R + 2\lambda^*$ has the claimed properties. □

C. A useful normed space

Let $\mathbf{1}$ be the vector in $\mathbb{R}^s$ for which all components are 1. Its linear span $\mathbb{R}\mathbf{1}$ in $\mathbb{R}^s$ consists of the constant vectors, and the quotient space $X := \mathbb{R}^s/\mathbb{R}\mathbf{1}$ can be considered as the space of all possible "forms" of maps from $\{0, \ldots, s-1\}$ to $\mathbb{R}$: graphs which only differ by a vertical translation are identified.

Now we provide $\mathbb{R}^s$ with the maximum norm $||\cdot||_\infty$ and X with the associated quotient norm:

$$||[\mathbf{x}]|| := \min_{c \in \mathbb{R}} \max_{i=0,\ldots,s-1} |x_i - c|.$$

We will need the following properties of this space:

Lemma 4.4

(i) $||[\mathbf{x}]|| = (\max_i x_i - \min_i x_i)/2$.

(ii) *Let* $\mathbf{P} = (p_{i,j})_{i,j=0,\ldots,s-1}$ *be a stochastic* $s \times s$*-matrix,* L *a number such that* $\sum_j |p_{i,j} - p_{i',j}| \leq 2L$ *for all* i, i'*. Then* $[\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{P}\mathbf{x}]$ *is a well-defined Lipschitz map on* X *with Lipschitz constant* L*.*

Proof. The simple proof of (i) is left to the reader.
(ii) Since $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{P}\mathbf{x}$ maps constants to constants the map under consideration is well-defined. Now let $[\mathbf{x}]$ in the unit ball of X be given. We choose a $c \in \mathbb{R}$ such that $\mathbf{y} := \mathbf{x} - c\mathbf{1}$ satisfies $\max_i y_i = 1$, $\min_i y_i = -1$. Therefore, for arbitrary

i, i',

$$\begin{aligned}|(\mathbf{Py})_i - (\mathbf{Py})_{i'}| &= |\sum_j (p_{i,j} - p_{i',j}) y_j| \\ &\leq \sum_j |p_{i,j} - p_{i',j}| \\ &\leq 2L.\end{aligned}$$

Consequently, by (i), the norm of $[\mathbf{Py}]$ and thus also that of $[\mathbf{Px}]$ $(=[\mathbf{Py}])$ is at most L. Since $[\mathbf{x}] \mapsto [\mathbf{Px}]$ is linear this proves the claim. □

5. A priori strategies

What is, for a given Parrondo game, the best choice of the $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_r$ in order to get a maximal expected gain? The following proposition shows that a suitable non-random choice will provide the best result. We need a

Lemma 5.1 *Let K be a compact convex set in $\mathbb{R}^r$ and K^m its m'th power, provided with the product topology. Then, for every function $h : K \to \mathbb{R}$ which is continuous and coordinate-wise convex*[5]*, there are extreme points $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m$ of K such that $h(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_m)$ is the maximum of h on K.*

Proof. Let $M := \max h$ and $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m$ be such that $M = h(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{m)})$. Consider the function $\mathbf{x} \mapsto h(\mathbf{x}, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m$. It is convex and continuous on K so that there is an extreme point $\mathbf{e}_1$ with $M = h(\mathbf{e}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)$. It should be clear how to continue. □

Proposition 5.2 *Let a Parrondo game be given. Denote, for any a priori strategy $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m$, by $E_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m}$ the expected gain when playing the game according to this strategy.*

Then the maximum of the $E_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m}$ is attained at a strategy where all $\mathbf{p}_\mu$ are Dirac measures.

Proof. One only has to apply the preceding lemma with $K = \mathcal{P}_r$ (= the probability measures on $\{1, \ldots, r\}$) and

$$h : (\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_m) \mapsto E_{\mathbf{p}_1,\ldots,\mathbf{p}_m}.$$

This mapping is continuous and coordinate-wise affine, and it remains to note that the extreme points of K are the Dirac measures. □

With this proposition the problem how to find an optimal a priori strategy is solved: one has to check the r^m deterministic strategies, at one of these the optimum will be achieved.

[5] I.e., $\mathbf{x} \mapsto h(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{x}, \mathbf{x}_{\mu+1}, \ldots, \mathbf{x}_m)$ is convex on K for arbitrary μ and $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_{\mu-1}, \mathbf{x}_{\mu+1}, \ldots, \mathbf{x}_m$.

However, r^m might be incredibly large, and therefore there it is desirable to find other possibilities. We are going to present a technique which provides an approximately optimal strategy in polynomial time (theorem 6.2).

The idea is to *combine the following facts:*

- Assertion (ii) of lemma 2.1: the expected total gain under the deterministic strategy $(\mathbf{P}_{\rho_1}, \mathbf{x}_{\rho_1}), \ldots, (\mathbf{P}_{\rho_m}, \mathbf{x}_{\rho_m})$ is the first component of
$$\mathbf{x}_{\rho_1} + \mathbf{P}_{\rho_1}\mathbf{x}_{\rho_2} + \mathbf{P}_{\rho_1}\mathbf{P}_{\rho_2}\mathbf{x}_{\rho_3} + \cdots + \mathbf{P}_{\rho_1}\cdots\mathbf{P}_{\rho_{m-1}}\mathbf{x}_{\rho_m}.$$
- Since the $\mathbf{P}_\rho$ are uniformly L-contractive, the matrix $\mathbf{P}_{\rho_1}\cdots\mathbf{P}_{\rho_{k-1}}$ in a typical summand of the preceding expression has nearly constant rows, say π, if k is not too small. Thus this summand contributes (roughly) with $\langle \pi, \mathbf{x}_{\rho_k}\rangle$ to the total gain.
- Therefore, if one is only interested in large m, it is natural to transform the problem to the search of an optimal walk in a directed graph: the vertices are constructed by means of suitable probability vectors and the weights of the edges are inner products.

Let $\mathbf{P}$ be a stochastic $s \times s$-matrix such that $L := \max_{i,i'} \sum_j |p_{i,j} - p_{i',j}|/2$ is smaller than one. Then $T_\mathbf{P} : \mathbf{x} \mapsto (\mathbf{x}^\top \mathbf{P})^\top$ is contraction on the set $\mathcal{P}^s$ of probability measures on $\{0, \ldots, s-1\}$, provided with the l^1-norm $|| \cdot ||_1$, with Lipschitz constant L (for notational convenience we will write in the sequel the vectors in $\mathcal{P}^s$ as row vectors; using this convention we can define $T_\mathbf{P}$ more simply as $T_\mathbf{P} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{xP}$). Thus Banach's fixed point theorem provides a $\pi_\mathbf{P}$ with $\pi_\mathbf{P}\mathbf{P} = \pi_\mathbf{P}$, and one knows that the $\mathbf{xP}^k$ converge geometrically fast with $k \to \infty$ to $\pi_\mathbf{P}$, the equilibrium of $\mathbf{P}$, for any $\mathbf{x}$ (see, e.g., lemma 10.6 in [1]).

If both $T_\mathbf{P}$ and $T_\mathbf{Q} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{Qx}$ are contractions on $\mathcal{P}^s$ with Lipschitz constants L_1 and L_2, respectively, then $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xPQ}$ is Lipschitz with constant $L_1 L_2$. From these elemenatary observations we may conclude that $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{xP}_{\nu_1}\cdots\mathbf{P}_{\nu_k}$ is a contraction with Lipschitz constant L^k for arbitrary $\nu_1, \ldots, \nu_k$ in $\{1, \ldots, r\}$. Denote the associated fixed point by $\tilde{\pi}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$, the inner products with the $\mathbf{x}_\rho$ will be used to approximate the stepwise gains.

Let $\eta > 0$ be given. We choose an l such that $L^l \leq \eta$ and then a finite set $D \subset \mathcal{P}_s$ such that

- for $\nu_1, \ldots, \nu_l \in \{1, \ldots, r\}$ there is a $\pi \in D$ with $||\tilde{\pi}_{\nu_1,\ldots,\nu_l} - \pi||_1 \leq \eta$;
- for $\pi \in D$ there are $\nu_1, \ldots, \nu_l \in \{1, \ldots, r\}$ such that $||\tilde{\pi}_{\nu_1,\ldots,\nu_l} - \pi||_1 \leq \eta$.

(I.e., D and the collection of the $\nu_1, \ldots, \nu_l \in \{1, \ldots, r\}$ are mutually η-nets.)

Lemma 5.3

(i) *If $k \geq l$, then*
$$\pi\mathbf{P}_{\nu_1}\cdots\mathbf{P}_{\nu_k} =_{2\eta} \tilde{\pi}_{\nu_1,\ldots,\nu_k}$$
for arbitrary $\pi \in \mathcal{P}_s$ and $\nu_1, \ldots, \nu_k \in \{1, \ldots, r\}$; here "$a =_\tau b$" stands for "the l^1-distance between a and b is at most τ".

(ii) *For* $\pi \in D$ *and* $\rho = 1, \ldots, r$ *there is* $\Pi_{\pi,\rho} \in D$ *such that* $\pi \mathbf{P}_\rho =_{4\eta} \Pi_{\pi,\rho}$.

(iii) *Fix – for all* η, ρ *– such a* $\Pi_{\pi,\rho}$. *Define, for given* $\rho_1, \ldots, \rho_{k_0}$ *and* $\pi_0 \in D$, *a sequence* (π_κ) *in* D *by* $\pi_{\kappa+1} := \Pi_{\pi_\kappa, \rho_{\kappa+1}}$ *for* $\kappa = 0, \ldots, k_0 - 1$. *Then*

$$\pi_0 \mathbf{P}_{\rho_1} \cdots \mathbf{P}_{\rho_k} =_{4k\eta} \pi_k$$

for every k.

(iv) *For each* k *with* $l \leq k \leq k_0$ *one has*

$$\pi_k =_{(4l+2)\eta} \tilde{\pi}_{\rho_1, \ldots, \rho_k}.$$

Proof. (i) One only has to apply the following elementary fact: if T is a Lipschitz map on a metric space (M, d) with Lipschitz constant η and fixed pont x_0, then for every x one has

$$d(Tx, x_0) = d(Tx, Tx_0) \leq \eta d(x, x_0) \leq \eta \mathrm{diam}(M).$$

(ii) Choose $\tilde{\pi}_{\nu_1, \ldots, \nu_l}$ with $\tilde{\pi}_{\nu_1, \ldots, \nu_l} =_\eta \pi$ and $\Pi_{\pi,\rho} \in D$ which is η-close to $\tilde{\pi}_{\nu_2, \ldots, \nu_{l-1}, \rho}$. Then it follows that

$$\begin{aligned} \pi \mathbf{P}_\rho &=_\eta \tilde{\pi}_{\nu_1, \ldots, \nu_l} \mathbf{P}_\rho \\ &= \tilde{\pi}_{\nu_1, \ldots, \nu_l} (\mathbf{P}_{\nu_1} \cdots \mathbf{P}_{\nu_l}) \mathbf{P}_\rho \\ &= (\tilde{\pi}_{\nu_1, \ldots, \nu_l} \mathbf{P}_{\nu_1})(\mathbf{P}_{\nu_2} \cdots \mathbf{P}_{\nu_l} \mathbf{P}_\rho) \\ &=_{2\eta} \tilde{\pi}_{\nu_2, \ldots, \nu_{l-1}, \rho} \\ &=_\eta \Pi_{\pi,\rho}; \end{aligned}$$

in the last but one estimate we have applied assertion (i).

(iii) This is a telescope sum argument:

$$\begin{aligned} \pi_0 \mathbf{P}_{\rho_1} \cdots \mathbf{P}_{\rho_k} - \pi_k &= (\pi_0 \mathbf{P}_{\rho_1} - \pi_1)(\mathbf{P}_{\rho_2} \cdots \mathbf{P}_{\rho_k}) + \\ &+ (\pi_1 \mathbf{P}_{\rho_2} - \pi_1)(\mathbf{P}_{\rho_3} \cdots \mathbf{P}_{\rho_k}) + \\ &+ \cdots + \\ &+ \pi_{k-1} \mathbf{P}_{\rho_k} - \pi_k. \end{aligned}$$

Note that the norm of each of the summands is at most 4η and that the $T_{\mathbf{P}_\rho}$ are contractive.

(iv) If we apply (iii) with π_{k-l} instead of π_0 we get $\pi_k =_{4l\eta} \pi_{k-l} \mathbf{P}_{\rho_{k-l+1}} \cdots \mathbf{P}_{\rho_k}$, and the right hand side is 2η-close to the fixed point $\tilde{\pi}_{\rho_1, \ldots, \rho_k}$ of $\mathbf{x} \mapsto \mathbf{x} \mathbf{P}_{\rho_1} \cdots \mathbf{P}_{\rho_k}$. □

Let $\eta > 0$ be given and D and the $\Pi_{\pi,\rho}$ as in the definition before lemma 3.3. As a last preparation of the main result of this section we introduce the following *directed weighted graph* $\mathcal{G}$:

- The vertices of $\mathcal{G}$ are the elements of $D \times \{1, \ldots, r\}$.
- With any vertex (π, i) there are associated r directed edges, namely to $(\Pi_{\pi,\rho}, \rho)$ for $\rho = 1, \ldots, r$; the ρ'th edge has weight $\langle \pi, \mathbf{x}_\rho \rangle$.

We note that, by proposition 2.3, the complexity to find an η-optimal walk of length m in $\mathcal{G}$ is $O(r(|D|r)^2)$.

Theorem 5.4 *Let $\eta_0 > 0$ be given. One can find a strategy $\rho_1, \ldots, \rho_m$ in $O(r^3\eta_0^{-2s-3})$ steps for which the expected total gain is $m\eta_0$-close to the optimal value.*

Proof. Let us assume for simplicity that all components of all $\mathbf{x}_\rho$ are bounded by 1 so that $\langle \pi, \mathbf{x}_\rho\rangle$ is τ-close to $\langle \pi', \mathbf{x}_\rho\rangle$ whenever $\pi =_\tau \pi'$.

Fix $\varepsilon > 0$: we will show that the complexity is $O(r^3\eta_0^{-2s-2-2\varepsilon})$, where the constants depend on ε. To this end, we define $\eta := \eta_0^{1+\varepsilon}/-2\log L$. Then it is true that

$$\frac{\log \eta}{\log L}\eta + \frac{\log \eta}{m \log L} \leq \eta_0/3$$

provided that m is sufficiently large and η_0 is sufficiently small.

With this η we choose a set D and the $\Pi_{\pi,\rho}$ as in the preceding considerations. We note that we can bound the cardinality of D by $O(\eta^{-(s-1)})$ since $\mathcal{P}_s$ is a bounded $(s-1)$-dimensional set. Also, the number l above is $O(\log \eta / \log L)$.

Let $\rho_1, \ldots, \rho_m$ be a sequence in $\{1, \ldots, r\}$ for which $E := E_{\rho_1,\ldots,\rho_m}$, the expected gain associated with the deterministic strategy $\rho_1, \ldots, \rho_m$, is maximal; recall that, by lemma 2.1(ii), this gain is the first component of

$$\mathbf{x}_{\rho_1} + \mathbf{P}_{\rho_1}\mathbf{x}_{\rho_2} + \mathbf{P}_{\rho_1}\mathbf{P}_{\rho_2}\mathbf{x}_{\rho_3} + \cdots + \mathbf{P}_{\rho_1}\cdots\mathbf{P}_{\rho_{m-1}}\mathbf{x}_{\rho_m}.$$

Claim 1: Choose an arbitrary vertex $(\pi_0, \rho_0) \in \mathcal{G}$ and define a walk by

$$(\pi_\mu, \rho_\mu) \mapsto (\pi_{\mu+1}, \rho_{\mu+1})$$

for $\mu = 0, \ldots, m-1$; here $\pi_{\mu+1} := \Pi_{\pi_{mu},\rho_{\mu+1}}$.. We claim that the weight of this walk is at least $E - m\eta_0$.

Proof of Claim 1:

For $k \geq l$ we have $\mathbf{P}_{\rho_1}\cdots\mathbf{P}_{\rho_k}\mathbf{x}_{\rho_{k+1}} =_{2\eta} \langle \tilde{\pi}_{\rho_1,\ldots,\rho_k}, \mathbf{x}_{\rho_{k+1}}$, and it follows that

$$\begin{aligned}
E \quad &= \quad \text{first component of} \\
&\qquad \mathbf{x}_{\rho_1} + \mathbf{P}_{\rho_1}\mathbf{x}_{\rho_2} + \mathbf{P}_{\rho_1}\mathbf{P}_{\rho_2}\mathbf{x}_{\rho_3} + \cdots + \mathbf{P}_{\rho_1}\cdots\mathbf{P}_{\rho_{m-1}}\mathbf{x}_{\rho_m} \\
&=_l \quad \mathbf{P}_{\rho_1}\cdots\mathbf{P}_l\mathbf{x}_{\rho_{l+1}} + \cdots + \mathbf{P}_{\rho_1}\cdots\mathbf{P}_{\rho_{m-1}}\mathbf{x}_{\rho_m} \\
&=_{2m\eta} \quad \sum_{\mu=l}^{m-1} \langle \tilde{\pi}_{\rho_1,\ldots,\rho_\mu}, \mathbf{x}_{\rho_{\mu+1}}\rangle \\
&=_{(4l+2)\eta m} \quad \sum_{\mu=l}^{m-1} \langle \pi_\mu, \mathbf{x}_{\rho_{\mu+1}}\rangle \\
&=_l \quad \sum_{\mu=1}^{m-1} \langle \pi_\mu, \mathbf{x}_{\rho_{\mu+1}}\rangle.
\end{aligned}$$

Thus the difference beween E and the weight $\sum_{\mu=1}^{m-1}\langle\pi_\mu,\mathbf{x}_{\rho_{\mu+1}}\rangle$ is at most $2l + 2m\eta + (4l+2)\eta m$, a number which is bounded by $m\eta_0$ by assumption.

Claim 2: Suppose that the maximal gain $G_{\mathcal{G}}$ of a walk of length m in $\mathcal{G}$ is attained at a walk

$$(\pi_0,\rho_0)\mapsto(\pi_1,\rho_1)\mapsto\cdots\ \mapsto(\pi_m,\rho_m).$$

Then $E_{\rho_1,\ldots,\rho_m}\geq E-m\eta_0$.
Proof of Claim 2: It suffices to read the preceding estimates from right to left.

Conclusio: Up to an error which is bounded by $m\eta_0$ one can find the optimal strategy by providing an optimal walk in $\mathcal{G}$. It only remains to apply proposition 2.3 to complete the proof of the theorem.

□

6. Constant a priori strategies

Fix a constant a priori strategy $\mathbf{p}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ and put

$$\mathbf{P}:=\sum_\rho\lambda_\rho\mathbf{P}_\rho,\ \mathbf{x}:=\sum_\rho\lambda_\rho\mathbf{x}_\rho.$$

Playing according to the constant strategy $\mathbf{p},\mathbf{p},\ldots$ amounts in playing with the game $(\mathbf{P},\mathbf{x})$ (cf. lemma 2.1 (i)). Since $\mathbf{P}$ is L-contractive the game is easily analysed: The expected gain after m rounds is the first component of the vector

$$(Id+\mathbf{P}+\mathbf{P}^2+\cdots+\mathbf{P}^{m-1})\mathbf{x}$$

and consequently, if m is large, roughly $m\langle\pi_{\mathbf{P}},\mathbf{x}\rangle$, where $\pi_{\mathbf{P}}$ stands for the equilibrium distribution of $\mathbf{P}$. Thus the number $\langle\pi_{\mathbf{P}},\mathbf{x}\rangle$ is of particular importance: if it is zero, positive or negative one plays a fair, winning or losing game, respectively.

In Parrondo's example the numbers $\langle\pi_{\mathbf{P}_1},\mathbf{x}_1\rangle$ and $\langle\pi_{\mathbf{P}_2},\mathbf{x}_2\rangle$ are zero, but $\langle\pi_{\mathbf{P}},\mathbf{x}\rangle$ is positive for $\mathbf{P}=\lambda\mathbf{P}_1+(1-\lambda)\mathbf{P}_2,\mathbf{x}=\lambda\mathbf{x}_1+(1-\lambda)\mathbf{x}_2$ with a suitable λ between 0 and 1, i.e., one may combine fair games (or even losing games) to arrive at a winning game.

Definition 6.1 Let $\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_r$ be stochastic $s\times s$-matrices which are uniformly contractive. We say that *a paradoxical behaviour for $\mathbf{P}_1,\ldots,\mathbf{P}_r$ is possible* provided there are vectors $\mathbf{x}_1,\ldots,\mathbf{x}_r$ with $\langle\pi_{\mathbf{P}_\rho},\mathbf{x}_\rho\rangle\leq 0$ for every ρ and a probability vector $\mathbf{p}=(\lambda_1,\ldots,\lambda_r)$ such that, for the associated $(\mathbf{P},\mathbf{x})$, one has $\langle\pi_{\mathbf{P}},\mathbf{x}\rangle>0$.

Computer experiments reveal that, surprisingly, the possibility of paradoxical behaviour is rather the rule than the exception. (Clearly it is not expected always: e.g., if all $\mathbf{x}_\rho$ vanish, no interesting phenomena can be observed.)

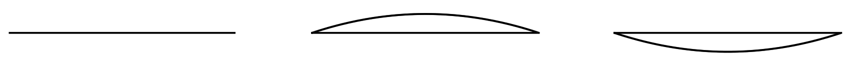
We have examined various examples in the case $r=2$, here the relevant $\mathbf{p}$ has the form $(\lambda,1-\lambda)$ for $0\leq\lambda\leq 1$. We have restricted ourselves to *fair games*, i.e., to situations where $\langle\pi_{\mathbf{P}_1},\mathbf{x}_1\rangle=\langle\pi_{\mathbf{P}_2},\mathbf{x}_2\rangle=0$.

It is natural to consider the function

$$\phi(\lambda) := \langle \pi_{\lambda \mathbf{P}_1 + (1-\lambda)\mathbf{P}_2}, \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \rangle \text{ for } \lambda \in [0,1].$$

By our assumption $\phi(0) = \phi(1) = 0$, and the $\phi(\lambda)$ with $0 < \lambda < 1$ are of interest if paradoxical behaviour has to be studied.

We have considered various $(\mathbf{P}_1, \mathbf{x}_1)$ and $(\mathbf{P}_2, \mathbf{x}_2)$ which have been defined by using a random generator. When plotting the associated ϕ-function it was very surprising to us to observe that only very few typical graphs occur. In the overwhelming majority of cases the graph of the ϕ-function is of one of the following three types:



This means that

- There are cases without paradoxical behaviour (not surprising).
- Very often *every* proper random mixture of fair games $(\mathbf{P}_1, \mathbf{x}_1)$ and $(\mathbf{P}_2, \mathbf{x}_2)$ gives rise to a winning game (or always to a losing game).

In the rest of this section we are going to try to explain these observations qualitatively. First we prove why paradoxical situation abound:

Theorem 6.2 *Let $\mathbf{P}_1, \ldots, \mathbf{P}_r$ be stochastic matrices which are uniformly L-contractive. The following are equivalent*

(i) *A paradoxical behaviour is possible.*

(ii) *At least two of the equilibrilum distributions $\pi_{\mathbf{P}_\rho}$ are different.*

Proof. Suppose first that all $\pi_{\mathbf{P}_\rho}$ coincide: $\pi_{\mathbf{P}_1} = \cdots = \pi_{\mathbf{P}_r} =: \pi$. Then π is also the equilibrium for any convex combination $\mathbf{P} = \sum_\rho \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho$ so that, when $\langle \pi_{\mathbf{P}_\rho}, \mathbf{x}_\rho \rangle \le 0$ for certain $\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_r$, one also has

$$\langle \pi_{\sum_\rho \lambda_\rho \mathbf{P}_\rho}, \sum_\rho \lambda_\rho \mathbf{x}_\rho \rangle = \sum \lambda_\rho \langle \pi, \mathbf{x}_\rho \rangle \le 0.$$

Now suppose that at least two of the $\pi_{\mathbf{P}_\rho}$ are different, $\pi_{\mathbf{P}_1} \neq \pi_{\mathbf{P}_2}$ say. We will provide $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ and $\lambda \in [0,1]$ such that $\langle \pi_{\mathbf{P}_1}, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \pi_{\mathbf{P}_2}, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$ but $\langle \pi_{\lambda \mathbf{P}_1} + (1-\lambda)\mathbf{P}_2, \lambda \mathbf{x}_1 + (1-\lambda)\mathbf{x}_2 \rangle > 0$.

Choose $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ such that

$$\langle \pi_{\mathbf{P}_1}, \mathbf{y}_1 \rangle = 0 \neq \langle \pi_{\mathbf{P}_2}, \mathbf{y}_1 \rangle, \quad \langle \pi_{\mathbf{P}_2}, \mathbf{y}_2 \rangle = 0 \neq \langle \pi_{\mathbf{P}_1}, \mathbf{y}_2 \rangle;$$

this is possible since $\pi_{\mathbf{P}_1}, \pi_{\mathbf{P}_2}$, being different probability distributions, are linearly independent.

Consider, for $\eta_1, \eta_2 \in \{-1, +1\}$, the function

$$\phi_{\eta_1,\eta_2}(\lambda) := \langle \pi_{\lambda\mathbf{P}_1+(1-\lambda)\mathbf{P}_2}, \lambda\eta_1\mathbf{y}_1 + (1-\lambda)\eta_2\mathbf{y}_1 \rangle$$

for $0 \le \lambda \le 1$. Fix any $\lambda_0 \in]0,1[$ and suppose that $\phi_{\eta_1,\eta_2}(\lambda_0) = 0$ for $\eta_1, \eta_2 = \pm 1$ would hold. Then it would follow that

$$\langle \pi_{\lambda_0\mathbf{P}_1+(1-\lambda_0)\mathbf{P}_2}, \mathbf{y}_1 \rangle = \langle \pi_{\lambda_0\mathbf{P}_1+(1-\lambda_0)\mathbf{P}_2}, \mathbf{y}_2 \rangle = 0.$$

But this ist not possible since, by the continuity of $\lambda \mapsto \pi_{\lambda\mathbf{P}_1+(1-\lambda)\mathbf{P}_2}$, one has

$$\langle \pi_{\lambda_0\mathbf{P}_1+(1-\lambda_0)\mathbf{P}_2}, \mathbf{y}_1 \rangle \approx \langle \pi_{\mathbf{P}_2}, \mathbf{y}_1 \rangle \ne 0$$

for $\lambda_0 \approx 0$ and

$$\langle \pi_{\lambda_0\mathbf{P}_1+(1-\lambda_0)\mathbf{P}_2}, \mathbf{y}_2 \rangle \approx \langle \pi_{\mathbf{P}_1}, \mathbf{y}_2 \rangle \ne 0$$

for $\lambda_0 \approx 1$. It remains to fix $\eta_1, \eta_2, \lambda_0$ such that $\phi_{\eta_1,\eta_2}(\lambda_0) \ne 0$. If $\phi_{\eta_1,\eta_2}(\lambda_0) > 0$ we put $\mathbf{x}_1 := \eta_1\mathbf{y}_1$, $\mathbf{x}_2 := \eta_2\mathbf{y}_2$, otherwise we deal with $\mathbf{x}_1 := -\eta_1\mathbf{y}_1$, $\mathbf{x}_2 := -\eta_2\mathbf{y}_2$.

Next we try to explain – at least in a qualitative way – the phenomenon that there are few typical forms of the ϕ-function. The key result is the following

Proposition 6.3 *Fix $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ which are uniformly L-contractive for some $L < 1$. Define, for λ between 0 and 1, $\gamma(\lambda)$ as the deviation of $\pi_{\lambda\mathbf{P}_1+(1-\lambda)\mathbf{P}_2}$ from the corresponding point of the line segment between $\pi_{\mathbf{P}_1}$ and $\pi_{\mathbf{P}_2}$:*

$$\gamma(\lambda) := \pi_{\lambda\mathbf{P}_1+(1-\lambda)\mathbf{P}_2} - (\lambda\pi_{\mathbf{P}_1} + (1-\lambda)\pi_{\mathbf{P}_2}).$$

Then $\gamma(\lambda)$ is the unique solution $\gamma \in \Delta := \{(a_0, \ldots, a_{s-1}) \mid \sum a_i = 0\}$ of the fixed point equation

$$\gamma = \gamma(\lambda\mathbf{P}_1 + (1-\lambda)\mathbf{P}_2) + \lambda(1-\lambda)(\pi_{\mathbf{P}_1} - \pi_{\mathbf{P}_2})(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2).$$

Proof. A straightforward calculation shows that $\gamma(\lambda)$ solves the equation. Uniqueness follows from the fact that

$$\gamma \mapsto \gamma(\lambda\mathbf{P}_1 + (1-\lambda)\mathbf{P}_2)$$

is a contraction with Lipschitz constant L on Δ; cf. [1], lemma 10.6.

With this proposition at hand we can try to make the observed facts plausible:

- If $\mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2$ are random matrices chosen with respect ot the uniform distribution it is unlikely that $\pi_{\mathbf{P}_1}, \pi_{\mathbf{P}_2}$ have a particularly large mass at certain components. Thus $\pi_{\mathbf{P}_1} - \pi_{\mathbf{P}_2}$ "usually" will be a vector with "small" components. For the same reason $\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2$ will have "small" entries so that it is to be expected that $(\pi_{\mathbf{P}_1} - \pi_{\mathbf{P}_2})(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2)$ is "small".

- If X is any Banach space and T a linear contraction, then the unique solution x of $x = Tx + y$ is $x = y + Ty + T^2y + \cdots$. Thus, if the contraction constant is small, one might approximate x better and better by y, $y + Ty$ etc.
- Conclusio: it is likely that – as a first approximation – one is justified to replace $\pi_{\lambda \mathbf{P}_1 + (1-\lambda)\mathbf{P}_2}$ by $\lambda\pi_{\mathbf{P}_1} + (1-\lambda)\pi_{\mathbf{P}_2}$ or even better by

$$\lambda\pi_{\mathbf{P}_1} + (1-\lambda)\pi_{\mathbf{P}_2} + (\pi_{\mathbf{P}_1} - \pi_{\mathbf{P}_2})(\mathbf{P}_1 - \mathbf{P}_2).$$

- Having in mind that we have assumed that $\langle \pi_{\mathbf{P}_1}, \mathbf{x}_1 \rangle = \langle \pi_{\mathbf{P}_2}, \mathbf{x}_2 \rangle = 0$ it follows that a first approximation of the ϕ-function will be a multiple of the function $\lambda(1-\lambda)$ and that as a better approximation one will find an element in the linear span of $\lambda(1-\lambda), \lambda^2(1-\lambda), \lambda(1-\lambda)^2$.

It has to be emphasized that these considerations are of a very rough qualitative nature. Further research will be necessary until one is able to read off the structure of ϕ form $\mathbf{P}_1$ and $\mathbf{P}_2$ directly.

7. Adaptive strategies

Again we consider a Parrondo game $(\mathbf{P}_1, \mathbf{x}_1), \ldots, (\mathbf{P}_r, \mathbf{x}_r)$, recall that we assume that there exists an $L < 1$ such that the $\mathbf{P}_\rho$ are uniformly L-contractive. The starting position of the game is zero, m rounds are to be played with an adaptive strategy, which $(\mathbf{P}_\rho, \mathbf{x}_\rho)$ should be chosen first ?

It is not obvious what has to be done since a big first reward (nnice" first component of $\mathbf{x}_\rho$) might be compensated by the fact that with the associated $\mathbf{P}_\rho$ one will have to move to states where the rewards are not favourable. Thus it is not likely that greedy strategies lead to good results, one has to be more careful.

There is, however, no need to re-invent the wheel, one finds already an elaborated theory which has been developed from a different starting point. What is necessary to know can be found in the literature concerned with *Random Decision Theory* or with *Random Control Processes*, we refer the reader to [3], [8] or [13]. Rather than adapting the general results of these theories to the present context we sketch a short self-contained approach.

E.g., our proposition 5.1 is a special case of the dynamic programming theorem 3.2.1 in [8], and theorem 5.3 can be found under another viewpoint as theorem 4.2.3 in [8] or in section 3.1 of [13]. We note, however, that our proof of theorem 5.3 might be new to the specialists.

By definition an adaptive strategy $\mathcal{S}$ is a rule to decide which $(\mathbf{P}_\rho, \mathbf{x}_\rho)$ should be used next given the present state of the game and the last moves. In a more formal approach one could define such a strategy as a sequence of maps which satisfy certain measurabilty assumptions with respect to an appropriate filtration, it should not be difficult to translate our more intuitive approach to this setting.

Suppose that the game starts at a certain $i \in \{0, \ldots, s-1\}$, that n rounds are to be played and that one uses a certain strategy $\mathcal{S}$. The expected total gain will be denoted by $g_n^{\mathcal{S}}(i)$, and $g_n(i)$ stands for the supremum over all $g_n^{\mathcal{S}}(i)$ where $\mathcal{S}$ runs through all adaptive strategies; additionally, we define $g_0(i) := 0$ for all i. By the following proposition this supremum is an fact a maximum and the best possible strategy can be described explicitly. Also it turns out that all $g_n(i)$ can easily be determined by induction, in particular one can then calculate $g_m(0)$: *this* is the value we are interested in when playing a Parrondo game where adaptive strategies are admitted.

Proposition 7.1

(i) *For* $n = 0, 1, \ldots$ *and* $i \in \{0, \ldots, s-1\}$ *one has*

$$g_{n+1}(i) = \max_{\rho=1,\ldots,r} x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho g_n(j).$$

(ii) *The optimal strategy is defined as follows: when being at state* i *and* n *rounds remain to be played, choose* $(\mathbf{P}_{\rho_0}, \mathbf{x}_{\rho_0})$ *for the next game, where* ρ_0 *satisfies*

$$x_i^{\rho_0} + \sum_j p_{i,j}^{\rho_0} g_n(j) = \max_{\rho=1,\ldots,r} x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho g_n(j).$$

Proof. Suppose first that $n = 1$ and that the present position is i. Then obviously the best strategy is to choose a $(\mathbf{P}_{\rho_0}, \mathbf{x}_{\rho_0})$ such that $x_i^{\rho_0} = \max_\rho x_i^\rho$. Since we have defined $g_n(j) = 0$ for all j this proves (i) and (ii) for the case $n = 1$.

Now assume that we are at i and $n+1$ rounds are still to be played. Suppose that we decide to choose a certain $(\mathbf{P}_\rho, \mathbf{x}_\rho)$. We will get x_i^ρ and we will have to move to another state j with probability $p_{i,j}^\rho$. If we play as clever as possible we have to expect $g_n(j)$ in the remaining n rounds so that our choice results in an expected gain of

$$x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho g_n(j).$$

The maximum over all ρ is $g_{n+1}(i)$, and this proves the proposition.

(*Remark:* Note that the fact that the strategy has such a simple form is due to the Markov property of the underlying walk.) □

When one calculates the $g_n(i)$ for larger and larger n one can observe a *surprising phenomenon:* this sequence behaves rather regularly, there is a number γ such that all $(g_{n+1}(i) - g_n(i))_n$ tend with $n \to \infty$ to γ. Also the optimal strategy can be approximated quite simply: if n rounds are to be played and n is not too small, then the best choice, being at state i, is independent of n. To phrase it otherwise: there is a *selection function* $\sigma : \{0, \ldots, s-1\} \to \{1, \ldots, r\}$ such that a nearly optimal adaptive choice being at state i is $(\mathbf{P}_{\sigma(i)}, \mathbf{x}_{\sigma(i)})$.

The number γ has an obvious meaning, it stands for the expected gain in one step if one plays in an optimal way.

The following theorem explains the phenomenon, a characterization of γ is also given. We need a preparation, part (iii) will be crucial for the further investigations.

Lemma 7.2 *Define* $D' : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^s$ *by*

$$(x_i)_{i=0,\dots,s-1} \mapsto (\max_{\rho=1,\dots,r} x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho x_j)_{i=0,\dots,s-1}.$$

(i) $D'(\mathbf{x} + a\mathbf{1}) = D'(\mathbf{x}) + a\mathbf{1}$ *for all* $a \in \mathbb{R}$*; recall that* $\mathbf{1}$ *stands for the constant vector* $(1, \dots, 1)$.

(ii) *Let* X *be as in section 2C.* D' *induces a well-defined map* D *from* X *to* X *by* $[\mathbf{x}] \mapsto [D'\mathbf{x}]$.

(iii) D *is a contraction on* X *with Lipschitz constant* L.

Proof. (i) is obviously true, and (ii) follows from (i). For the proof of (iii) we first note that

$$\max a_\rho - \max b_\rho \le \max(a_\rho - b_\rho)$$

and consequently

$$|\max a_\rho - \max b_\rho| \le \max |a_\rho - b_\rho|$$

for real numbers $a_1, \dots, a_r$ and $b_1, \dots, b_r$.

Now let $[\mathbf{z}], [\mathbf{w}] \in X$ be given. With $a := |||[z - w]|||$ we find $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^s$ and a real α such that

$$\min y_i = -a, \ \max y_i = a, \ \mathbf{w} = \mathbf{z} + \alpha\mathbf{1} + \mathbf{y}.$$

Consider the numbers $\sum_j p_{i,j}^\rho y_j$ for $\rho = 1, \dots, r$ and $i = 0, \dots, s-1$. Since the $\mathbf{P}_\rho$ are uniformly L-contractive the distance between each two of them be estimated by $2La$. Therefore one may find a real c such that

$$\sum_j p_{i,j}^\rho y_j = c + c_i^\rho$$

with $|c_i^\rho| \le La$.

¿¿From (i) we conclude that $D'(\mathbf{w}) = D'(\mathbf{z} + \mathbf{y}) + \alpha\mathbf{1}$ so that the distance between $D([\mathbf{z}])$ and $D([\mathbf{w}])$ is the distance between $D([\mathbf{z} + \mathbf{y}])$ and $D([\mathbf{z}])$, i.e., we have to estimate the diameter of the set of components of the vector $D([\mathbf{z} + \mathbf{y}]) - D([\mathbf{z}])$.

Let i be arbitrary. The i'th component of $D'(\mathbf{z} + \mathbf{y})$ (resp. of $D'(\mathbf{z})$) is

$$\max_\rho x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho z_j + c + c_i^\rho = c + \max_\rho x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho z_j + c_i^\rho$$

(resp. $\max_\rho x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho z_j$). Thus the distance between $D([\mathbf{z} + \mathbf{y}])$ and $D([\mathbf{z}])$ can be estimated by the sup-norm distance of the vectors $(\max_\rho x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho z_j + c_i^\rho)_i$ and $(\max_\rho x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho z_j)_i$.

Put, for fixed i,

$$\begin{aligned} a_\rho &:= x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho z_j + c_i^\rho, \\ b_\rho &:= x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho z_j. \end{aligned}$$

By the preceding observation the absolute value of the difference can be estimated by $\max_\rho |a_\rho - b_\rho| = \max_\rho |c_i^\rho| \leq a \cdot L$, and this proves that

$$||D([\mathbf{z} + \mathbf{y}]) - D([\mathbf{z}])|| \leq a \cdot L.$$

□

Theorem 7.3 *Define, for $n = 0, 1, \ldots,$ the* vector of the adaptive gains $\mathbf{g}_n$ *by* $\mathbf{g}_n := (g_n(0), \ldots, g_n(s-1))$. *There are a vector* $\mathbf{g} = (g_0, \ldots, g_{s-1})$ *and a number* γ *such that the following hold:*

(i) $D'\mathbf{g} = \mathbf{g} + \gamma\mathbf{1}$*, i.e.,* $\mathbf{g}$ *is a fixed point of* D*.*

(ii) γ *is uniquely determined,* $\mathbf{g}$ *is uniquely determined up to a vector* $c\mathbf{1}$*.*

(iii) *The* $\mathbf{g}_{n+1} - \mathbf{g}_n$ *tend to* $\gamma\mathbf{1}$ *geometrically fast.*

Proof. (i) Since D is a contraction on X there is a unique fixed point $[\mathbf{g}]$. Thus $D'(\mathbf{g})$ and $\mathbf{g}$ differ by a constant vector.
(ii) Let $\tilde{\mathbf{g}}$ and $\tilde{\gamma}$ be such that $D'(\tilde{\mathbf{g}}) = \tilde{\mathbf{g}} + \tilde{\gamma}\mathbf{1}$. Then $[\tilde{\mathbf{g}}]$ is also a fixed point of D, and by uniqueness we conclude that $\tilde{\mathbf{g}} = \mathbf{g} + c\mathbf{1}$ for a suitable c. With 5.2(ii) this implies that

$$\begin{aligned} \tilde{\mathbf{g}} + \tilde{\gamma}\mathbf{1} &= D'(\tilde{\mathbf{g}}) \\ &= D'(\mathbf{g}) + c\mathbf{1} \\ &= \mathbf{g} + (c + \gamma)\mathbf{1} \\ &= \tilde{\mathbf{g}} + \gamma\mathbf{1}, \end{aligned}$$

i.e., $\gamma = \tilde{\gamma}$.
(iii) We have $\mathbf{g}_0 = \mathbf{0}$ and $[\mathbf{g}_{n+1}] = D([\mathbf{g}_n])$. Thus $[\mathbf{g}_n] \to [\mathbf{g}]$, and Banach's fixed point theorem even provides a c such that $||[\mathbf{g}_n] - [\mathbf{g}]|| \leq cL^n$. Therefore we may choose $c_n \in \mathbb{R}$ such that $||\mathbf{g}_n - \mathbf{g} - c_n\mathbf{1}|| \leq cL^n$.

With the notation of lemma 3.3 it follows that

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_{n+1} - \mathbf{g}_n &= D'(\mathbf{g}_n) - \mathbf{g}_n \\ &= D'((\mathbf{g}_n - \mathbf{g} - c_n\mathbf{1}) + (\mathbf{g} + c_n\mathbf{1})) - \mathbf{g}_\mathbf{n} \\ &=_{cL^n} D'(\mathbf{g} + c_n\mathbf{1}) - \mathbf{g}_n \\ &= \mathbf{g} + c_n\mathbf{1} + \gamma\mathbf{1} - \mathbf{g}_n \\ &=_{cL^n} \gamma\mathbf{1} \end{aligned}$$

so that $|g_{n+1}(i) - g_n(i)| \le 2cL^n$ for all n and i. □

With $\mathbf{g}$ and γ one can find a *constant adaptive strategy* which is close to optimal. More precisely, whenever $\sigma : \{0,\ldots,s-1\} \to \{1,\ldots,r\}$ is a map, the *constant adaptive strategy* $\mathcal{S}_\sigma$ *associated with* σ is defined by:

> "Suppose that you are now at state i. Then choose $(\mathbf{P}_{\sigma(i)}, \mathbf{x}_{\sigma(i)})$ for the next round."

Lemma 7.4 *Define a vector* $\mathbf{x}_\sigma$ *and a stochastic matrix* $\mathbf{P}_\sigma$ *as follows:*
the i*'th component of* $\mathbf{x}_\sigma$:= *the* i*'th component of* $\mathbf{x}_{\sigma(i)}$.
the i*'th row of* $\mathbf{P}_\sigma$:= *the* i*'th row of* $\mathbf{P}_{\sigma(i)}$.

(i) $\mathbf{P}_\sigma$ *is* L*-contractive. In particular there exists a unique equilibrium distribution* π_σ.

(ii) *The expected gain after* m *rounds of a game which uses* $(\mathbf{P}_{\sigma(i)}, \mathbf{x}_{\sigma(i)})$ *is precisely the gain which is to be expected when playing with the strategy* $\mathcal{S}_\sigma$. *There is a constant* c *such that this gain equals* $m\langle \pi_\sigma, \mathbf{x}_\sigma\rangle + c_m$, *where* $|c_m| \le c$ *for every* m.

Proof. Assertion (i) is an immediate consequence of the fact that the $\mathbf{P}_\rho$ are uniformly L-contractive. For the proof of (ii) we introduce the following notation:
$E_n^{(1)}(i)$:=the expected gain after n rounds when starting at i and playing according to $\mathcal{S}_\sigma$;
$E_n^{(2)}(i)$:=the same, but this time one plays with $(\mathbf{P}_{\sigma(i)}, \mathbf{x}_{\sigma(i)})$.

Then $E_1^{(1)}(i)$ and $E_1^{(2)}(i)$ coincide with the i'th component of $\mathbf{x}_{\sigma(i)}$, and

$$E_{n+1}^{(k)}(i) = (\mathbf{x}_{\sigma(i)})_i + \sum_j p_{i,j}^{\sigma(i)} E_n^{(k)}(j)$$

for $k = 1, 2$. Hence $E_n^{(1)}(i) = E_n^{(2)}(i)$ for all n and i.

It has already been noted in the introduction that the gain in the m'th round is $\langle \pi_\sigma, \mathbf{x}_\sigma\rangle$ up to an error which tends to zero with $m \to \infty$ geometrically fast. This proves the second part of the assertion. □

It follows that the "value" of a constant adaptive strategy σ is measured by $\langle \pi_\sigma, \mathbf{x}_\sigma\rangle$. The best possible among these r^s numbers can be found once one knows $\mathbf{g} = (g_0, \ldots, g_{s-1})$ and γ from theorem 5.3:

Theorem 7.5 *Let* $\tilde\sigma$ *be a map from* $\{0,\ldots,s-1\}$ *to* $\{1,\ldots,r\}$ *such that*

$$\max_\rho x_i^\rho + \sum_j p_{i,j}^\rho g_j = x_i^{\sigma(i)} + \sum_j p_{i,j}^{\sigma(i)} g_j$$

for every i. *Then the constant adaptive strategy associated with* $\tilde\sigma$ *is optimal in the following sense:*

(i) $\langle \pi_{\tilde\sigma}, \mathbf{x}_{\tilde\sigma}\rangle = \gamma$.

(ii) *There is a constant d such that the optimal gain $g_m(i)$ can be written as $m\gamma + d_m$ with $|d_m| \le d$ (so that, in view of the preceding lemma, the constant strategy $\mathcal{S}_{\tilde\sigma}$ is close to optimal).*

(iii) *For any σ one has $\langle \pi_\sigma, \mathbf{x}_\sigma \rangle \le \gamma$: no constant adaptive stategy gives better results than $\tilde\sigma$.*

Proof. (i) It follows from the definition of $\tilde\sigma$ that

$$\mathbf{x}_{\tilde\sigma} + \mathbf{P}_{\tilde\sigma}\mathbf{g} = \mathbf{g} + \gamma\mathbf{1}.$$

Consequently one has, for arbitrary n,

$$(\mathbf{P}_{\tilde\sigma})^n \mathbf{x}_{\tilde\sigma} = ((\mathbf{P}_{\tilde\sigma})^n - (\mathbf{P}_{\tilde\sigma})^{n+1})\mathbf{g} + \gamma\mathbf{1}.$$

With $n \to \infty$ the left hand side tends to $\langle \pi_{\tilde\sigma}, \mathbf{x}_{\tilde\sigma} \rangle \mathbf{1}$ and the right hand side to $\gamma\mathbf{1}$. Therefore $\langle \pi_{\tilde\sigma}, \mathbf{x}_{\tilde\sigma} \rangle = \gamma$.
(ii) By theorem 5.3(ii) the $g_{n+1}(i) - g_n(i)$ tend to γ geometrically fast. It remains to write $g_m(i)$ as

$$g_m(i) = (g_m(i) - g_{m-1}(i)) + (g_{m-1}(i) - g_{m-2}(i)) + \cdots + (g_1(i) - g_0(i)).$$

(iii) For *any* adaptive strategy we know that the expected gain is bounded by $g_m(i)$. Thus

$$m\langle \pi_\sigma, \mathbf{x}_\sigma \rangle + c_n \le g_n(i) = m\gamma + d_m$$

with suitable bounded sequences (c_m) and (d_m). This implies $\langle \pi_\sigma, \mathbf{x}_\sigma \rangle \le \gamma$. □

REFERENCES

[1] E. BEHRENDS. *Introduction to Markov Chains – with Special Emphasis on Rapid Mixing.* Vieweg Verlag, Wiesbaden 2000.

[2] L. BREIMAN. *Optimal gambling systems for favorable games.* Fourth Berkeley Symp. on Math. Stat. and Prob. **1** (1961), 65–78.

[3] E.B. DYNKIN, A.A. YUSHKEVICH. *Controlled Markov Processes.* Springer, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[4] G.P. HARMER, D. ABBOTT. *Parrondo's paradox.* Statistical Science **14** (1999), 206–213.

[5] G.P. HARMER, D. ABBOTT. *Losing strategies can win by Parrondo's paradox.* Nature **402** (1999), 264.

[6] G.P. HARMER, D. ABBOTT, P. TAYLOR. *The paradox of Parrondo's games.* Proc. of the Royal Society **456** (1994), 247–259.

[7] G.P. HARMER, D. ABBOTT, P. TAYLOR, J. PARRONDO. *Brownian ratchets and Parrondo's games.* Chaos **11** (2001), 705–714.

[8] O. HERNÁNDEZ-LERMA, J.B. LASSERRE. *Discrete-Time Markov Control Processes.* Springer, Applications of Mathematics 30, Berlin, Heidelberg, New York, 1996.

[9] R. KARP. *A characterization of the minimal cycle mean in a digraph.* Discrete mathematics **23** (1978), 309–311.

[10] J.M.R. PARRONDO. *Juegos de azar paradójicos.* La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española **4** (2001), 355–365.

[11] R. PINSKY, M. SCHEUTZOW. *Some remarks an dexamples concerning the transience and recurrence of random diffusions.* Ann. Inst. Henri Poincaré **28** (1992), 519–536.

[12] S. RAHMANN. *Optimal adaptive atrategies for games of the Parrondo type.* Preprint.

[13] D.J. WHITE. *Markov Decision Processes.* John Wiley and Sons, 1993.

Freie Universität Berlin,
Fachbereich Mathematik und Informatik,
Arnimallee 2–6,
D-14 195 Berlin, Germany;
e-mail: behrends@math.fu-berlin.de

Looking for Mathematics

Av Gudmundur Birgisson

Iceland University of Education
gbirgiss@khi.is

When youngsters are asked where they think mathematics is used, most of them say that people need mathematics when they go shopping and in school. Many studies have shown that, in general, youngsters do not have a clear idea of where mathematics is used, although most of them believe that mathematics is useful.
A few months ago, I sent my students at the Iceland University of Education, out looking for mathematics. They visited many businesses and institutions and interviewed employees about the use of mathematics in their work. They found mathematics being used in places they had never expected, and in some of the places, were they thought mathematics played an important role, no mathematics was being done.
In this paper I will tell the story of my students search for mathematics, and reveal where mathematics was found, what kinds of problems were being solved, and where mathematics was not found.

Introduction

For students learning mathematics, it is important to believe that the mathematics they are learning is important for them. Of course, mathematics is important for many reasons, but one of the things making mathematics important for a student is how useful it is. According to Atkinson's (Atkinson, 1957) expectancy x value theory, motivation is determined by four factors. They are the perceived probability of success, the incentive value of success, perceptions of the probability of failure, and the incentive value of failure. Values affect how much effort a student is willing to invest in a particular task. If the value of the task is high for a student, she will work hard on that task, assuming that the student believes she can succeed, and if the value of the task is low for a student, he will not invest as much effort in the task, even if he believes he could succeed. There are different types of values associated with the mathematical tasks we give to students, and the mathematics students are supposed to learn in general. Eccles (Eccles, 1983) defines three types of values that are relevant to achievement: *attainment value*, *utility value*, and *intrinsic value*. Eccles defines *attainment value* as the subjective importance of doing well on a task, determined by the relevance of the task for the individual, *utility value* refers the student's perception of the usefulness of the task (or what is learned by completing the task) in situations not related to the task itself, and the *intrinsic val*ue refers to the immediate pleasure derived form the work done on the task. The ideal student would believe that he can become good at mathematics, and that knowing mathematics is valuable. More precisely, the student would value the tasks given by the teachers (attainment value), believe that what is learned by completing the tasks is useful (utility value), and enjoy working on the tasks (intrinsic value). If a student does not believe

that mathematics is useful, the motivation of the student suffers. Even if a student believes she can learn mathematics, she may not engage in mathematical tasks because she does not believe that what is learned by completing the tasks is useful in other (non – school) situations.
A study of Icelandic 5th and 9th grade pupils′ beliefs about mathematics and mathematics learning (Birgisdóttir & Björnsdóttir, 2000) has documented many such cases. A significant number of pupils in the study believe that they can become proficient at the mathematics being taught at the time, but also say that they are not doing the work their teacher has recommended. Also, although most of the pupils in the study say that they think mathematics is useful, they only have two answers when asked where mathematics is used: "in the shop, and in school". This gives reason to believe that Icelandic pupils need to learn more about where mathematics is used in real life, and for what purpose. Their teachers must take the "when will we ever use this?" question more seriously, and take it as a part of their responsibilities as math teachers to enlighten their pupils about the usefulness of mathematics, not just by claiming that math is useful, but by giving specific and detailed examples.

A Course in Motivation

In recent years, a course for preservice elementary teachers has been developed at the Iceland University of Education to address this problem. The course consists of three parts:

- Modeling: The preservice teachers find a real problem and solve the problem using the mathematics they have learned.
- Learning applied mathematics: The preservice teachers study applications of pure mathematics, and mathematics created specifically to solve practical problems.
- Looking for mathematics: The preservice teachers go looking for people who use mathematics in their work.

The first two parts are traditional and there is little need to elaborate on them. The third part is less common in such courses, and as it happens, it has been the most successful part of the course. In the remainder of this paper, I will share a few of the findings of my students:[1]

Mathematics in the hospital
One of the groups decided to visit a local hospital. They traveled through the various wards, from dermatology to cardiology. He hospital staff was able to identify many aspects of their work where mathematics is involved. The examples they gave included:

- Calculating the intensity of the x-ray so that the pictures are clear
- Calculating the lung capacity
- Modeling the spread of infectious disease
- Determining dosage of medicine
- Representing the rhythm of the heart on a graph

In all cases, people were aware that what they were doing was based on mathematics. However, in most cases the hospital staff was not doing mathematics, rather using equipment they knew was designed and calibrated by people doing mathematics. One exception was found in ontology. There, the students found, much to their surprise, that being able to solve a quadratic equation is necessary to determine the appropriate dose in radiation therapy. They interviewed the person who does the calculations, a physicist who was happy to meet the

[1] My thanks to the preservice teachers whose work I am sharing. They are: Hrefna, Elena, Sigga, Guðlaug, Bjarki, Óskar, Stefán, Hekla, Guðbjörg, Harpa, Hrafnhildur, Rannveig, Fríða, Kittý, Kristján, Gunnur, Hjördís, Guðlaug, Margrét, Halla, Brynja, Gerður, and Jónatan.

students and share the methods he used. They learned how the equation $\frac{n\beta}{\alpha}d^2 + nd - BED = 0$ [2] is used to determine the dosage for each visit, and how to recalculate the dosage if the number of visits is changed. The students said that after this visit, they would at least be able to answer the "Where is this used?" question when the topic was quadratic equations by referring to this example.

Fishy math
One of the groups visited an exporter of fish. He buys fish, mostly salmon and trout, from various fish farms in the Faeroe Islands, and sells fish all over the world. Purchasing prices vary according to quality and size of the fish, and so do selling prices. Shipping costs vary, depending on the choice of shipping company and route. Purchasing prices are in Danish Kroner, selling prices in US Dollars, but the exporter's profit (or loss) is calculated in Icelandic Kroner. This means, the group discovered, that if one wishes to make a living exporting fish, being able to think mathematically is essential.

The twice-the-price-of-color theorem
One group interviewed an elderly housepainter, and enquired about the methods he used to determine the price when bidding for a painting job. He explained in some detail the elaborate and ingenious heuristics he used to estimate the amount of paint and other materials he would need for a particular job. "Then," he added, "I just double the amount of money needed for materials, and that is the total price for the job." This means that for the work, he takes the same amount of money needed for materials. The students found this interesting and curious: If you choose expensive paint for your house, you might paying a lot more money for the same amount of work!

Mathematics is money
Two groups visited banks. One group visited a typical neighborhood branch of an Icelandic bank. There, they asked a clerk if he could do the calculations associated with a typical loan with a fixed interest rate. The clerk said that he remembered having learned how to do it, but reported that he no longer could. Then the students asked how he would go about checking if the computer had made an error if a customer would like to have something double checked. The clerk said that he would refer the customer to the branch manager. The students got an appointment with the branch manager, who apologetically reported that he would not be able to do the calculations they were asking about. He added that if something like this really needed checking, he could call a person in the head office of the bank who could do the calculations in seconds, and he would know right away if an error had been made. Like good investigators, my student decided to find this math person in the head office. Like so many others, the bank's math person was happy to be visited by a group of curious students, but had to admit that when the people from the neighborhood branches called him for a double check of calculations, he did not actually do the calculations by hand. He used an Excel document, where all the appropriate formulae were found. He added that although the calculations were not done by hand, they were done by a different computer system than the one used by the people in the neighborhood branches, and therefore some security was being provided. The students wanted to know more about the Excel sheet he used, and how it was made. He happily provided a copy, but said that he could not give them detailed explanation because he

2 BED = biological effective dose, BED = D [1 + d/(α/β)], D = Total dosage = d*number of visits, d = Dosage during each visit, α/β = Known reaction of different cell types.

had not created the sheet himself. It was made by his predecessor, he had found it convenient to use, and had never been able to spend enough time studying it to really understand how it works.
Another group visited an investment bank. Their experience was very different. They found that almost everyone they spoke to does math in their work, and all the people they met would happily explain to them how to do the different calculations involved in their work. The group learned various techniques, mostly ways to calculate the value of contracts, and eagerly shared their newfound knowledge with the other preservice teachers when they reported their findings.

Mathematics on fire
One group, a few girls, visited the fire department. Their choice was not based on my recommendations – in fact I had expressed doubts that they would find much mathematics being done by the firemen, and suspected that one of them had a boyfriend in the fire department – or would like to have a boyfriend in the fire department. Luckily, they paid no attention to my advice, and, much to my surprise, they discovered that being able to do mathematics is an essential quality of the modern fireman. The firemen calculate how long each fireman can stay inside a smoke-filled building, based on bodyweight and shape. When someone calls the fire department to report a fire, the calculations begin as the firemen put on their boots and rush to their trucks. For each job, they need to calculate the necessary water pressure, and as the trucks are speeding to the fire, the calculations are done, and then, if needed, the utility company is called, and water is turned off in neighboring areas to ensure enough pressure to reach the top of the burning building. The group found many more examples of mathematics in the fire department.

Mathematics in a small town
One of my students lives in a small town in rural Iceland. He visited every place of employment in the town, but did not find anyone who admitted to using mathematics in the workplace. Of course, it is highly unlikely that this small society is "mathless", but the fact that none of the people living there are aware of the role mathematics plays in their working life is interesting, and a serious concern for the mathematics teachers in the town: why should the pupils be motivated to learn mathematics if there is not a single person in the town who thinks you need mathematics for your work?

Conclusions

When the students had all returned from their search for mathematics, each group reported their findings to the whole class. The final project in the class was to make a web module for teenagers where they can learn about the use of mathematics. Many of the groups designed their webs based on the experience they had when they went looking for mathematics, and perhaps a few of the Icelandic youngsters now asking "where is this used?" are finding answers on the web.

References

Atkinson, J. W. (1957). Motivational determinants of risk-taking behavior. *Psychological Review, 64*, 359-372.

Birgisdóttir, B., & Björnsdóttir, G. (2000). *Með því að vinna vel get ég orðið góður í stærðfræði (By working hard, I can become good at math).* Unpublished B.Ed., Iceland University of Education, Reykjavik.

Eccles, J. (1983). Expectancies, values, and academic behavior. In J. T. Spence (Ed.), *Achievement and Achievement Motives: Psychological and Sociological Approaches* (pp. 77-146). San Francisco: Freeman.

Using history in popularisation of mathematics

Av Franka Miriam Brükler

Department of Mathematics
University of Zagreb, Croatia
bruckler@math.hr
www.math.hr/~bruckler/

1. Introduction

There are several target groups when one is talking about popularisation of mathematics, the most important one being teachers of mathematics because they affect all the other groups. Most of the people who now «hate» mathematics or boast about «always being bad in math» have a bad experience with mathematics in classroom which killed all their possible love for or interest in the subject. Very often the problem was not in the subject as such, but in the attitude and the presentation of the teacher. This is why above all the way mathematics is presented in pre-universitary schooling has to be improved at least in some aspects in order to avoid new generations getting the picture of mathematics as a closed subject, where there is no place for creativity, there is no cultural or social context, but just a set of rules to be obeyed and used when it cannot be avoided. This is why mathematics should be popularised especially among teachers of mathematics, who quite often appear as if they hate the subject they are talking about – or as if it were boring to them (is it?) A little enthusiasm from the side of the teacher can create a big interest among the pupils. And the easiest way to bring enthusiasm to teachers is to show them the fun, useful and interesting sides of mathematics.

But it is not only the teachers popularisation of mathematics is directed to: it can (and should) be aimed directly at children (through exhibitions and similar manifestations), the general public (mostly the same means, but other way of presentations) and the professional mathematicians and students of mathematics.

There are many parts of mathematics adaptable for popularisation, e.g. recreational math problems. One of the most widely to popularisation of math applicable topic is history of mathematics. So the main ideas to be discussed in this paper are the following:

- Why should pupils and students learn history of mathematics?
- Why should teachers use history of mathematics in schools?
- How can it be done?
- How can it improve the public image of mathematics?

This paper has no aim giving complete or even almost-complete answers to these questions, but mainly to give an overview of the possible answers as a starting point for further investigations, or just give a subset of possible ideas for applying history of mathematics in popularisation of mathematics. And if there is a simple answer to why popularisation of mathematics should be done at all: because, as with most other things, the wrapping either supports or reduces the interest in the content – nicely wrapped up things are simply more appealing, and they don't lose their qualities.

2. History of mathematics in the math classroom

Incorporating history of mathematics in the classroom math presentation has many advantages. From the aspect of making mathematics more enjoyable for the pupils, history of mathematics gives plenty of interesting and fun examples. The examples are also often visually stimulating or can give visual explanations of some nowadays purely symbolical techniques (see example 1 and 2 below). Besides, giving some side-comments (e.g. when a math-symbol was introduced), anecdotes and quotations can enliven the class even when (or exactly because) they are not requested to be learned.

From the aspect of improving the understanding of the subject, use of historic versions of problems can make them more appealing and understandable as well as give additional insights in already known topics.

From the didactic point of view, it can improve the understanding of problems pupils have and the errors they make. For example, the use of negative numbers and the rules for doing arithmetic with negative numbers were far from easy in their introducing. Though they first appeared in India, Arabs didnn't use them. They were introduced in Europe by the renaissance time (Cardano and others), but even Augustus De Morgan in the 19th century considers them inconceivable. Their full use starts as late as the 19th century. Another didactical benefit in using historical examples is the possibility to show that there are things that cannot be done – it is often an impression of math problems as if every problem has a positive solution, while the truth is far from that (a typical example would be the three classical problems of doubling the cube, trisecting an angle and squaring a circle). The historical approach can also improve teaching because it shows the natural process of creation of mathematical facts (the basic idea, then the proof) which one can adopt for many topics in the classroom. Historical exapmles and developments can also lead pupils to learn asking questions; a typical example would be the story of the classical problem of doubling the cube – if we know how to double a square using a ruler and a compass, can we double the cube with the same means? For smaller children the main use of history of mathematics would be using it to show the development of notions or just to give some easy-to-understand examples (like proofs without words, geometric algebra and similar). For older pupils there is the possibility of approach by specific historical topics and also of improving the understanding of already known topics, giving research work on historical topics as homework or group work. Generally speaking, history of mathematics gives good ideas for giving a broad outline or overview of the topic, either when introducing it or when reviewing it.

When illustrating a topic by examples, the historical examples and problems are perfect because they are real: many of them were stated and solved because they arose from practical questions. Often it is also desirable to present connections of mathematics with other scientific disciplines. History of mathematics gives many examples of such interconnections since many of mathematical problems from the past arose from problems in other sciences (especially astronomy, physics, economy and law) and also since many of the great mathematicians of the old times were multidisciplinary and worked not only in mathematics.

There is another important reason for using history of mathematics in schools. The overall impression of mathematics usually is that it is (any or all of the following):

- a closed subject with no more research possibilities

- a completely technical subject
- only an useful tool
- there is no place for creativity in it
- it has nothing to do with the culturosociological development
- mathematicians are unemotional and dull or queer persons

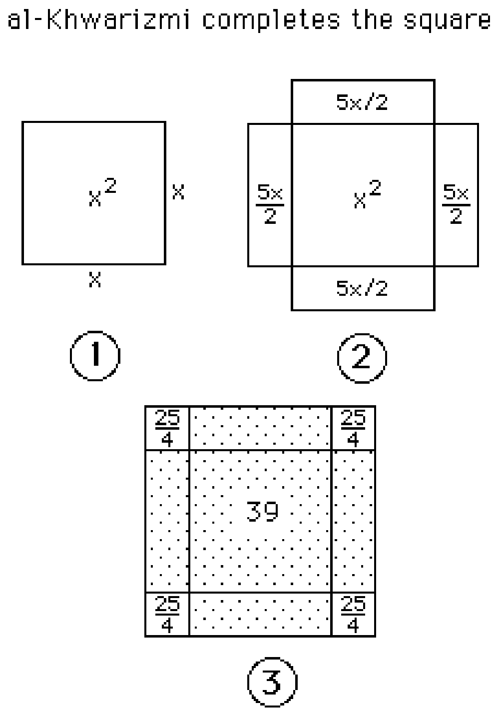
As mathematics is a very important part of human culture, it should definitely get the place it deserves, and not be a subject most people are proud about to say they were never good in it. History of mathematics gives insights in the creative process. Through historical insights in mathematical topics children learn that mathematics is not a closed subject and not a finished set of knowledge, and also that it is cumulative (everything that was once proven is still valid, a fact not true for other natural sciences). Through biographies and anecdotes one can also show that math is not dry and mathematicians are human beings with emotions and normal (or if not exactly normal, then certainly not generally dull) lives.

Often the possibility of incorporating historical aspects in the math classroom is quite small because of the prescribed programmes in mathematics. Still, even small portions of historical examples or stories help learning how to develop ideas and improve the understanding of the subject, make learning more fun and improve the picture of mathematics (not only in the sense that it gives a nicer picture, but also a more realistic one).

To give a more vivid impression of the possible uses of history of mathematics in the math classroom, here are some examples:

Example 1: Solving a quadratic equation by completion to a square

The purely algebraic approach is often confusing or at least quite dry and uninteresting for school children. The historical version of completing a square is visual (which makes it more clear and appealing) and makes the operations and the name of the process obvious. The method originated in ancient Babylonia, the here presented version is by the great Arab mathematician al-Khwarizmi (ca. 780-850).



Say one has to solve the quadratic equation

$$x^2 + 10\,x = 39.$$

Then x^2 represents the area of a square (picture 1)[1], and $10x$ represents the area of a rectangle with sides 10 and x or, equivalently, of 4 rectangles with sides x and 5/2. These can be added to a square as in picture 2, and the equation says that the area on these picture is 39. To be a complete square, four squares with side 5/2 are missing. If we add them, we obtain 4 times 25/4 i.e. 25 units more of area, but now it is a square with side $x+2\cdot 5/2$. This means that the square on picture 3 has area equal to $(x+5)^2=39+25=64$, i.e. $x+3=9$ i.e. $x=6$.

Of course, we don't see the negative root of the equation from these pictures, but the process of completing a square gets a logical background and also gives a visual side that can help in memorizing the rule.

[1] The above picture is taken from the MacTutor History of Mathematics Archive (http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/Mathematicians/Al-Khwarizmi.html)

Example 2: Proofs without words

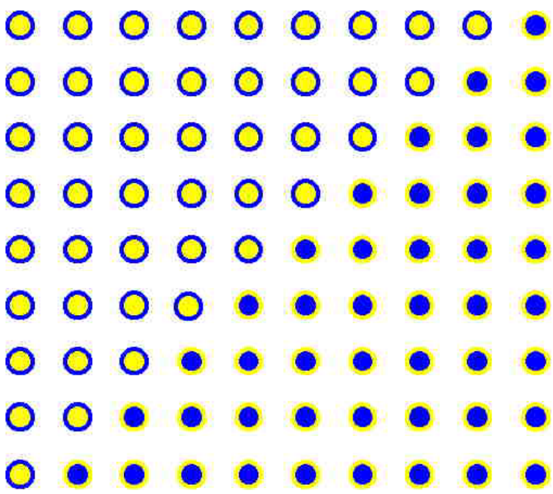
There are many proofs without words in mathematics and such proofs often are more easily understood and accepted, even if they miss the formal quality of a standard proof (which of course can be added afterwards). For example, the identities

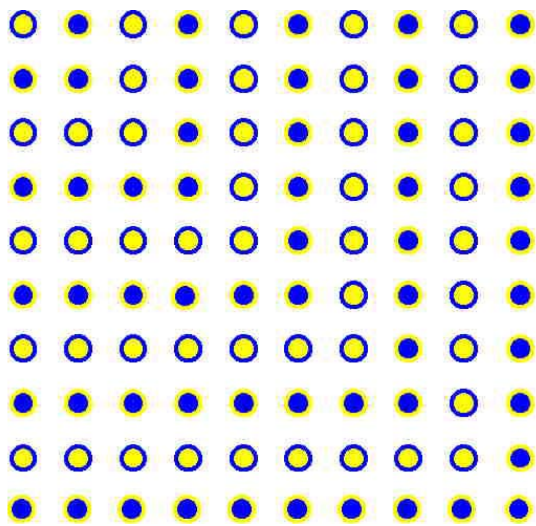
$$2(1+2+...+n)=n(n+1)$$

and

$$1+3+5+...+(2n-1)=n^2$$

are nowadays usually proven by mathematical induction, but were known to be true much before that method of proof was. They are in facts Pythagorean number theory theorems that were originally proven by visual methods. The first identity states that a double triagonal number is equal to a rectangular number (a triangular number is a natural number which can be represented arranging some small stones so that there is 1 in the first row, 2 in the second, 3 in the third and so on; a rectangular number is a number which can be represented by a rectangular array of such stones, but so that the number of columns exceeds the number of rows for one). The second identity states that the sum of consecutive odd numbers equals a quadratic number. The following pictures can easily show the truth of these identities:





Example 3: The bridges of Königsberg

Euler's problem of the bridges of Königsberg when considered only as a problem is a problem in recreational math. As such, it can be presented already to smaller children. In higher classes i.e. gymnasium level, partly also earlier, the problem can be stated as an example of a class of problems leading to simple concepts of graph theory (and even introduction to more complicated concepts for more advanced pupils). It can also be an introduction or connection to applications of mathematics in chemistry.

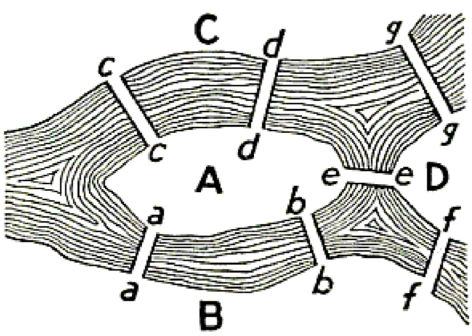


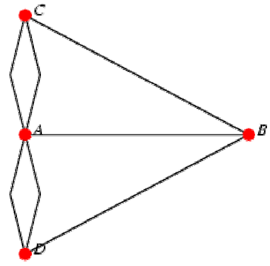
FIGURE 98. *Geographic Map: The Königsberg Bridges.*

The problem consists of the question if there is a route leading over the bridges as shown in the picture[2] so that every bridge is crossed only once. The answer is yes if we allow the endpoint to be on another part of the city than the starting point, and no if we have to return to the starting point. The reason is simple: if we have to pass through a part of the city, then we must

---

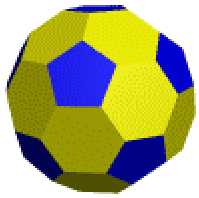
The picture and the graph are taken from Weisstein, Eric W. "Königsberg Bridge Problem" *Eric Weisstein's World of Mathematics.* http://mathworld.wolfram.com/KoenigsbergBridgeProblem.html get into it and out of it. So one has to have an even number of bridges connected to that part if we may not pass any bridge more than once. If the start and endpoint differ, then these two can be exceptions i.e. they may have odd numbers of bridges connected to them.

The connection to graph theory, and this problem is considered to be the beginning of this mathematical discipline, is obtained by simplifying the situation: the land parts can be considered as vertices on the graph, and the bridges as edges («connections between vertices»). We obtain the picture on the right. This is also a good example of a topological problem: a basically geometric problem in which the distances and angles of the object don't matter, but only the connections between them.



For further studies many other historical graph problems exists and many can be quite easily explained, even if not always with complete proofs. Besides, graph theory has quite a few applications, the most important ones probably being in chemistry. For example, the 20th century Hungarian mathematician George Pólya found a way for enumeration of isomers (molecules which differ only in the way the atoms are connected) that is pure graph-theoretical.Example 4: Plato, Archimedes and molecules

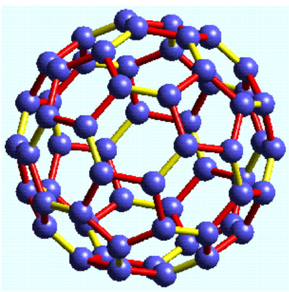
What is a football? A polyhedron made up of regular pentagons and hexagons (made of leather, sewn together and then blown up to a ball shape). If we think of the faces as rigid, it is one of the Archimedean solids – these are solids whose sides are all regular polygons. The official mathematical name for the football is truncated icosahedron. There are 18 Archimedean solids, 5 of which are the Platonic or regular ones (all sides are equal polygons).[3] There are 12 pentagons



and 20 hexagons on the football so the number of faces is F=32. If we count the vertices, we'll obtain the number V=60. And there are E=90 edges. If we check the number V-E+F we obtain

$$V-E+F=60-90+32=2.$$

This doesn't seem interesting until connected to the Euler polyhedron formula: V-E+F=2 for all convex polyhedrons (a convex polyhedron is a solid which has no dents). This implies that if we know two of the data V, E, F the third can be calculated from the formula i.e. is uniquely determined. Together with the already mentioned Königsberg bridge problem, this formula is considere to be the beginning of graph theory and thus of topology.



In 1985. the football came to a new fame and application: the chemists H.W.Kroto and R.E.Smalley discovered a new way how pure carbon appeared. It was the molecule C_{60} with 60 carbon atoms, each connected to 3 others. It is the third known appearance of carbon (the first two being graphite and diamond). This molecule belongs to the class of fullerenes which have molecules shaped like polyhedrons bounded by regular pentagons and hexagons. They are named after the architect Buckminster Fuller who is famous for his domes of the same shape. The C_{60} is the only possible fullerene that has no adjoining pentagons (this has even a chemical implication: it is the reason of the stability of the molecule!)[4]

Example 5: Fibonacci numbers and the Golden Ratio

[3] The picture of the truncated icosahedron is from Rich Morris's webpage on Uniform Polyhedra http://home.att.net/~numericana/answer/polyhedra.htm

[4] The buckminsterfullerene picture is taken from http://www.umh.ac.be/~ichim/docs/studs01-02/fullerenes.html

Fibonacci numbers have many applications and connections to popular mathematics. They originated in the book Liber abaci by Leonardo of Pisa known as Fibonacci in the 13th century. It was the well-known problem about the number of rabbit pairs after a given period, if some (quite unrealistic) conditions are put on their reproduction. Still, these numbers have shown to have lots of interesting properties and applications ranging from pure mathematics to natural sciences. For most of the applications their connection to the Golden number is the most important part (the ratios of two consecutive Fibonacci numbers converges to the Golden number). They can be discovered on various places in nature, the most well known being seed-arrangements of many plants (like sunflowers, pinecones). The reason of their appearance is mathematical, is not very complicated in proof and can be presented to higher-grade pupils, while smaller children can try to discover the numbers in the seed-arrangements, or in the family tree of honeybees. There are many possible topics connected to them that are suitable for assignments, group work and presentations, ranging from more historical ones (the connection of the Golden number to Platonic solids and art in renaissance, Fibonacci's biography and other) to very applied ones (tilings of the plane and quasicrystals).<u>Example 6: Anecdotes</u>

Anecdotes have their main function to enliven the class and conversation. They show that math is not a dry subject and mathematicians are normal human beings with emotions, but also some specific ways of thinking. Some anecdotes can serve as a good introduction to a topic. We give here two anecdotes, one of chiefly entertainment value, while the other is a typical example of an anecdote useful in introducing a mathematical topic (in this case the discussion of algebraic equations).

Norbert Wiener was walking through a Campus when a student who wanted to know an answer to a mathematical question stopped him. After explaining him the answer, Wiener asked: "When you stopped me, did I come from this or from the other direction?" The student told him and Wiener said: "Oh, that means I didn't have my meal yet." So he walked in the direction to the restaurant...

It is reported that Hermann Amandus Schwarz would start an oral examination as follows:
Schwarz: "Tell me the general equation of the fifth degree."
Student: "$ax^5+bx^4+cx^3+dx^2+ex+f=0$*".*
Schwarz: "Wrong!"
Student: "...where e is not the base of natural logarithms."
Schwarz: "Wrong!"
Student: ""...where e is not necessarily *the base of natural logarithms."*
<u>Example 7: Quotes of great mathematicians</u>

Quotes have mainly the same functions as anecdotes: they can be used for adding some lighter sides to the lectures, or they can be used for discussion about mathematical and to mathematics connected ideas. For example the following quotes catch some essential, but usually not well known, aspects of mathematical work: Albert Einstein (1879-1955) said *Imagination is more important than knowledge.* René Descartes (1596-1650) stated *Each problem that I solved became a rule that served afterwards to solve other problems*. And Georg Cantor (1845-1918) said that *In mathematics the art of proposing a question must be held of higher value than solving it.* On the other side through some quotes we learn that not everything was obvious from the start, not even for the great mathematicians. As already noted before, there were quite a few problems with the introduction of negative numbers. Even Augustus De Morgan (1806-1871) said *The imaginary expression* $\sqrt{(-a)}$ *and the* *negative expression -b, have this resemblance, that either of them occurring as the solution of a problem indicates some inconsistency or absurdity. As far as real meaning is concerned, both are imaginary, since -a is as inconceivable as √(-a).*

We conclude the discussion of possible uses of history of mathematics in school mathematics with a short summary of the above ideas. The main groups of adaptable materials are: anecdotes, biographies, quotes, historical books and papers, historical problems and overviews of development of specific mathematic topics or notions. The main advantages of using history of mathematics in the classroom are: imparting a sense of continuity of mathematics, providing a connection with the overall social and cultural context, additional insights in mathematical topics, connections with the real life and, last but not least, plain fun to make learning more enjoyable.

3. History of mathematics in general popularisation

There is another aspect of popularisation of mathematics: the approach to the general public. Although this is a more heterogeneous target group, and thus not so easy to approach, there are possibilities for bringing math nearer even to the established math-haters.

Besides presenting applications of mathematics (in the media, in books, in conversation...), there are two closely connected approaches: usage of recreational mathematics and history of mathematics. The topics that are at least partly connected to history of mathematics are usually easier to be adapted for public presentation. Presenting a mathematical idea from a historical viewpoint often helps simplifying the explanations. History of math also provides the framework for presenting math topics as interesting stories. The patience-level for reading math texts or listening/watching media-presentations about mathematics is generally very low. History of mathematics can help keeping the attention of public by providing a way to present mathematics as a story instead as a technique. History of mathematics also gives various ideas for interactive presentations, especially suitable for science fairs and museum exhibitions. Most of these are the same that can be adapted for schools (like Fibonacci numbers and nature), only the presentations may vary. For example, in school-math, many topics can be used just as help for presenting a topic, while in public presentations they become a stand-alone subject. Thus the main difference between the approach to the general public and to school-children is this: in schools we use history of mathematics, and other more or less popular mathematics, chiefly as motivation for a topic or as a help for understanding it, while in the general popularisation the point is less to teach some real mathematics, but more to change the attitude towards mathematics, so the topics mostly become self-sufficient (of course, if possible, with some notes on their uses or real meaning).

4. History of mathematics for professional mathematicians and math students

There is a group that is often left unconsidered when talking about target-groups of math popularisation: the professional mathematicians and the students of mathematics. Of course, it is not really necessary to make mathematics more interesting to them, since they wouldn't have chosen it if they weren't interested in it. Still, there are some arguments why even they should learn the popular side of mathematics. The main reason to do that is that many people confirm (or, more rarely, establish) their opinion of mathematics as a dry and mysterious discipline for out-of-this-world persons after they meet a professional mathematician. Why does this happen? Sometimes because this mathematician really is of the described type. More often, because this mathematician when asked about his work can give only the answer: «Oh, that is so complicated to describe... Let me see... have you maybe heard of Hilbert spaces? No? Well, then I don't know what to tell you...» or something of similar nature. And this is probably the truth. But the person who asked him probably just wanted to get some glimpse of doing mathematics. And the mathematician couldn't answer him because he forgot or never learned anything not directly connected to his more or less scientific work.

So the point is: if mathematicians learn popular mathematics, this would lead to better communication with non-mathematicians. This way they can start changing the pre-established opinions of them (unfortunately, the mathematicians often do not care about their image). In this aspect, history of mathematics is especially suitable, since it can give lots of potential conversation material, from interesting anecdotes and biographies to descriptions of some serious mathematics. Also, learning about history of their field of work enables mathematicians to see themselves as part of the general cultural and social processes. And if they should have to deal with any kind of teaching mathematics, it gives them additional understanding of problems pupils and students have in comprehending some mathematical notions and facts. But above all: if mathematicians have fun with their discipline it will be felt by others.

5. Math popularisation actions in Croatia using history of mathematics

At the University fairs in Zagreb, organized for information of future students of the university about the possibly faculties and courses, the Department of Mathematics is presented with a stand with various activities and informations, among which many have the objective to improve the public image of mathematics. Among those, there are quite a few connected to history of mathematics. There are informational posters about great female and Croatian mathematicians; there is a game of connecting mathematicians with their biographies (shown on the pictures below); the backside of the informational leaflet of the Department contains quotes from famous mathematicians.

All students of mathematics in Croatia (specializing for becoming teachers) have *History of mathematics* as a compulsory subject. Fourth year students of the Department of Mathematics in Osijek have to, as part of the exam for the course *History of mathematics*, write and give a short lecture on a subject from history of math, usually on the borderline to popular math (e.g. *Origami and math*, *Mathematical magic tricks*, etc.). The pupils in schools make posters about famous mathematicians or math problems as part of their homework/projects/group activities. The Teaching Section of the Croatian Mathematical Society decided a few years back to initiate publishing a book on math history for schools; the book "*History of Mathematics for Schools*" has just come out of print. The authors of math textbooks for schools are requested (by the Teaching Section of the Croatian Mathematical Society) to incorporate short historical notes (biographies, anecdotes, historical problems...) in their texts; it's not a rule though and so it is not completely followed.

"*Matka*" (a math journal for pupils of about gymnasium age) has regular articles «*Notes from history*» and «*Matka's calendar*». "*Poučak*" (a journal for school teachers of mathematics) uses portraits of great mathematicians on their leading page and occasionally has texts about them. "*Osječka matematička škola*" (a journal for pupils and teachers in the Slavonia region) has a regular section giving biographies of famous mathematicians. The new online math-journal *math.e* (http://www.math.hr/~mathe) has regular articles about math history; the first edition also has an article about mathematical stamps. There are also some books in popular mathematics published in Croatia that have historical parts or backgrounds ("*How the modern mathematics was made*", "*Mathematics and music*", "*A book about calendars*", all by Zvonimir Šikić).

6. Conclusion

Everything that makes pupils more enthusiastic about mathematics is good for the public image of mathematics because most people form their opinion (not only) about math during their primary and secondary schooling. History of mathematics can not only improve the understanding of the subject and help connect it better to the real life, but can also provide more fun for the pupil and the teacher. Since a teacher who is obviously having fun with his subject will have much less trouble with imparting love or at least preventing hate for the subject than a teacher who is seems to be bored with his subject (and math teachers often have that appearance) it is obvious that even when not directly applied in the classroom, history of mathematics can improve the picture pupils have of math. Besides the approach to new generations, history of mathematics can give ideas for approaching the already established "math-haters" in a not officially mathematical context.

7. Bibliography and links

1. VITA MATHEMATICA Historical Research and Integration with Teaching (Ed. Ronald Calinger, MAA Notes No.40, 1996)
2. LEARN FROM THE MASTERS (editors: F.Swetz, J.Fauvel, O.Bekken, B.Johansson, V.Katz, The Mathematical Association of America, 1995)
3. USING HISTORY TO TEACH MATHEMATICS An international perspective (editor: V.Katz, The Mathematical Association of America, 2000)
4. THE STORY OF MATHEMATICS From counting to complexity, Richard Mankiewicz (Orion Publishing Co. 2000)
5. GUTEN TAG, HERR ARCHIMEDES, A.G. Konforowitsch (Harri Deutsch 1996)
6. MATHEMATICS: FROM THE BIRTH OF NUMBERS, Jan Gullberg (W.W. Norton&Comp. 1997)
7. ABENTEUER MATHEMATIK Brücken zwischen Wirklichkeit und Fiktion, Pierre Basieux (Rowohlt 1999)
8. ENTERTAINING SCIENCE EXPERIMENTS WITH EVERYDAY OBJECTS; MATHEMATICS, MAGIC AND MYSTERY; SCIENCE MAGIC TRICKS; ENTERTAINING MATHEMATICAL PUZZLES; and other books by Martin Gardner (all the above are published by Dover Publications)
9. IN MATHE WAR ICH IMMER SCHLECHT, Albrecht Beutelspacher (Vieweg 2000)
10. STAMPING THROUGH MATHEMATICS, Robin J. Wilson (Springer 2001)
11. THE PENGUIN DICTIONARY OF CURIOUS AND INTERESTING NUMBERS, David Wells (Penguin Books 1996)
12. ALLES MATHEMATIK Von Pythagoras zum CD-Player (Ed. M. Aigner, E. Behrends; Vieweg 2000)
13. THE MATHEMATICAL TOURIST Snapshots of modern mathematics, Ivars Peterson (Freeman and Comp. 1988)
14. *http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/history/* Mac Tutor History of Mathematics Archive
15. *http://archives.math.utk.edu/topics/history.html* Math Archives History of Mathematics
16. *http://www.mathforum.org/library/topics/history/* Mathforum History of Mathematics
17. *http://dir.yahoo.com/Science/Mathematics/History/* Yahoo! Science, Mathematics,History
18. *http://babbage.clarku.edu/~djoyce/mathhist/* Another Math History site
19. *http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/* And one more Math History site
20. *http://math.furman.edu/~mwoodard/mqs/mquot.shtml* Mathematical Quotation Server
21. *http://scidiv.bcc.ctc.edu/Math/MathFolks.html* Mathographies
22. *http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/Links/Cultures.html* History of Mathematics Links: Mathematics in Specific Cultures, Periods or Places
23. *http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fractions/egyptian.html* Egyptian Fractions
24. *http://www.cut-the-knot.com/blue/Abacus.html* Abacus in various number systems
25. *http://www.cut-the-knot.org/ctk/index.shtml* Cut the knot! An interactive column using Java applets by Alex Bogomolny
26. *http://www.mcs.surrey.ac.uk/Personal/R.Knott/Fibonacci/* Fibonacci numbers and the Golden Section
27. *http://www.maa.org/news/mathtrek.html* Ivars Peterson's MathTrek
28. *http://www.dartmouth.edu/~matc/math5.geometry/unit1/INTRO.html* Math in Art and Architecture

29. *http://www.alcyone.com/max/lit/flatland/* Flatland - A romance of many dimensions
30. *http://www.merrimack.edu/~thull/origamimath.html* Origami Mathematics
31. *http://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/paper-models.html* Making paper models of polyhedra
32. *http://www.korthalsaltes.com/index.html* Paper Models of Polyhedra
33. *http://www.geocities.com/SiliconValley/Pines/5945/links.html* Pi links
34. *http://www.mathewitze.de/* Mathematikwitze, -Zitate, -Anekdoten, -Beweise, -Gedichte, ...

Att anvenda problem för att popularisera matematiken - en aspekt av problemens roll i matematiken

Av Barbro Grevholm

barbro.grevholm@mna.hkr.se

Högskolen i Agder

Inledning

Problemens roll i skolmatematiken och i vetenskapen matematik ser vid första granskning ut att vara ganska olika. I matematisk forskning är det väsentligt att kunna formulera nya, intressanta och relevanta problem för att sedan arbeta med deras lösning. I skolan ger vi i regel eleverna färdiga problem. Eleverna vet att både läraren och många andra redan har löst dessa problem. Kanske förlorar matematiken därmed en del av sin tjusning för eleverna. Det är dock möjligt att låta eleverna vara med och formulera problem och arbeta med att lösa dessa ursprungliga uppgifter. Elever är även fascinerade av hur problem påverkat utvecklingen av matematiken både i historisk tid och i nutid. Det räcker att se på den uppmärksamhet som lösningen av Fermats stora sats har väckt världen över. Simon Singhs populärvetenskapliga bok (1998) har lästs av många med stor spänning, trots att den berättar om svårtillgänglig matematik. Några av de klassiska problemen från matematikens historia lämpar sig för elever att arbeta med och kan fungera som popularisering av ämnet. Ta till exempel problemet med Königsbergs sju broar. Det är lätt att förstå, elever kan försöka lösa det. Med den bakgrunden är det sedan möjligt för läraren att berätta om Leonard Euler och visa hur han behandlade problemet. På detta sätt kan eleverna introduceras till topologi och grafteori, områden som i regel inte behandlas i skolans matematikkurser. Kochkurvan är ett annat exempel på problem som inledningsvis förbryllat matematiker och så småningom lett till utveckling av nya områden i matematiken, i detta fall kaosteori och fraktaler.

Vad är matematik och varför behöver den populariseras?

Det finns många olika uppfattningar om ämnet matematik. Och det går inte att beskriva ämnet i några korta meningar. Det finns stora böcker som försöker svara på frågan. Ett kort svar är att matematik är det som matematiker sysslar med. Och vad som godtas som matematik avgörs verkligen i gruppen av verksamma matematiker. Men vad säger elever, lärare eller föräldrar? Svaren på frågan *Vad är matematik?* skiftar i hög grad beroende på vem du frågar. Elever svarar i regel att det är tal, att räkna, göra uträkningar, räkneregler, svara rätt, geometri eller liknande. Lärare svarar till exempel att det är mönster och strukturer, att kunna beskriva sin omvärld med hjälp av tal och former, att tänka logiskt, att kunna beräkna och uppskatta, att arbeta med storheter och så vidare. Hur elever uppfattar matematik beror naturligtvis på under vilka former de får möta den i och utanför skolan. Varför behöver då matematiken populariseras? Och vad innebär det? Betyder det att ämnet matematik ska göras mera populärt? Eller betyder det att matematikens resultat ska populariseras i meningen förklaras för att nå ut till fler människor? När vi diskuterar matematikens popularisering här avser vi troligen båda aspekterna. Och att visa fram matematikens frågor och resultat så att de framstår som spännande och intressanta kan vara ett sätt att göra ämnet mera populärt i vidare kretsar.

Vad gör en matematiker?

Förenklat kan man säga att en matematiker utvecklar intressanta forskningsproblem och frågeställningar och försöker lösa och utreda dem med hjälp av matematikens begrepp och metoder. Resultaten publiceras i regel i mycket putsad form i vetenskapliga tidskrifter. Sådana artiklar avslöjar i regel ingenting om hur resultaten verkligen växt fram i matematikerns arbete. Den så kallade forskningsfronten i matematik är långt borta från en välutbildad persons kunskaper brukar vi hävda. Har vi inte här något av matematikens dilemma? Att konstruera nya intressanta problem är minst lika viktigt som att sedan kunna lösa dem och reda ut hur det förhåller sig. Blivande forskare i matematik behöver alltså i sin utbildning få erfarenhet av hur goda problem formuleras och konstrueras. De behöver veta något om vilka frågor som kan ställas i matematik och om hur de kan besvaras. Traditionen har tidigare varit att doktorander får sitt forskningsproblem av handledaren och det medför ur detta perspektiv vissa nackdelar. Tyvärr finns samma tradition i skolan. Kärnan i matematisk forskning är att finna på nya intressanta frågor och problem, införa nya begrepp som blir livskraftiga och kunna lösa problemen, bevisa de hypoteser man ställer upp och övertyga omvärlden av betydelsen av det man gjort. Ändå verkar det förhålla sig så att i undervisning i och om matematik uppehåller vi oss på alla nivåer mest kring uppgiften att lösa redan givna problem eller bevisa redan kända satser.

Matematiken i skolan

Eleverna får sina matematikproblem av läraren. Läraren får i regel sina problem av läromedelsförfattare eller av provkonstruktörer. Alla vet att problemen redan är lösta. I skolan vet eleverna att problemen oftast har ett enda rätt svar. Klipska elever måste undra varför de ska lösa problem och genomföra resonemang som andra redan klarat av. Denna situation med givna på förhand lösta problem gäller även studenter på universitetens grundkurser i matematik. Det kan till och med vara så att studenterna vet vilken typ av uppgifter som ska ingå i en skriftlig tentamen genom att den alltid följer en viss mall. Traditionen bjuder också att elever löser just det givna problemet, kontrollerar sitt svar med facit och går vidare till nästa problem. Sällan stannar lärare och elev upp och frågar: ”Månne jag kunde gjort på något annat sätt, kanske bättre?” Kan jag lösa något liknande problem eller generalisera frågan? Har det här problemet någon anknytning till något jag tidigare arbetat med? Vilket var den viktigaste tanken i denna lösning? Kan jag lära mig något för kommande behov av lösningen?” Hur framstår då matematiken för eleverna i skolan? Det verkar som om elever finner matematik alltmer tråkigt ju äldre de blir. Nybörjarna är positiva men i sjunde eller åttonde klass är intresset för ämnet klart dalande.

För att matematiken ska framstå för elever på olika nivåer som det vackra, spännande och för tanken utmanade ämne det är måste hela förloppet i matematisk forskning bli synligt. Det betyder att vi även måste inkludera fasen att skapa problem och att arbeta med frågor där inte läraren eller boken redan vet lösningen och svaret. Och detta måste elever på alla nivåer få förmånen att möta. Den begränsade bild "vanliga människor" har av matematiken beror delvis på att de enbart fått se en del av matematisk verksamhet, den del där man härmar exempel som andra har visat.

Problemens roll i matematiken

"Men är det möjligt att problemlösning är så central för undervisningen i matematik att man kan beskriva den som matematikens kärna?" (Björkqvist, 2001)

Ja, problemlösningen är central. En viktig del i den måste även vara att formulera nya problem och utveckla nya områden. För att studerande på olika nivåer ska våga göra det måste de vara övertygade om att de kan tänka matematiskt (Mason et al, 1992). De måste våga lita på sin egen tankekraft och förstå att de kan resonera matematiskt, specialisera, generalisera, ställa upp hypoteser, pröva dem, resonera logiskt, kommunicera, beskriva, förklara och övertyga andra om att deras tankegångar är riktiga. För att våga använda sin kapacitet på detta område måste man ha fått tillfälle att pröva sin egen tankekraft och se att det bär. Undervisning i matematik genom hela utbildningssystemet måste innehålla många fler tillfällen att utveckla den studerandes förmåga att resonera och tänka matematiskt.

Varför ska alla lära sig matematik?

Önskan att popularisera matematiken är förknippad med en önskan att fler ska ta del av matematik. Det leder osökt in på frågan varför alla ska lära sig matematik. Det har givits många lärda förklaringar och motiv till det och frågan har varit föremål för en hel del forskning inom matematikens didaktik (Niss, 2001). Ett vägande skäl är säkert, att alla som prövat på kraften som ligger i att kunna tänka och resonera matematiskt, har upplevt att den är stark och mångsidigt användbar. Den som utvecklat denna förmåga kan ha glädje av den i många av livets skeden. Min hypotes är att en bidragande orsak till att vi behöver popularisera är att matematiken som ämne inte ges en rättvisande bild i skolämnet matematik eller ens i grundutbildningen för studenter. Forskningen om uppfattningar om matematik (beliefs) (Thompson, 1992) har belagt att både elever och lärare i skolan kan uppfatta matematiken i skolan som en samling regler man ska lära sig utantill och som ska följas mekaniskt i upprepningar av standardmetoder som förevisas. Den som enbart upplevt matematiken från denna aspekt har gått miste om de delar som är ämnets mest fascinerande. En sådan uppfattning får också konsekvenser för hur elever lär sig matematik.

Är det möjligt att förändra matematikundervisningen?

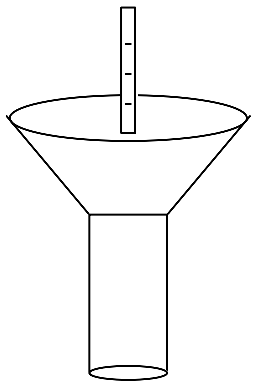
Med några konkreta exempel som bakgrund kan vi diskutera om en viss förändring vore möjlig. Det första hämtar jag från min egen undervisning med lärarstuderande för år 4-9. I en av de inledande matematikkurserna har studenterna ett inslag där de arbetar i projektform. Utgående från någon intressant situation eller fråga i media ska de undersöka vilken matematik som kan dölja sig inom området och vilka matematiska modeller som kan användas. Syftet med projektet är flerfaldigt. De studerande ska bland annat se om de kan använda sina matematikkunskaper från skolan i praktiken och se hur matematiken kan användas inom olika områden av vardagslivet. I kursplanen står det att studenten ska

- tillämpa sina matematiska kunskaper från skolan i självständiga projekt, som innebär problemlösning och kommunikation
- utveckla sin syn på matematikens relation till naturvetenskapliga arbetssätt och metoder samt se exempel på modellering.

Exemplet Regnmätaren

Exemplet handlar om arbete med en vanlig regnmätare i metall. Studenterna utgick från en annons om regnmätaren och valde att formulera sina problem så här:

- Hur ska man dimensionera regnmätaren?
- Hur ska man göra graderingen på mätstickan som sitter inuti regnmätaren?



Studenterna började med att besöka en järnaffär och mätte upp bland annat diametern uppe vid mynningen och nere i botten av regnmätaren samt mätstickan och dess gradering. Därefter ringde de upp företagets ägare och frågade hur graderingen på mätstickan var gjord. De fick svaret att man kört efter samma ritning sedan 1950 då den första regnmätaren tillverkades och att den ingenjör som gjort konstruktionen slutat för länge sedan. Själv visste ägaren inte hur man skulle gå tillväga för att gradera. I sin rapport skriver studenterna: ”Efter det var det bara att fatta pennan och börja räkna. Men vi måste erkänna att det tog lite tid innan vi visste hur man började räkna.”

När studenterna inte fick någon hjälp med beräkningen från företaget förstod de inte hur de skulle gripa sig an problemet. Slutligen tog mod till sig och medgav att de behövde hjälp. Först efter vårt samtal förstod de att den modell de skulle arbeta med var att se det uppsamlade regnet i den vidare ”cylindern” vid mynningen och beräkna hur högt det når i den cylindriska behållaren i regnmätarens nedre del. De utgick då från att 1 mm regn fallit och beräknade den uppsamlade volymen. Då kunde de räkna fram att i den nedre behållaren skulle det vattnet nå upp till nivån 5,1 mm. Det visade sig stämma väl med den på regnmätaren uppmätta graderingen. Därefter gjorde de en genomgång av tänkbara felkällor som påverkar noggrannheten i mätningen.

Den första uppgiften de gav åt sig själva redovisar de inte trots att det är intressant att fundera på hur mätaren ska dimensioneras. Modernare mätare i plast rymmer i regel en mindre totalvolym. De hinner ofta bli överfulla om man inte har tillfälle att läsa av mängden nederbörd varje dag. Här hade studenterna kunnat få anledning att fundera över hur mycket regn som faller normalt under en viss tidsperiod och hur ofta man kan tillåta sig att mätaren ska få svämma över.

Vad kan vi lära av detta exempel? De båda studenterna behärskade troligen redan sedan grundskolan den matematik som krävs för att lösa problemet. Men att kunna formeln för cylinderns volym är inte tillräckligt här. De behöver även förstå att den modell som ska användas är att vattnet samlas upp i en vidare cylinder (som inte syns) och hälls ner i en smalare cylinder. En avsikt med att göra så måste rimligen vara att utslaget för 1 mm regn ska bli större än om man samlar upp och förvarar i samma cylinder. Modelltänkandet är så pass ovant för dem att de inte klarar av det på egen hand. Det enkla knepet att fråga någon som arbetade med regnmätare hjälpte inte i detta fall.

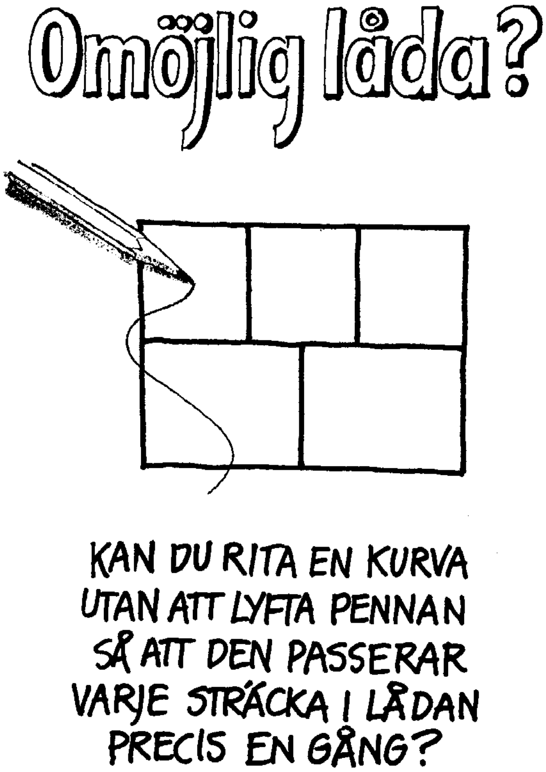
Den beskrivna situationen visar att studenterna kan formulera intressanta uppgifter för sig själva, uppgifter som är rimligt svåra att klara av med den matematiska kunskap de behärskar. Däremot är de så ovana att tillämpa sin matematik i nya situationer att de har svårt att se hur de ska gå tillväga. Det är också uppenbart att den patentlösning, som en del obetänksamma idag ger, nämligen att leta på den världsvida väven efter lämplig information, inte är till någon vidare hjälp när man inte vet vilken modell man ska använda. Studenterna har här konstruerat ett eget problem till sig själva och egen tankekraft är nödvändig för att reda ut situationen. När

de väl hade klarat ut uppgiften och lämnade in sin skriftliga redovisning var de ganska stolta över sin prestation.
I andra sammanhang har jag beskrivit fler problem av denna typ, som studenter själva formulerat och löst med utgångspunkt i en verklig situation (Grevholm, 1997).

Några andra exempel på intresseväckande problem
I vanliga tidskrifter eller böcker för tidsfördriv finner man ibland en problemhörna eller uppgifter där läsaren ska gissa och tänka. Sådana problem har ofta en intressant anknytning till mera avancerad matematik. Som lärare kan man använda problemen som en ingång till matematiska kunskaper på områden, som elever normalt inte stöter på. Jag ska ge några exempel som jag själv använt i undervisningen.

Problemen *Brev* och *Omöjlig låda* berör samma tema. Det gäller att rita en given figur utan att lyfta på pennan respektive att passera ett antal förbindelselinjer i en figur precis en gång utan att lyfta pennan. Båda visar exempel på uppgifter som saknar lösning, vilket är ovanligt i skolmatematiken. Den erfarne matematikläraren kopplar de här problemen till det klassiska problemet om Königsbergs sju broar. Genom att introducera eleverna till samma problem som Leonard Euler mötte 1735 vid sitt besök i Königsberg, kan läraren få anledning att göra eleverna bekanta med Eulers bevis för att promenaden i Königsberg inte går att genomföra. Euler reducerade som bekant landområdena till punkter som han kallade vertex och broarna till grafer (linjer) som förband de olika vertex med varandra så som broarna låg. Så införde han beteckningen udda eller jämnt vertex beroende på om antalet linjer som utgår från vertex är udda eller jämnt. I Könisberg var antalet broar som utgick från de olika landområdena 3, 3, 3 och 5, dvs alla udda. För att det ska vara möjligt att göra en önskad promenad över alla broarna får högst två vertex vara udda, de som representerar startpunkten och slutpunkten. Rita själv en bild med Königsberg och broarna överförda till punkter och grafer och rita med pennan i den bilden så ser du hur det fungerar. De begrepp Euler införde i sitt resonemang här blev grunden för de ämnesområden som senare kom att kallas grafteori och topologi. Samma typ av matematiskt resonemang kan tillämpas på problemen *Brev* och *Omöjlig låda.* När eleverna väl har mött den här tankegången kan de själva konstruera liknande frågor och problem till sina kamrater.

Bild Brev (Källa: Lilla utmaningen (1989), s 5:1)



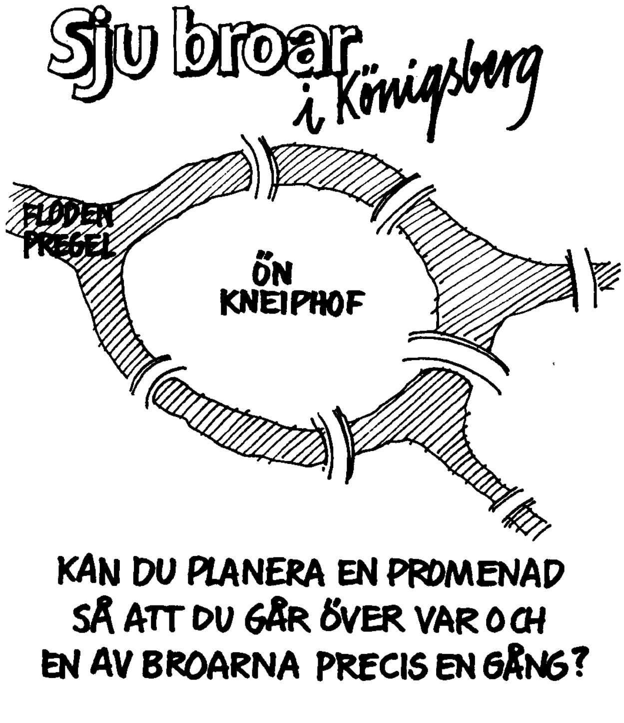


Bild Omöjlig låda. (Källa: Lilla utmaningen (1989), s 5:9) Sju broar i Königsberg (Källa: Utmaningen, s 14:2)

Bild Space filling curves (Källa: Utmaningen (1988), s 13:1)

Att matematiker ibland ställer märkliga frågor och kan besvara dem kan eleverna få uppleva genom att möta några spännande uppgifter. Att svaret på frågan i problemet *Space filling curves* är ja förvånar många elever. Redan 1890 gav G. Peano ett förslag till hur en sådan kurva kan skapas. Efter Peano har flera andra matematiker givit förslag på andra lösningar. Idén är att skapa en följd av kurvor som förfinas i varje steg i en självliknande process. Gränskurvan ger så lösningen. Det finns en intressant film med namnet Space filling curves, som är producerad av International Film Bureau Inc., som i ett dynamiskt förlopp visar hur kurvföljden växer fram steg för steg.

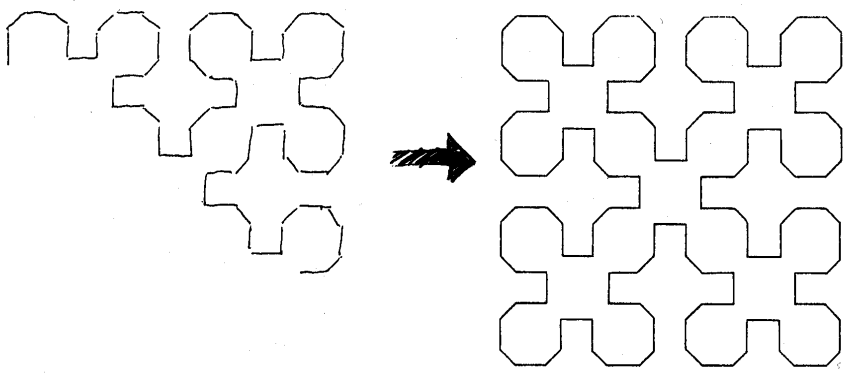
De problem jag använder som exempel här finns utgivna i *Utmaningen – problem och tankenötter i matematik* (Grevholm, 1988) och där finns även kommentarer, ibland lösningar och förslag till läraren om hur problemen kan användas i undervisningen, så som visas i exemplet nedan.

SPACE FILLING CURVES

LÖSNING: Ja, det går.

G. Peano gav ett förslag 1890. Efter honom har flera andra matematiker givit andra lösningar.

Idén är att skapa en följd av kurvor som förfinas i varje steg efter en regelbunden beskrivning. Gränskurvan ger lösningen.



TIPS: Filmen Space filling curves, 25,5 min, kan erhållas från International Film Bureau Inc (Adress se Sju broar).

Problemet *Kurvan*, som visas nedan, kan fascinera även små barn. Flugan sitter faktiskt innanför kurvan. Problemet anspelar på Jordans kurvsats, som formulerades och bevisades av matematikern Camille Jordan, som levde 1838-1922. Satsen säger att en enkel, sluten kurva delar ett plan i två områden, det ena innanför och det andra utanför kurvan. Det är ett exempel på ett matematiskt resultat som ”vanliga människor” inte tycker behöver bevisas. Det kan då vara intressant att veta att beviset är komplicerat och det som Jordan först presenterade hade luckor i tankegången, som senare andra matematiker kunde klara av och täppa igen. Satsen innehåller några matematiska begrepp som elever bör känna till. En enkel sluten kurva betyder en kurva som inte skär sig själv och som inte har en början och ett slut. Problemet kan inspirera till lite om matematikens historia och om vad matematiker har behov av att verkligen bevisa. Även unga elever kan göra egna problem på det här temat.

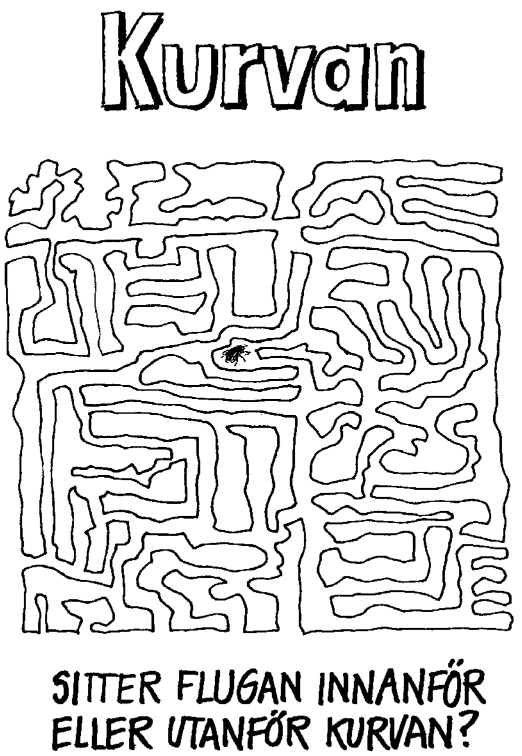


Bild Kurvan (Källa: Lilla utmaningen (1989), s 5:11)

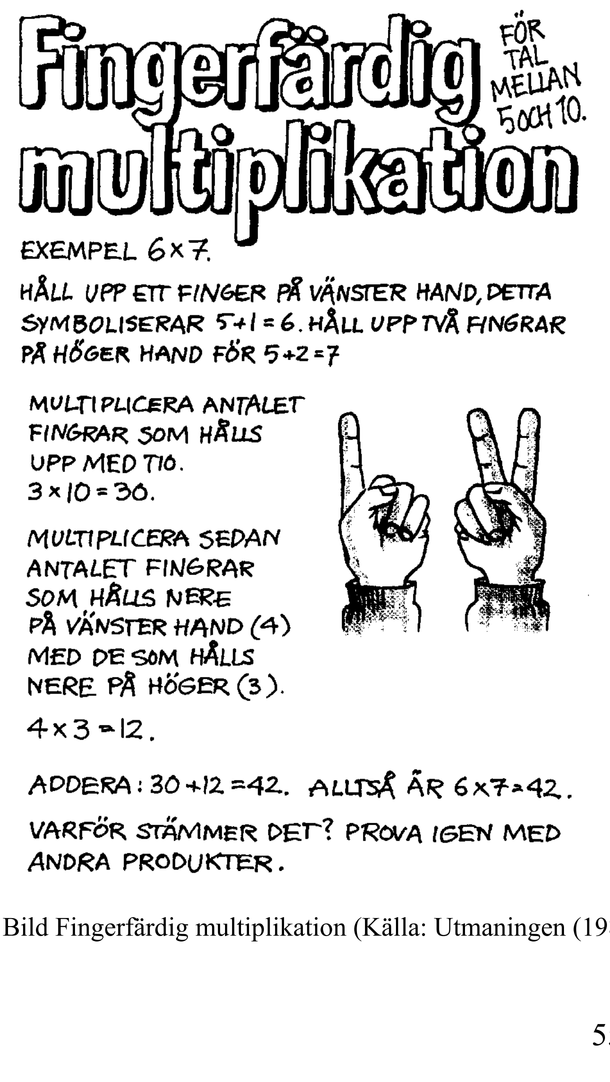


Bild Fingerfärdig multiplikation (Källa: Utmaningen (1988), s 19:2)

Idén till problemet *Fingerfärdig multiplikation* har jag fått av en ung lärare i Malmö, som undervisade zigenare. Hans elever visade honom denna metod för att multiplicera två tal mellan 5 och 9. Han var mycket imponerad över dess effektivitet. Han kunde inte fundera ut varför metoden fungerade. Mina elever i gymnasieskolan kunde med hjälp av algebra visa varför metoden alltid stämmer. Pröva själv får du se hur det fungerar. Kalla talen som visas med fingrarna a och b och gör så beräkningen steg för steg enligt instruktionen. Resultatet du får är produkten av a och b. Problemet illustrerar att det finns praktisk, matematisk kunskap i olika folkgrupper, som inte är känd i andra grupper. Vissa elever i grundskolan som har svårt att minnas multiplikationstabellen kan faktiskt ha glädje av metoden som ofta är snabbare än att använda räknare.

Fyrfärgsproblemet är också ett exempel som unga elever kan pröva på. Rita kartor och färglägg och pröva om det räcker med fyra färger. Efter att ha gjort det finns det ett intresse för att höra om problemet. Att problemet först löstes 1976 av två matematiker vid universitetet i Illinois kan vara spännande att veta. Elever tror i regel att om ett problem inte är löst efter fem minuter går det inte att lösa. Att matematiker försöker lösa problem i många år utan framgång och så plötsligt någon lyckas ger en annan bild av matematiken. En annan intressant aspekt är att lösningen krävde datorkraft och att matematikerna då började diskutera om lösningar, som ingen människa skulle kunna hinna göra under en livstid ska få betraktas som bevis. Elever kan få en inblick i att vad som godtas som bevis är det som kåren av matematiker bestämmer sig för att acceptera. Matematiken framstår då inte som så absolut, opersonlig och evigt orubblig.

Bild Fyrfärgsproblemet (Källa: Utmaningen (1988), s 7:3)

I problemet *Kochkurvan,* som är nr 5:12 i Lilla Utmaningen (Grevholm, 1989), anspelar historien på den svenske matematikern Helge von Koch, som ungefär 1904 utgick från en liksidig triangel i en upprepande konstruktion. Han delade in varje sida i tre lika delar och ersatte den mittersta delen med två lika delar, som bildade 60 grader med triangelns sida, så att det blev en sexuddig stjärna. Så upprepades proceduren genom att varje linjestycke i stjärnan utsattes för motsvarande behandling. Kurvan kommer att allt mer likna en snöflinga och får en fraktal struktur. För varje steg i processen blir kurvan allt längre. Trots att kurvan hela tiden ligger inom en begränsad area, kommer dess längd att gå mot oändligheten. Tankegångar som denna ledde till att matematiker funderade på begreppet dimension. Den räta linjen har dimensionen 1 och planet har dimensionen två. Men vilken dimension har Kochkurvan? Som vi vet dröjde det några årtionden innan andra matematiker på allvar började arbeta med fraktaler och kaosteori. Men Koch var alltså tidigt inne på liknande frågor.

Avslutning

Med de här exemplen har jag visat hur man kan arbeta med problem som inte är av den standardkaraktär som de flesta av läroböckernas uppgifter. Läroböcker är givetvis bra och användbara för det mesta av arbetet i skolans matematik. Men det finns plats för andra aktiviteter ibland och det är förslag till sådana jag velat visa på. Elever på alla nivåer kan själva konstruera problem utgående från verkliga frågor eller situationer. Problem ur historien kan inbjuda till aktiviteter som väcker intresse och skapar grund för att berätta och visa mer om matematiken från gångna tider och nutid. Allt bidrar till att visa att matematiken är skapad av människor från skilda tider och miljöer och att ny matematik hela tiden skapas genom att människor ställer frågor och försöker svara på dem med matematikens redskap. Att försöka ge en mera nyanserad bild av matematik är och vad den handlar om kan bidra till att popularisera matematiken.

Referenser

Björkqvist, Ole (2001). Matematisk problemlösning. I Barbro Grevholm (red), *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.

Grevholm, Barbro (1988). *Utmaningen - problem och tankenötter i matematik*. Malmö: Liber.

Grevholm, Barbro (1989). *Lilla utmaningen - problem och tankenötter i matematik*. Malmö: Liber.

Grevholm, Barbro (1997). Matematik och media. *Nämnaren nr 4, 24,* 44-48.

Mason, John; Burton, Leone & Stacey, Kaye (1992) *Thinking mathematically*. Wokingham: Addison-Wesley Publishers.

Niss, Mogens (2001). Mål för matematikundervisningen. I Barbro Grevholm (red) *Matematikdidaktik - ett nordiskt perspektiv*. Lund: Studentlitteratur.

Singh, Simon (1998). *Fermats gåta*. Stockholm: Norstedts Förlag.

Thompson, Alba (1992). Teachers' beliefs and conceptions: A synthesis of research. I D. Grouws (red), *Handbook of research on mathematics teaching and learning*. New York: Macmillan.

Sant eller sannolikt

Av Allan Gut

Uppsala Universitet

Allan Gut, Matematiska institutionen, Uppsala Universitet, Box 480, SE-751 06 Uppsala, Sverige
Email: allan.gut@math.uu.se URL: http://www.math.uu.se/~allan

"*Fy, det låter intelligent !",*

"Matematik var mitt sämsta ämne i skolan !"

"är inte alla tal uträknade än ?"

"Det är förstås sån't som ingen vanlig människa begriper."

Detta är några av standardreaktionerna som möter mig om jag berättar för någon att jag är matematiker. Om jag i stället presenterar mig som statistiker, möts jag normalt av något av följande alternativ:

"Med statistik kan man ju bevisa vad som helst !",

"Statistik, men det är väl bara tjocka böcker med tabeller över hur många katter som avlidit eller hur många cyklar som stulits genom åren i olika kommuner."

"Har du hört den där om hur man komparerar lögn?"

(som har Benjamin Disraeli som upphovsman) följt av ett glatt "lögn, förb-ad lögn, statistik".

Jodå, det är ingenting nytt, och dessvärre är det sant. Nämligen på så vis att med felaktigt använd statistik kan man bevisa nästan vad man vill, vilket är ett av statistikens stora problem.

1. Inledning

Jag har länge varit störd av och bekymrad över omvärldens attityd gentemot matematiker och statistiker - och tvärtom. Dessa attityder är både sorgliga och onödiga, eftersom det å ena sidan finns så mycket matematik och statistik som så många kan förstå och ha glädje av, och samtidigt, å den andra, finns så mycket mer än man tror som går att förklara.

Problemet är att om man som expert vill förklara något så måste man tänka efter extra noga på vad man säger, på hur man säger det, och acceptera att man måste hoppa över vissa spetsfundigheter om man vill nå ut. På motsvarande vis måste man som icke-expert göra sig av med fördomen att man inte kan begripa - tror man nämligen att man inte kan begripa så gör man det inte heller.

Med tanke på i vilken oerhört hög grad matematik och statistik genomsyrar vår vardag och med tanke på hur fundamentala dessa vetenskaper är för de flesta andra vetenskapsområden och företeelser är dessa missförhållanden både märkliga och allvarliga.

Man kan därför fråga sig varför det är så, och varför ingenting händer, varför myterna om matematik och matematiker är så livskraftiga. I viss mån tror jag dessvärre att matematikerna själva är skyldiga.

I två intressanta artiklar i Dagens Nyheter, 28 december 1996 respektive 18 oktober 1998, diskuterar Hans Magnus Enzensberger dessa problem, bland annat frågan varför matematiker har så svårt att nå ut med sin verksamhet - problemet med att anpassa språket från fackspråk till vanligt språk är ju något som gäller alla specialister. Ett problem, konstaterar han, är att man för att förklara måste "fuska", man måste "ljuga lite".Men samtidigt tycks ljugandet vara speciellt motbjudande för en person som sysslar med absoluta sanningar. Därför kan det ligga nära till hands för en matematiker att avstå från att förklara med motiveringen att "det där är så speciellt och komplicerat, så det kan jag inte förklara" (underförstått: för dig som är så dum och obegåvad). Och genom att på så vis bejaka, eller ge sken av, att det man gör är obegripligt förstärker man bara alla eventuella fördomar.

Ett annat problem är formlerna, som för många kan te sig avskräckande på ett helt annat sätt än "svåra ord" inom medicin eller humaniora, som ju bara är (o)vanliga svenska ord. Men, ... förklara för någon vad "dekonstruktivism" eller "semiotik" är för något, är det lättare än att berätta om $x2 + y2 = z2$? Som ju "bara" är Pythagoras sats!

Så har vi, icke att förglömma, arrogansen i det matematiska språket. Man använder gärna ord eller uttryck såsom "trivialt" och "inses lätt", vilket naturligtvis är avskräckande, speciellt om man inte inser lätt. Då blir e_ekten bara att man känner sig nertryckt, självförtroendet minskar "eftersom det är trivialt och jag inte ser det beror det naturligtvis på att jag är korkad". Det finns till och med en skämthistoria om matematikern som sade att han visste att ett visst påstående var trivialt, men att han hade glömt bort varför.

Var är kvinnorna?

På grundutbildningsnivå vid universiteten är balansen mellan könen god nästan överallt, men ju högre upp man kommer inom de matematiska vetenskaperna, desto färre kvinnor ser man. Varför?

Något vetenskapligt svar kan jag inte prestera, bara vad jag tror. Och det är att kvinnor inte har samma instinkt som män att rusa framåt. Det har inte med genetik eller biologi att göra,åtminstone inte i någon väsentlig utsträckning, utan med sociologi och samhälle. Män har på ett helt annat sätt än kvinnor traditionellt uppfostrats till att bli stora och starka. Det tycks mig som om kvinnor i avsevärt högre grad än män gör en livskalkyl. Deras slutsats blir då att de tackar nej till den arroganta matematikervärlden och hellre gör något annat. En förhoppning är dock att de jämställdhetssträvanden som finns i samhället, snarare än att de gör kvinnor mer karriärinriktade, gör män mindre benägna att tänka på att bli stora och starka utan i stället lär dem att tänka och värdera i bredare termer.

Efter dessa konstateranden vill jag med exempel illustrera hur mycket, både viktigt och roligt, i vår vardag som har med sannolikheter och statistik att göra, icke minst sådant som man kan ta upp i skolan. För det är där förändringen måste börja. När man är vuxen är det för sent, då fortplantar man bara sina egna fördomar och missförstånd. Det mesta bygger på, eller ingår i, boken Sant eller sannolikt, som utkom på Norstedts förlag 2002. Ett par inslag kom till under skrivandet av denna artikel, vilket dessutom illustrerar ämnets ständiga aktualitet.

2. Två vackra exempel

Låt oss se på två problem som båda kan förstås av människor i alla åldrar, och som på grund av sin elegans är god reklam för matematikens skönhet.

Vad är ett bevis?

Ett bevis är en logisk tankekedja som utan luckor leder fram till en viss slutsats. Det innebär att den som läser och förstår varje steg i beviset vet att det uppställda påståendet är sant. Ett vackert exempel är Euklides cirka 2300år gamla bevis för att det finns oändligt många primtal — mitt första egna telefonnummer 102547 var för övrigt ett primtal.

Euklides bevis var ett så kallat motsägelsebevis, vilket betyder att han antog motsatsen, alltså att det bara finns ändligt många primtal. Dessa multiplicerade han samman, varefter han adderade 1. Det visar sig då att vad man än delar det nya talet med får man alltid en rest, vilket leder till två möjligheter: Antingen kan det nya talet delas med ett primtal som är större än de ursprungliga. Men det är omöjligt, sådana finns inte enligt vårt antagande. I så fall måste det nya talet självt vara ett primtal. Men det är också omöjligt. Därmed har vi uppnått en orimlighet. Enda möjligheten är därför att det ursprungliga antagandet var felaktigt, och att vi i själva verket har hittat ett primtal som är större än de vi hade. Vad vi än antar om antalet primtal så leder samma resonemang till att det finns ytterligare ett. Eftersom vi kan fylla på med nya hur länge som helst måste det finnas oändligt många primtal.

Gauss och den aritmetiska serien

Under en matematiklektion bad läraren sina elever att lägga ihop alla tal från 1 till 100. Pojkarna, som var i 10-årsåldern, hade naturligtvis inte hört talas om aritmetiska serier och visste därför inte att det finns en formel som ger svaret, så läraren kände sig rimligt säker på att han skulle bli lämnad i fred ett bra tag — sådana var lärarna på den tiden. Men efter endast något ögonblick hade Gauss löst uppgiften! Han hade nämligen skrivit upp alla tal i en lång rad och därunder samma tal, fast baklänges:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \ldots + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$$
$$100 + 99 + 98 + 97 + 96 + \ldots + 5 + 4 + 3 + 2 + 1.$$

Sedan adderade sedan uppifrån och ner i varje spalt, och insåg att han därmed hade fått summan $100 \cdot 101 = 10100$, och att detta måste vara dubbla summan. Kan inte två sådana exempel i en matematikklass leda till att alla vill vara en liten Euklides eller Gauss? Vill man inte omedelbart börja leta primtal? Kan man inte utgående från exemplet med Gauss diskutera en stund och inse att denna princip gäller alla aritmetiska serier och sedan härleda den allmänna formeln? Och är inte det spännande?

3. Vad är matematisk statistik?

Matematisk statistik används i Sverige som beteckning på ett universitetsämne med ingredienserna sannolikhetsteori och statistik, och med sikte på tillämpningar främst inom naturvetenskap, teknik och medicin.

Sannolikhetsteori, i sin tur, är studiet av matematiska modeller för slumpförsök, och uppfattas som en tvillingvetenskap till statistiken, inom vilken man ägnar sigåt att skapa metoder, principer och kriterier för att behandla data från experiment och andra observationer av verkligheten. I vissa länder uppfattas dock sannolikhetsteorin som en rent matematisk disciplin, alltså utan koppling till statistik och tillämpningar.

4. Några sannolikhetsteoretiska problem

Vi börjar med det så kallade

Födelsedagsproblemet

Hur många personer behöver vi vara för att vi skall vara säkra på att det finns två personer som fyller år samma dag?

Om vi vill vara 100% säkra krävs 367 personer ... eller hur? Jo, därför att i en grupp om 366 personer skulle det kunna vara så att alla fyller år var sin dag. Vid 367 måste det dock ovillkorligen finnas en dubblett.

Det riktiga födelsedagsproblemet lyder:

Hur många personer behöver vi vara för att sannolikheten för att två personer fyllerår samma dag är minst 50%?

För att lösa detta problem antar vi att alla födelsedagar är lika vanliga, att de är oberoende och att alla år har 365 dagar. Vi inför sedan personerna A,B,C,D, ...
Sannolikheten att B inte fyller år samma dag som A är $\frac{364}{365}$, sannolikheten för att C inte fyller år samma dag som varken A eller B är. $\frac{363}{365}$ Sannolikheten för att A,B och C har olika födelsedagar blir då $\frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365}$.
Upprepar vi detta resonemang, person för person, innebär det att vi successivt multiplicerar med talen $\frac{362}{365}, \frac{361}{365}, \frac{360}{365}$, ... De resulterande produkterna minskar vartefter, för att så småningom nå nivån 1/2. När vi nått dit är det bara att avläsa hur många personer som varit inblandade. Eftersom vi har beräknat sannolikheten att alla fyllerår olika dagar, blir den sannolikhet vi är intresserade av 1 minus den erhållna.
Med det receptet visar det sig att rätt svar är: 23 personer.
Med samma procedur kan man räkna fram att med 40 personer så är man ungefär 90% säker, och att man med 50 personer är cirka 97% säker. Så otroligt mycket "tjänar man på" att byta visshet mot lite osäkerhet, att byta sant mot sannolikt!

Vi vet emellertid inte vilka personer som fyller år samma dag, eller vilken dag det handlar om; bara att. Som en extra bonus kan exemplet därmed leda till en diskussion om vad ett existensbevis är för något.
Kommer inte barnen i en skolklass omedelbart att kräva att man undersöker hur det är i deras klass? (När jag gick i småskolan var vi tre som fyllde år samma dag som jag.)

Samlarbilder

Ett problem som på ett mycket påtagligt sätt illustrerar fenomenet att det är de sista procenten som kostar är *Kupongsamlarens problem*:

När man köper en viss vara, såsom en tvål eller ett Corn Flakes paket (på 1950- talet var det alfagubbar) får man på köpet en eller flera så kallade samlarbilder, såsom fotbollsspelare, filmstjärnor eller matematiker. Poängen är att man skall lockas köpa varan ända tills man har en komplett samling bilder.

> *Hur många tvålar, tablettaskar, Corn Flakes paket ... kan vi förvänta oss att behöva köpa tills samlingen är komplett?*

Antag att det finns 100 olika bilder. Det är inte särskilt svårt att inse att det, på grund av dubbletterna, måste bli fler än 100. Men att svaret blir drygt 500 är kanske mer än man i förstone tror. Som en antydan till att det kan bli mycket antar vi att vi har lyckats få ihop 99 av de 100 bilderna så att bara den sista saknas. Eftersom sannolikheten är 1/100 att få den sista vid nästa köp får man räkna med ungefär 100 inköp för att lyckas. Har man 98 av de hundra krävs i medeltal 50 inköp innan man får någon av de två som fattas, och sedan 100 för den sista, och så vidare. Detta resonemang leder till att förväntat antal
inköp blir $100(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{99} + \frac{1}{100}) \approx 518.74$

Detta är ett utmärkt exempel på hur vi utsätts för yttre påfrestningar, av ren businesskarakt är. Och när barnen efter mycket tjat saknar bara någon enstaka bild är det svårt att avbryta samlandet. Vet man däremot vad sådana spektakel innebär redan från början är man bättre rustad, även om man förstås blir en tråkigare förälder, i synnerhet som "alla andra" får köpa för sina föräldrar.

5. Stora talens lag. Några tillämpningar

Gör vi många slantsinglingar får vi i det långa loppet ungefär lika många krona som klave.
Stora talens lag är en generalisering som säger att

> *Medelvärdet av resultatet av oberoende upprepningar av ett slumpexperiment stabiliserar sig i det långa loppet.*

Mera matematiskt: Det observerade aritmetiska medelvärdet konvergerar mot det förväntade värdet som är den matematiska "tyngdpunkten" hos sannolikhetsfördelningen. Detta enkla resultat har oanade följder för det vi ser runtomkring oss.

Apan och skrivmaskinen

En gammal anekdot säger att om man sätter en apa vid en skrivmaskin så skriver den förr eller senare ner Shakespeares samlade verk, inklusive alla tryckfel.Låt oss för ett ögonblick ta anekdoten på allvar. Vi antar att apan trycker ner alla tangenter med samma sannolikhet och att olika tangenttryckningar är oberoende av varandra. Det är förmodligen inte helt realistiskt, eftersom apan antagligen slår ner samma tangent flera gånger i rad och besöker centralt placerade tangenter oftare än de perifera, men vi bortser från det just nu.

Med 50 tangenter på tangentbordet blir apans skrivande ekvivalent med att den kastar en 50-sidig tärning om och om igen. Sannolikheten för att apan på fyra nedslag skriver ordet puss blir därför $(\frac{1}{50})^4$ $= \frac{1}{6250000}$. Det är förvisso en liten sannolikhet, men den är positiv.

För en given text handlar det om att "kasta tärningen" så många gånger som svarar mot den sökta textens längd. Varje text, oavsett längd, kan sålunda bli till med positiv sannolikhet. Ingen text är omöjlig.
Men inte nog med detta. Om apan sitter i evighet eller avlöses av andra apor kommer alla texter att produceras förr eller senare. Inte bara Shakespeares samlade verk, utan även Trondheims telefonkatalog för år 1984.
En allvarligare variant av detta problem är

Bibelkoden

För någraår sedan publicerades en bok i vilken det hävdas att om man skriver ut hela den hebreiska bibeltexten i en enda lång rad, och sedan tar sig genom hela textremsan, därefter en gång till men då bara läser varannan bokstav, sedan var tredje, och så vidare, men även om man läser baklänges enligt samma metod, så kan man på så vis finna förutsägelser om framtida händelser. Dessutom, hävdas det, fungerar koden bara i den hebreiska texten —inte i någon översättning.

Kan det verkligen vara sant, eller är det bara en modern form av hokus pokus? Och om det inte är hokus pokus kan man undra varför ingen upptäckte och förvarnade om terrorattacken mot World Trade Center den 11 september 2001 ...

Med stora talens lag och apan och skrivmaskinen i färskt minne torde saken vara ganska klar. Man undrar: Hur kan det komma sig att den typen av böcker säljs i sådana massupplagor? Kan inte apan och skrivmaskinen rädda kommande generationer?

Lotto

Spel och hazard har (för)följt människan alltsedan tidernas begynnelse. Ett tidigt exempel på slantsingling finns redan i 3 Mos. 16. Olyckligtvis finns det många vanföreställnigar och missuppfattningar om lotterier. Ibland kan man dock misstänka att det för många är viktigt att behålla dem för att kunna fortsätta att tro att man skall kunna "spränga banken".

I början av 1990-talet talade jag med en granne på landet om Lotto, varvid det framkom att han spelat lite då och då under 6 år. En närmare utfrågning visade att det rörde sig om totalt ungefär 1500 rader.

Jaha, sa jag, då har du vunnit ungefär 12 gånger, och 10 av var dessa den sämsta vinsten. Han nickade jakande med gapande mun och var mäkta imponerad.

Hur kunde jag veta allt detta?

Lotto är en form av lotteri där man skall välja 7 tal bland talen 1, 2, 3, . . . , 34, 35. Högsta vinsten är, förstås, 7 rätt. Dessutom finns det lägre vinster.[1]
Vilken rad ska man tippa? Finns det någon speciellt lämplig rad? Vad sägs om raden 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7? Den ser väldigt osannolik ut, det verkar mycket osannolikt att just de sju första talen skulle lottas fram. Raderna 2, 5, 13, 14, 19, 25, 31 eller 11, 14, 17, 23, 25, 29, 34 verkar mycket sannolikare, eller hur? Men ... tänker vi efter en smula inser vi att *alla rader är lika sannolika*.

Slutsatsen blir att om det är vansinne att tippa 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, så är det samma vansinne att tippa vilken annan rad som helst!

Hur var det nu med grannen? Jo, om man vet att sannolikheten för någon form av vinst är ungefär 1 på 130, så säger stora talens lag att man bör vinna ungefär 12 gånger på 1500 rader, och vet man att 5 av 6 vinster är sämsta vinsten så vet man även att det på 12 vinster blir ungefär 10 skräpvinster. Man är alltså absolut ingen magiker.

Risker och risker

Apropos små sannolikheter ... antag att du erbjuds att delta i ett lotteri med 1 miljon lotter. På en av lotterna står det att du skall skjutas, på alla andra står det att du vunnit en miljon kronor. Skulle du delta? Skulle du delta om det funnes 1 miljard lotter i stället?
Eller om vinsten vore 1 miljard i stället?

Hur stor är sannolikheten att du omkommer i bilen på väg till jobbet?

De flesta människor dör sovandes i sin säng. Törs du gå och lägga dig i kväll?

---

[1] 1Med en vanlig så kallad urnmodell finner man att sannolikheten att få alla rätt blir 1 på $\frac{35}{7}$, vilketär ungefär 0.0000001487.

6. Statistik. Hypotesprövning

Den stora frågan som läkemedelsfirman ställer sig är följande:

Är vår nya medicin B bättre än den gamla beprövade A?

Den stora frågan som läkarna ställer sig är följande:

Är vår nya behandling B bättre än den gamla beprövade A?

Mammografi är ett exempel som diskuteras livligt i pressen. Här är ett annat: För några år sedan publicerades en undersökning enligt vilken flickor som fötts för tidigt löper större risk att drabbas av bröstcancer än de som föds fullgånget. Idag när jag skiver detta (den 15 december 2003) läser jag i tidningen att "Misstankar om att flickor som fötts mycket för tidigt löper kraftigt ökad risk att långt senare i livet utveckla bröstcancer kan förmodligen avskrivas." Det visar sig att den första undersökningen baserade sig på ett ganska litet antal kvinnor, varför man fortsatte och gjorde en större undersökning med många kvinnor.
Det finns mycket att diskutera här: Det finns etiska problem; (när) ska man gå ut offentligt med resultat som bygger på små undersökningar? Hur många kvinnor (och män) har skrämts upp i onödan? Hur är det med statistikkunskaperna i läkarkåren? I journalistkåren?

Hur som helst, för att besvara de inledande frågorna inför man två hypoteser:

H_0: Nollhypotesen: De är lika bra;
H_1: Alternativhypotesen: De är inte lika bra.

Beroende på vad man vill undersöka kan man i stället införa alternativet att den nya medicinen eller behandlingen är bättre. Får man ett tillräckligt extremt utfall förkastas nollhypotesen, man har då fått en statistiskt signifikant avvikelse. Oavsett alternativ har man två felmöjligheter:

- *H_0 klassificeras som falsk när den är sann (fel av första slaget);*
- *H_0 klassificeras som sann när den är falsk (fel av andra slaget).*

Hur symmetriska mynt blir falska

Singla ett symmetriskt mynt 100 gånger. Då är

$$P(\text{Antalet klave mellan 40 och 60}) \approx 0.96.$$

Vid 1000 upprepningar av detta försök kan vi, enligt stora talens lag, förvänta oss att det ungefär 20 gånger blir klave fler än 60 gånger och ungefär 20 gånger färre än 40 gånger. Men det betyder också att om vi upprepar försöket 25 gånger kan förvänta oss att vi en gång av dessa 25 får klave antingen fler än 60 eller färre än 40 gånger. Om vi alltså i en klass med 25 elever låter alla göra detta experiment var sin gång med ett symmetriskt mynt, så kan vi förvänta oss att en elev kommer att klassificera myntet som falskt fastän det inte är det. Vilket enligt stora talens lag är helt i sin ordning.

Detta illustrerar också det faktum att
Det är normalt att det av och till inträffar extrema händelser, men det är sensationellt att det inträ_ar en extrem händelse just nu.
Det är alltså normalt att en elev tror sig ha ett falskt mynt, men en sensation för just den som tror det.

En allvarligare variant av detta problem är ...

Galna kor

“En svensk galen ko upptäckt i Halland. Jordbrukssveriges mardröm blev verklighet på fredagskvällen. Nu ställs förtroendefrågan för jordbruksministern, hennes tjänstemän, det svenska övervakningssystemet.”

Så inleds en artikel om det första svenska misstänkta BSE-fallet i Dagens Nyheter den 24 februari 2001. Galna kor är naturligtvis inte roligt, men det är ändå viktigt att inte göra varken mer eller mindre av det som har hänt eller möjligen inte har hänt. Några dagar senare visade det sig att det var falskt alarm. Samma sak inträffar i augusti och senare I september 2001, men blåses inte upp på samma sätt.

Varför blir det så? Måste man döda kor och spärra av gårdar?
Finns det inga tillförlitliga test?

Längre ner på tidningssidan redogörs för ett samtal med en chef på Jordbruksverket, av vilket det framgår att kraven från EU är att man skall göra 20000 slumpvisa tester per år och att man förväntar sig mellan 10 och 20 falskt positiva prov per år.

Med vår terminologi betyder det att vår nollhypotes är att kon är frisk och att den alternativa är att hon är BSE-smittad, samt att vi kan tolerera en felrisk på, låt oss säga, 1 promille för fel av första slaget. Det innebär att sannolikheten att en frisk ko klassas som smittad är 1 promille, och därmed, enligt stora talens lag, att relativa andelen felklassificerade friska kor i det långa loppet, med mycket stor sannolikhet, kommer att vara ungefär 1 promille. Annorlunda uttryckt, även om alla kor är friska kommer man att “upptäcka” att ungefär en på tusen av dem är sjuka. (Motsvarande risk för felslutåt andra hållet finns naturligtvis också; det finns alltid en viss risk att en smittad ko klassificeras som frisk.)

Om man testar 20000 friska kor per år kan man alltså förvänta sig ungefär 20 falskt positiva, det vill säga att ungefär 20 friska kor klassificeras som sjuka. Sammanfattningsvis: Vad som “upptäcktes” den gången var alltså ett positivt prov, varken mer eller mindre. Genom att man utför många test är det en självklarhet att vissa test ger positivt utslag vare sig korna är smittade eller ej.
En variant är dopingtest för idrottare (för att avgöra om de är galna eller ej...).

7. Vad säger data (inte)?

Vi matas dagligen med data och statistik i tidningar och andra media. Regelbundet återkommande är partisympatiundersökningar. Om x-partiet ökat med 2 procent, vad betyder det? Vad betyder det inte?

Har det hänt något eller ej?

Inför EMU-omröstningen i september 2003, redovisades den 24 maj 2003 i Dagens Nyheter följande resultat av en SIFO-undersökning:

	Ja	**Nej**	**Vet ej**
maj 2003	37	48	13
april 2003	34	50	15

I maj intervjuades 1213 personer. För april angavs inget antal. Om vi, för enkelhets skull, antar att man i april intervjuade (cirka) 1200 personer, och med dessa siffror gör ett statistiskt (χ^2-) test med 5 procents felrisk, finner man att bilden inte har förändrats signifikant, det finns ingen statistiskt säkerställd förändring. Man kan inte hävda att någonting har hänt.

Om man därför läser i tidningen (vilket man kunde) att “Ja till EMU ökar med 3 procent” så är det nonsens. På samma sätt var det strunt en annan månad då man kunde läsa att nejsidan leder knappt: 40 mot 38, medan det förra månaden vägde jämnt, 39 – 39.

En förändring är bara en förändring om den är statistiskt säkerställd!

En förändring som ligger inom felmarginalen är ingen förändring oavsett vad tidningarna skriver!

Men inte nog med det: Om en sida en månad redovisar 32 procentenheter och nästa månad 37 så betyder det inte att man ökat från 32 till 37, utan bara att en förändring ägt rum. Varje siffra är ju omgiven av sitt felmarginalsintervall, vilket innebär att 32 egentligen betyder någonting mellan (ungefär) 30 och 34 och 37 betyder någonting mellan (ungefär) 35 och 39. Den “verkliga” förändringen är någonting mellan 1 och 9 procentenheter.

Kan inte sådan kunskap leda till att man tar till sig sifferuppgifter från media lite mer försiktigt? Att elever börjar läsa tidningar med en mer kritisk blick? Att de gärna berättar om dumheter de hittar?

Webbfrågan

Med jämna mellanrum publiceras resultat från partisympatiundersökningar. Bakom dessa ligger ett väl genomtänkt urvalsförfarande som ser till att relevanta proportioner från olika befolkningsskikt, såsom män och kvinnor, stad och landsbygd, med mera, tillfrågats. Därigenom räcker det med att fråga drygt 1000 personer för att få tillförlitliga resultat.

Sedan några år tillbaka finns även så kallade Webbfrågor Där tillfrågas man om allt möjligt, och via nätet kan man knappa in vad man tror eller tycker. En dag våren 2003 löd frågan “tror du att Saddam Hussein lever?” ... Vad skall jag tro om det? (Just idag, den 14 december 2003, när detta skrives meddelas att han har gripits.)

Webbfrågan i Dagens Nyheter den 30 mars 2001 löd: “Vilket parti skulle du rösta på om det vore val idag?” med fotnoten “Urvalet av de röstande är okontrollerat och resultatet ska därför tolkas försiktigt”. Förutom löpande redovisning på nätet redovisades i tidningen dagen därpå hur de 8301 personerna röstat. Dessutom samma dag, tacksamt nog, resultatet av den senaste Gallupundersökningen, vid vilken 1757 personer hade tillfrågats.

♣	*Webb-DN*	*Gallup*
Alternativ	Procent	Procent
mp	5	6.5
m	36	25.3
fp	11	4.1
c	6	6.6
kd	7	8.8
s	15	33.7
v	12	13.1
Rösta rej+ övr.	8	1.9

Det finns mycket man kan säga om dessa si_ror. Det första är det så kallade finstilta, fotnoten, att man skall tolka resultaten med viss försiktighet (vilket man omedelbart glömmer bort). Det andra är att tidningen inte ljuger med statistik, bara att webb-siffrorna är vilseledande.

> *Varför är resultaten så dramatiskt olika?*
> *Enligt stora talens lag borde de inte vara det.*

Svaret är att, till skillnad från opinionsinstituten, så baseras resultaten från webbfrågor på icke-sannolikhetsurval. Urvalet skapas nämligen av de svarande själva! Den som vill svara svarar. I detta ligger det en inneboende skevhet, nämligen att den som svarar är intresserad av frågan, har tillgång till dator och är så intresserad att han (hon) bryr sig om att svara, och dessutom kanske till och med ber kamrater att svara för att öka antalet svar med samma alternativ som de själva.

Slutsatsen blir att Webbfrågor är värdelösa, farliga och skadliga. Men de säljer antagligen någonting, någon gör sig pengar på dem.

Bäst i världen eller sämst i Europa?

Detta är den något förbryllande rubriken på ledarartikeln i Vetenskapsrådets nyhetsbrev Aktuellt, nr 4, Oktober 2001. Artikeln inleds sedan som följer:

> "Bäst i världen eller sämst i Europa? En ledande aktör eller en föredetting i utförsbacke? åsikterna om och bilden av Sverige som hårdsatsande forskningsnation går vitt isär. [...]
> Det går att räkna på många sätt. Ett exempel: man kan titta på de samlade forskningssatsningarna som del av BNP. Då blir Sverige bäst i världen, nästan fyra procent av BNP går till forskning, inklusive näringslivets satsningar. Det går även att jämföra hur stor del av den statliga budgeten som går till forskning. Då seglar Frankrike upp som etta med 4.95 procent av statsbudgeten, och Sverige hamnar plötsligt långt ned på listan, som nummer tio med 1.40 procent. [EU-kommissionens siffror.]"

Naturligtvis kan det vara svårt att jämföra si_ror för olika länder. Om vi emellertid bortser från detta så ser vi att man kan välja ett flertal olika "i förhållande till" och få olika resultat. Mera tillspetsat: Genom att välja ett "lämpligt i förhållande till" kan man dra den slutsats av materialet man önskar.

Att utbildningsministern upprepat hävdar att vi är bäst i världen är därför ingen lögn. Att man inom universitetsvärlden samtidigt noterar att anslag till forskning och utbildning ständigt krymper är en annan historia.

8. Sammanfattande avslutning

Matematik, statistik och sannolikheter är centrala beståndsdelar av våra dagliga liv. Det finns väldigt många problem och aspekter som passar väl in i skolundervisningen, vilket ger rika möjligheter dels till ökad kunskap och förståelse, dels till att på sikt bidra till krossandet av de fördomar mot och rädsla för dessa ämnen som är så vanliga och onödiga. Dessutom ges man tillfälle att gratis upptäcka att matte är såväl fascinerande som roligt.

— _ —

Skolematematikkens formative årtier 1903 – 1937

Av H.C. Hansen

Hans.Christian.Hansen@skolekom.dk

H.C. Hansen er cand. scient. i matematik og fysik fra 1972. Han blev i 1985 dr. scient. i teknologi- og undervisningshistorie på biografien: ”Poul la Cour, grundtvigianer, opfinder og folkeoplyser” . Han har undervist i matematik i 30 år på seminarier og på Askov Højskole, og er nu ansat på Københavns Dag- og Aftenseminarium.
Han har i de senere år interesseret sig for matematikundervisningens historie i Danmark, og deltager i planlægningen af den nye ”topic study group” om matematikundervisningens historie ved ICME-10 i København 2004.

En bølgemodel for matematikundervisningens udvikling i Danmark[1]

”It's the same old story”

Lad os starte med at se på to citater om matematikundervisning og fundere lidt over, hvornår de stammer fra:

Citat 1:
”*Man hører ofte i vore Dage Klager over, at de Unge ikke kan regne, og der føjes til: "Da fik vi en anderledes Færdighed i vore Dage".
Det kan heller ikke nægtes, at det netop var det, man fik ved den gammeldags Regneundervisning; man spildte ikke Tiden med at lade Børnene selv finde paa en Fremgangsmaade, men regnede et, højst to Stykker paa den store Tavle, slog Reglen fast, og saa lod man den regne Stykke efter Stykke af samme Slags... til de var sikre.
Saa kom Omslaget. Børnene skulle lære at tænke, og det var Regningens eneste Maal - alt det mekaniske var af den Onde*”.

Citat 2:
”Matematik er et færdighedsfag, og det der er brug for, er, at børn lærer at regne. De skal ikke eksperimentere sig frem til, hvordan to tal bliver lagt sammen, eller hvordan man ganger brøker med hinanden”.

[1] Foredraget havde titlen ”Skolematematikkens formative årtier 1903-37”, men drejede sig først og fremmest om denne bølgemodel af udviklingen. Detaljer om tiden fra 1903-1937 findes i Hansen (2001).

Hvilket citat er det nyeste og hvornår er citaterne fra?

Citat nummer to er fra efteråret 2000 og udtalt af chefkonsulent Hanne Schou fra Dansk Industri (DI) til et dagblad, der bragte interviewet under overskriften "DI: Læseplan skal skrottes"[2]. Hun fandt tiden moden til at revidere læseplanen fra 1995, der med sit socialkonstruktivistiske læringssyn efter hendes mening syntes at overlade for meget til børnenes egen tænkning og fantasi.

Det første citat er skrevet af lærerinde Johanne Lütken i 1905 i en artikel om regneundervisning[3]. For hende var den gammeldags regneundervisning åbenbart et overstået kapitel. Der var ikke tvivl om at der var nye tider på vej i starten af 1900-tallet. Hvis man læser videre hos Johanne Lütken , vil man se stærke lighedspunkter mellem hendes syn på matematikundervisning og den nyeste læseplan i Danmark.

Johanne Lütken 1905	**Vejledende læseplan 1995/2001**
Idealet for Regneundervisningen skulle være, at Børnene lærte at bruge deres medfødte sunde Fornuft, fik den udviklet - men ikke forkvaklet ved lange Forklaringer og bundne Opstillinger og Regler - og fik Lejlighed til at prøve forskellige af dem selv og Læreren foreslaaede Fremgangsmaader og til at vælge den simpleste. De skulle gennem en ensartet, sammenhængende Undervisning ledes til at gøre Fremskridtene selv og gaa uden Spring fra det ene til det andet, og saa skulle de have lov til at tumle med Opgaver, der er saa lidt abstrakte som muligt, men referere sig til hvad der sker omkring Børnene - det de har Interesse for[4]	"Undervisningen bygger på de mange forudsætninger, som eleverne har, når der begynder i skolen". 1.-3.kl: "Den enkelte elev skal have mulighed for at udvikle egne metoder til antalsbestemmelse ved addition og subtraktion". 3.-7.kl:"I arbejdet med de naturlige tal udvikler eleverne fortsat egne beregningsmetoder. Standardiserede regneopstillinger indføres, hvis det for eleven er en forenkling af arbejdet." "Eleverne bygger videre på deres forskellige faglige erfaringer ved at deltage i lege, spil og undersøgelser på skolen i og dens omgivelser".

Skitse til en bølgemodel af udviklingen

Dette at fortiden i nogle kilder tager sig så moderne ud, er noget af en fristelse og i al fald en stor udfordring for den, der vil skrive historien om et undervisningsfag som matematik/regning. For man ved jo godt at kilderne næppe beskriver den typiske hverdag i skolen. Men man skulle tro, at skolens hverdag ikke kunne være upåvirket af tankerne hos tidens skrivende pædagoger og lærere og i al fald måtte følge officielt vedtagne love og retningslinier. Men her udmærker Danmark sig ved en særlig frihedstradition og især metodefrihedstradition, der gør det vanskeligt at slutte fra papir til praksis. Det blev udtrykt klart af undervisningsministeriets departementschef A. Barfod forud for skoleloven af 1937:

[2] Nordjyske Stiftstidende 2. oktober 2000, 1. sektion.
[3] Johanne Lütken: Regneundervisning, Vor Ungdom 1905 s. 449.
[4] Lütken s.449f

"*Hertil er i Rigsdagsudvalget føjet en yderligere Anvisning paa i alle Klasser at lægge mest mulig Vægt paa Elevernes Selvvirksomhed. Bestemmelsen er efter mit Skøn ligesaa uskadelig som overflødig. Vinder et pædagogisk System frem i det praktiske Skoleliv, vil det præge Folkeskolen, selvom ingen Lovbestemmelse kræver det fulgt. Vinder den paagældende Teori ikke Fodfæste i Skoleverdenen, nytter det intet, at den paabydes af Loven, og jo færre pædagogiske Anvisninger der gives fra oven, fra Lovgivningsmagten eller Centraladministrationen, des bedre*"[5].

Departetmentschefen havde åbenbart ikke stor tiltro til at undervisningsministeriet kunne ændre på det fremherskende pædagogiske syn i skolen. I det praktiske skoleliv er der store kræfter på spil, som end ikke direkte lovbestemmelser kan ændre på.
Jeg har over de sidste fire år haft lejlighed til nu og da at arbejde med den elementære matematikundervisnings historie i Danmark og efterhånden dannet mig en mening om modernitet og tradition i matematikundervisningen. Der skal mere arbejde til, før jeg kan være sikker, men mine foreløbige teser er følgende:

Teser om den elementære matematikundervisning

1. Man må sætte spørgsmålstegn ved "traditionel matematikundervisning" som refererende til en bestemt historisk periode.

2. Der er snarere tale om en **vedvarende reform** over de sidste 200 år. Centralt i reformen står troen på det aktive ,skabende, konstruerende barn.

3. Samt om **periodiske svingninger** mellem særlig vægt på:

Material dannelse	*og*	*formal dannelse*
(færdigheder/kundskaber)		*(forståelse)*

Disse teser vedrørende matematikundervisning gælder ikke på samme klare måde for skolens undervisning i al almindelighed. Der er noget særligt ved matematik og regning, der på den ene side indbyder til selvstændig aktivitet og på den anden til ren færdighedstræning. I festskriftet i anledning af 1814-lovens 100-års jubilæum læser man således:
"*Regningen blev drevet med Iver og var vel nok det Fag, hvor der blev naaet de bedste Resultater, selv om den mærkelig Færdighed i Regning, der fandtes hos Almuen, ikke alene kunde tilskrives Skolen, men for en stor Del Naturbegavelse og praktisk Øvelse. Der lyder derfor ogsaa de færreste klager over dette Fag; mest fra de Lærere, der saa, at Regningen under de dengang givne Forhold i Skolen egentlig var det eneste Fag, hvor Elevens Selvtænkning kunde sættes i Virksomhed, og som derfor beklagede den ensidige Mekanisme, der beherskede det*[6]".

Påstanden her er bl.a. , at regning var det eneste fag, som dengang (refererende til ca. 1850) kunne sætte elevernes selvtænkning i virksomhed. Flere kilder peger på, at der allerede omkring midten af 1800-tallet var en teoretisk kamp for at sætte "selvtænkning" med tilhørende forståelse i centrum i regneundervisningen i børneskolen.

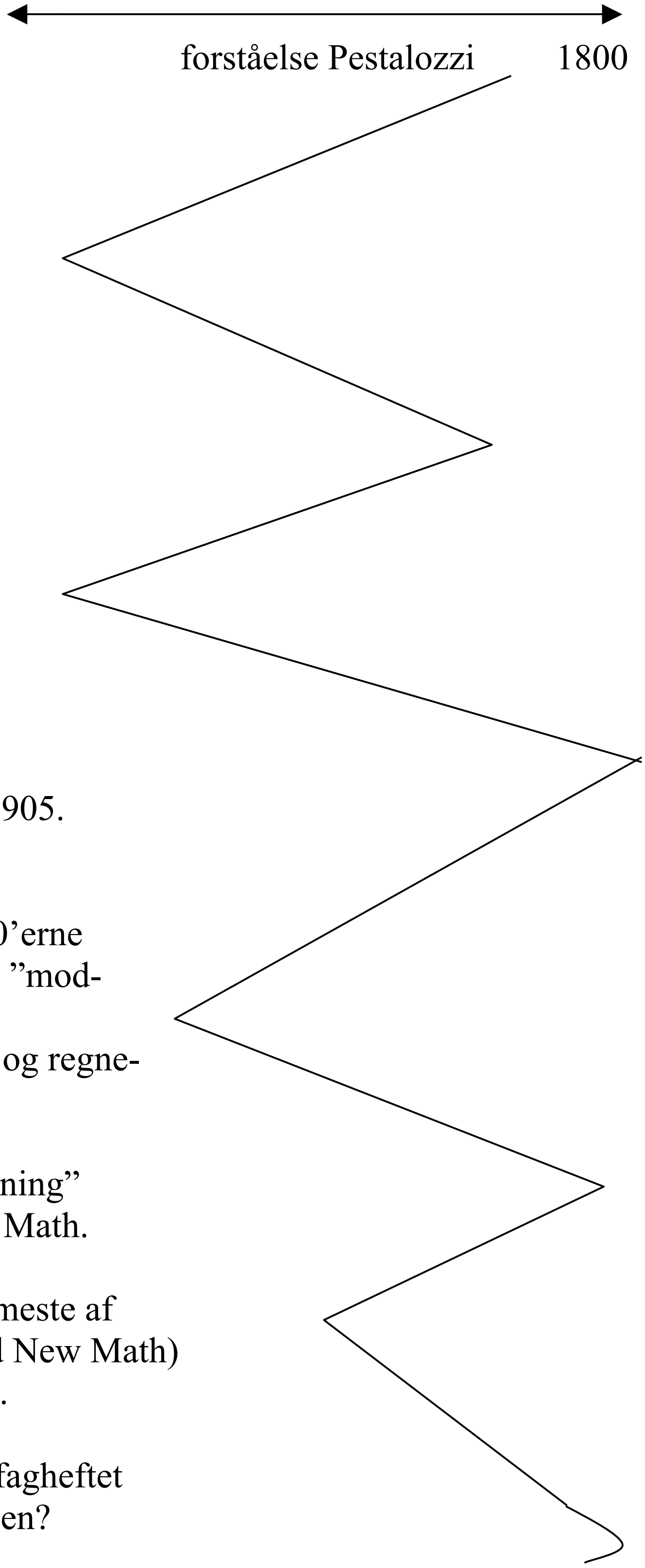
[5A]. Barfod: Det borgbjergske reformkompleks , I. Det danske skolelovsforslag, V.U. 1935-36 side 153.
[6] Holger Rützebeck: Arbejdet og dets vilkår i den danske folkeskole gennem 100 Aar. I Den danske Folkeskolen gennem hundrede aar 1814-1914, Kbh. 1914, s. 150.

Den regnepædagog, der mere end nogen anden kæmpede for at "ombytte Mechanisme og dødt Regelværk ned Grundighed og selvvirksom Udvikling", var Hans Schneekloth (1812-82). Han kunne i forordet til sin regnebog fra 1841, skrive så ivrigt og agitatorisk som næppe nogen siden har gjort ham efter i genren "regnebog":
Mekanisk Regning er det altsaa, naar man uden Indsigt og Bevidsthed gaaer frem efter uforstaaede og foreskrevne Regler. Enhver, der bruger denne Fremgangsmaade, er følgelig en Maskine; men Mennesket skal ikke være nogen Maskine; thi det hører til de organiske Skabninger. At afrette et Barn til bevidstløs Regnen, til en Leg med døde Ziffre, er at lænkebinde eller dræbe dets Aand; det er et intellektuelt Drab"[7]. Derfor må han i samme forord tage afstand fra den konkurrerende regnebogsforfatter, seminarielærer Meyer, der mente, at "Sandheden ligger i Midten" mellem det mekaniske og det eftertænksomme.

Når jeg før kunne dokumentere, at Johanne Lütken i 1905 havde et syn på regneundervisning, der ligger tæt på den gældende læseplan i Danmark i dag, så kan man med samme ret sige det om Hans Schneekloth. I sit lange forord til regnebogen i 1841 nærmer han sig faktisk den position, vi i dag finder moderne og kalder socialkonstruktivisme. Det bliver helt klart, hvis vi samler de centrale klip fra forordet: "han (eleven) skal under Veiledning selv finde Operationerne og opsvinge sig til det Almindelige". "Andres Viden er for os en fremmed og død Viden; vort er kun det, som Aandens Liv har fremavlet i os selv". "Det er godt, naar han (eleven) selv baner sig sin Vei, selv udtænker sig egne Opløsningsmaader".
Det er tankevækkende, at tilsvarende påstande fremsættes af regnepædagoger op gennem 1900-tallet baseret på en ny tids undervisningserfaringer og vidt forskellige referencer til pædagogiske filosoffer og psykologer. Der er altså tale om en meget levedygtig tradition inden for regne- og matematikundervisningen

[7] Schneekloth, 1841,s.2.

Foreløbig skitse[8] til bølgemodel af matematikundervisning



færdighed forståelse Pestalozzi 1800

1814 skoleloven i Danmark

Den indbyrdes undervisning. Lancaster i Danmark 1930.

Diesterweg i Berlin. I Danmark: H. Schneekloth 1850

”Back to basics” i Preussen. Chr. Hansens Regnebog delvis dansk udtryk, 1880.

1999-1903 lovgivning tror på formaldannelse. Konstruktivistiske danske regnepædagoger, 1905.

Back to basics bevægelse i 1920’erne
Behaviorismen trænger frem og ”modbeviser” formaldannelse
Erhvervslivet kræver præcision og regnefærdighed.

1958-loven og den ”Blå betænkning” lægger vægt på forståelse. New Math.

Back to basics reform over det meste af verden, ca. 1980 (Reaktion mod New Math)
Færdighedsprøve indføres 1978.

Social konstruktivisme i 1995- fagheftet ”Fælles mål”. Vender kurven igen?

[8] ”skitse”, fordi en endelig model må behandle debatten om faget og de faktiske forhold i skolen hver for sig, da de til tider dels er faseforskudt og da udsvingene i praksis er langt mindre end i debatten (diskursen).

Forståelse-færdighed i 1800-tallet

Lige så levedygtig er imidlertid synet på barnet som et tomt kar, der skal fyldes i skolen. Inden for regneundervisningen har denne metafor især være forbundet med materialdannelse og vægtning af færdigheder. Hvis vi lader Schneekloth repræsentere udsvinget til "forståelse" omkring 1850 på den viste "Skitse til en bølgemodel", så ses den at være omgivet af udsving til færdighedssiden både før og efter.

Det er egentlig lidt mærkeligt med færdighedsudsvinget omkring 1830. For oplysningstiden havde været præget af et formaldannende syn på matematik, og Rousseau lod allerede i sit pædagogiske hovedværk "Emile" fra 1762 Emile selv opdage de geometriske sammenhænge: *"Jeg vil ikke indlade mig på at lære Emile geometri, det er ham, der skal lære mig den, jeg vil søge efter de geometriske forhold og han vil finde dem; for jeg vil søge dem på en sådan måde, at han må finde dem*[9]*"*.

Denne inspiration fra Oplysningstiden slog igennem omkring skoleloven af 1814 – ikke mindst fordi Heinrich Pestalozzi (1746-1827) med sit anskuelighedsprincip angav praktiske veje til forståelse i den elementære regneundervisning. Anskuelsesprincippet fik stor hjælp fra Napoleons soldater, der efter tilbagetoget fra Rusland i 1812 tog den russiske kugleramme med hjem, og den tog hele det europæiske marked med storm, endnu før pædagogerne havde udtalt sig om dens fortræffelighed i undervisningen. Derfor lader jeg min bølgemodel starte omkring 1800 med et udslag til forståelsessiden.

Når jeg så alligevel lader den ryge over til færdighedssiden omkring 1830, så skyldes det ikke nogen speciel udvikling inden for regnepædagogikken, men rigets almindelige tilstand. Efter bombardementet af København og Statsbankerotten i 1813 var tiden nemlig ikke til udgiftskrævende reformer, så på den måde fik 1814-loven en dårlig start. I forlængelse heraf blev skolen ramt af noget af en katastrofe i form af den økonomiske "indbyrdes undervisning", der dominerede i 1820'erne og 30'erne. Under dette system fungerede læreren som officer med ældre elever som korporaler med hver sin gruppe af mindre børn, der blev ekserseret gennem store tabeller og tavler rundt om på væggene. "Ved idelig mekanisk gentagelse terpede de større elever stoffet ind i de mindre under lærerens kommando, idet de læste "
'opad vægge og nedad stolper''"[10]. Hvis man i det hele taget tør bruge ordet dannelse i denne forbindelse, så var det materialdannelses-fløjen der vandt i den grad i disse år.

Det er indlysende, at enkle forklaringer ikke slår til som forklaring på bølgemodellen. Udsvinget til forståelsessiden i forbindelse med Schneekloths virke, kan ikke blot ses som pædagogiske tankers styrke sat overfor økonomiske kræfter. Der var andre ting i tiden, der muliggjorde et udsving, fx hele den demokratiske process omkring grundloven af 1849 og den tekniske udvikling.

Udsvinget til færdighedssiden omkring 1880 forstår jeg ikke helt endnu. Det synes ikke at være et specielt dansk fænomen, men nærmere følgevirkningerne af et tilsvarende omslag[11] i Preussen , som Danmark i disse år var meget inspireret af. Et konkret udtryk for det bedste i denne færdighedsbølge findes i Chr. Hansens regnebøger, der i der i det næste halve århundrede skulle udkomme i et par millioner eksemplarer.

Man kan godt opfatte disse berømte og berygtede regnebøger som noget mekaniske i deres fremstilling - det gjorde man i al fald i samtiden og ikke mindst, når man sidenhen mindedes gamle dage.

[9] For flere Emile-referencer se Hansen (2001) s. 106f.

[10] G.J. Arvin: Folkeskolen – folkets skole, 1951, s. 38.

[11] Det berømte såkaldte "Stiehl'sche Regulativ" fra 1854.

Regning som tankens slibesten, 1900-1910

Når Johanne Lütken i 1905 skriver: *"Børnene skulle lære at tænke, og det var regningens eneste mål"*, så kunne hun hævde det med hold i den undervisningsvejledning (Det Styhrske Cirkulære 1900) der kom som opfølgning på skoleloven af 1899. Med dette cirkulære var regning endelig blevet et selvstændigt fag med et fastsat timetal på 3 ugentlige timer i alle skoleår (dog 4 i 6-7. klasse i købstæderne). Og det var det fag, der var stærkest præget af formaldannelsesfilosofien:

"Ved Regneundervisningen skal der tages Sigte paa, at Børnenes Forstand udvikles og de vænnes til Energi og Udholdenhed i deres Tænkning, samtidig med at de opnaa den i det praktiske Liv saa værdifulde Regnefærdighed"

Ifølge det Styhrske Cirkulære havde hvert skolefag sine formaldannende kvaliteter, men regning var det bedst egnede fag til at udvikle forstanden, skønt energi og udholdenhed også kunne læres i regnetimerne. Det synes indirekte at følge heraf, at vægten i faget skulle lægges på forståelse.
Endnu i 1910 kan man i en anmeldelse af Johanne Lütkens håndbog for regnelærere læse: "Paa Regneundervisningens omraade er der for Tiden stærkt Røre, man kræver den mekaniske Regning underbygget med mere Forstaaelse"[12]. Men forståelsesbølgen var da allerede på vej tilbage mod dyrkelse af færdighed. Det kan vi se fra historiens afstand.

Hvor vi kun har set overfladisk på skiftene mellem færdighed og forståelse i 1800-tallet, vil vi her se på detaljerne i skiftet tilbage til mere traditionel regnefærdighed i 1920'erne.

Reaktionen, færdighedskrav 1920-37[13]

Den stærke tro på regning som formaldannelsesfag ("tankens slibesten") og den tilhørende vægtning af forståelse fremfor viden og færdigheder blev i løbet det andet og tredje årti i det tyvende århundrede anfægtet fra fire sider: psykologisk opgør med formaldannelse, nye krav fra erhvervslivet, ministeriets indførelse af effektiv testning af regnefærdigheder samt regnelærernes praktiske erfaringer.

1. psykologisk opgør med formaldannelse.

Det syntes at starte med en doktorafhandling. I 1912 skrev pædagogen og filosoffen Axel Dam
en afhandling "Om Muligheden af formel Opdragelse af de intellektuelle Evner". Det spørgsmål han ville undersøge var, om man ved at arbejde med én slags materiale i skolen kunne forvente "større Energi og Skarphed i Behandlingen af nyt materiale" (altså det vi på engelsk senere kalder "tranfer of training"). Og han konkluderede efter en gennemgang af den foreliggende forskning, at det kunne man absolut ikke.
Sagen var nemlig ifølge Dam, at 1800-tallets psykologi, hvor man troede, at hver evne havde sit særlige sæde i hjernen (sin "muskel" der kunne trænes) var forkert. Derfor var det ikke så

[12] Wilster, Henrik: anmeldelse af Johanne Lütken: Regning i Skolen, Vor Ungdom 1910, s.135-138.
[13] Her er overtaget en del formuleringer direkte fra Hansen (2001) kapitel 5.

underligt at fagene ikke kunne have formaldannende virkninger, da der ikke var noget i hjernen som fagene kunne træne op til almindelig forbedring af præstationen i nye situationer. Dams psykologiske teorier skulle nogle år senere få støtte fra den nye psykologiske retning, behaviorismen, der snart blev dominerende på mange universiteter, især i USA. Herefter forstummede al tale om formaldannelse i den klassiske forstand, mens ambitionen om at lære mere end det direkte stof i matematikundervisningen selvfølgelig har levet videre under andre navne[14].

2. nye krav fra erhvervslivet

I 1922 åbnede Det Danske Luftfartsselskab sin første rute. I 1923 fik Danmark sin første færdselslov. Fra ca 3000 biler før krigen 1914-18 var tallet i 1920 vokset til 18.000 og passerede i 1929 de 100.000.
Den store produktion af biler over hele verden var muliggjort ved samlebåndsteknikken, hvor bilerne langsomt, men sikkert blev ført frem til hundredvis af arbejdere, der hver var ekspert i at udføre sin specielle detalje på bilen og kun den. Midt i 20'erne samlede Fordfabrikkerne i København således omkring 50.000 biler om året. Dette princip fra den moderne industri måtte få indflydelse på industriens efterspørgsel efter kvalifikationer hos de nye årgange, der forlod folkeskolen. Og måske lå der også en tillokkende pædagogisk metafor i princippet. Bl.a. direktøren for Købmandsskolen, Marius Vibæk havde efterlyst sikkerhed i almindelige færdigheder. Han fandt, at man i regning lagde for lidt vægt på taltræning:"Erhvervslivet kræver, at lærlingen kan tumle enkle talforbindelser med absolut sikkerhed"[15]. Og man lyttede til erhvervslivet i disse år, hvor arbejdsløshedsprocenten i fx 1927 var helt oppe på 22%.

3. ministeriets indførelse af effektiv testning af regnefærdigheder.

Da folkeskolens ældre klasser efter Almenskoleloven fra 1903 var opdelt i mellemskoleklasser og almindelige folkeskoleklasser, følte undervisningsministeriet fra 1917, at det kunne være oplysende at sammenligne de opnåede regnefærdigheder på de to grene. Man testede derfor et repræsentativt udsnit af 14-årige på tværs af skoleformerne. Da folkeskoleklasserne havde mere ro til at koncentrere sig om regning, medens mellemskoleeleverne også skulle i gang med matematik, kunne optimister måske have forventet en bedre regnefærdighed i folkeskoleklasserne. Men målt på en skala fra 0 til 15 afsløredes det at folkeskoleeleverne kun fik 7,7, svarende til mindre en halvdelen rigtige mod mellemskoleelevernes 10,4. Opgørelsen er fra 1918, hvor opgaverne i en tretimers prøve var:

I.
En slagter solgte i en Uge ti Oksekroppe, der vejede 245,5 Kg, 256,8 Kg, 195,6 Kg, 304 Kg, 284,75 Kg, 318,75 Kg, 265,25 Kg, 295,5 Kg, 184,7 Kg og 192,5 Kg. Hvor meget Kød solgte han i alt, og hvor meget kostede alt Kødet, naar 1 Kg regnes til 2 kr. 8 øre?

II.
En Mand efterlod sig ved sin Død 70500 kr. Efter at hans Gæld som beløb sig til 3867 kr 76 Øre, var betalt, skulle

[14] Læs evt kapitel 10: "Løb tankens slibesten tør" i Hansen (2001) s. 174-187.
[15] A.R. Schacht: En praktisk mellemskole, 1971, s. 59

Resten deles lige mellem 19 Arvinger. Hvor meget fik Enhver af disse? *III.* *En Mand køber en Byggegrund af Form som et Rektangel, 48 ¾ m lang og 36 m bred, og gav 2 Kr. 40 Øre for hver Kvadratmeter. Paa Grunden byggede han et Hus, der kostede 9578 Kr. 64 Øre. Forskellige Udgifter udgjorde 619 Kr. 86 Øre. Hvor meget kostede Ejendommen i det hele?* *IV.* *En Mand købte en Ejendom for 65400 Kr. Omkostninger ved Handelen udgjorde 3 2/5 Pct af Købesummen. Han lod Ejendommen istandsætte, hvad kostede 776 Kr. 40 Øre. Han solgte den saa for 74100 Kr. Hvor mange Pct. tjente han?*

Der blev givet 15 for fire rigtige opgaver, 12 for 3, 8 for 2 og 4 for en enkelt rigtig opgave. Visse manglende udregninger blev accepteret, hvis facit var korrekt, hvorimod karakteren blev reduceret, hvis alle mellemregninger var udeladt.

	Totalt antal		Antal elever regnet opg.				Antal elever regnet antal opgaver				
Skoleform	Skoler	Elever	opg1	opg2	opg3	opg4	4	3	2	1	0
Mellemskole	47	941	53%	81%	60%	41%	28%	21%	17%	21%	11%
Folkeskole	273	2762	34%	59%	42%	24%	15%	15%	18%	20%	32%

Det foruroligende her var først og fremmest, at 11% i mellemskolen og 32% i folkeskolen ikke havde regnet nogen af opgaverne korrekt ud. En del af disse kan dog godt sammenlagt have fået en karakter, der svarer til 1 eller flere korrekte opgaver, idet karakteren 0=slet "kun" er givet til 9% i folkeskolen og 1% i mellemskolen.
Generelt kneb det med at gange decimaltal sammen (opg. 1) og med procentregning (opg. 4), men mon ikke også 7. klasses børn i dag ville have svært ved at udregne 3 2/5% af 65400 uden lommeregner.
Ministeriets testning var i grunden blot et neutralt instrument. Men det gav den nødvendige dokumentation for den generelle kritik af formaldannelsen og en undervisning, der lagde stor vægt på forståelse på bekostning af færdighed.

4. Regnelærernes bud på ændringer

En praktiserende regnelærer, Axel Nørby fra Silkeborg, skriver i 1929 i rubrikken "Skolens daglige liv og arbejde" i Vor Ungdom:
"*Erhvervslivets Anke over Ungdommens Usikkerhed i den elementære Regning og de eksperimentelle Forsøgs fremhævelse af den store Forskel paa Børns Begavelse tyder paa, at der maa lægges andre Principper til Grund, hvis Arbejdsvilkaarene og dermed Resultaterne skal forbedres.*
Vanskeligheden ved Arbejdets Planlæggelse skyldes Forskellen paa Begavelse; men Erhvervslivets krav om Sikkerhed i det elementære letter Sagens Løsning. Dette medvirker forhaabentlig til at fæstne den Tanke, at Barnet staar bedre rustet for Livet som Mester paa et lille Omraade end som fusker i alt". Målet må derfor være at give alle børn sikkerhed og hurtighed i elementær regning, som den bruges i det praktiske liv.
"*For at dette Maal kan naas, maa Hukommelsesstoffet - Tabellerne, Mønt og Metersystemets Navne og Forhold samt de fire Regningsarter med ubenævnte Tal - ved ustandselig*

Gentagelse indprentes til Fuldkommenhed...Ved stadig Træning i det elementære Stof maa Børnene opøves til at yde det mest mulige Arbejde i den kortest mulige Tid".
"*Brøkteknik og Forholdsregning er typisk for det Stof, der tages med af Sædvane uden at have Tilknytning til det praktiske Liv. Man har villet hævde, at det er tankeudviklende for Barnet at arbejde dermed. Denne Udvikling gælder dog ikke Barnets Tænkning i Almindelighed, men kun den særlige, som kræves til Løsning af disse Opgaver*"[16] .
En af forfatterne til det, der skulle blive det dominerende lærebogssystem i 40 år, Ernst Gehl, gik ind i diskussionen om den manglende regnefærdighed i 1921. Han tror som flere andre, at den "mekaniske færdighed var større for 25 år siden, end den er nu"[17]. Han foreslår i den forbindelse en bølgemodel for tidernes skift mellem vægt på færdighed og forståelse:
" *Sagen er vel imidlertid den, at man ved Regnefærdighed maa forstaa saavel mekanisk Færdighed som Forstaaelse af de foreliggende Opgaver. Som det imidlertid gaar med saa mange Forhold her i Livet, at disse følger Bølgebevægelsen, saaledes gaar det ogsaa med Regneundervisningen, idet man snart har lagt Vægt paa den ene Side af Regnefærdigheden: den mekaniske, snart paa den anden: Forstaaelsen.*
Det rigtigste ville dog maaske være at følge den gyldne Middelvej.
Spørgsmaalet bliver nu dette: Er vi inde paa denne Vej? Hertil vil jeg for mit Vedkommende mene, at Tendensen gaar i den Retning.
Jeg tror nemlig, at vi, efter at der tidligere er lagt særligt Vægt paa den mekaniske Side, kom ind i en Periode, hvor Forstaaelsen kom til at spille en for stor Rolle paa Bekostning af Talfærdighed; nu er der imidlertid meget, der tyder paa, at man er ved at revidere sine Anskuelser angaaende Regneundervisningen"[18].
Var bøgerne i "den mekaniske færdighedstid" præget af rene rækker af tal, var de til gengæld i den netop forløbne "forståelsestid" præget af bogstaver, af alt for mange iklædte tekstopgaver. Prisen har været et fald i regnefærdighed og dermed kan tekstopgaverne ikke udfylde deres mission. Den gyldne middelvej må både udvikle barnets talfærdighed og forståelse på samme tid: *"Uden Talfærdighed taber Børnene nemlig Lysten til Regning og faar for lidt Tid til at gennemtænke Opgaven; uden Forstaaelse kan Regning ikke blive det tankeøvende Fag, som det burde*"[19].
Løsningen kunne være Systemet "Den Ny Regnebog", som Ernst Gehl var medforfatter på*:" Ved at gennemføre Regnetimerne efter en bestemt lagt Plan saaledes som det er gjort i de af Fr. Friis-Petersen, Ernst Gehl og J.L.W.Jessen udgivne "Lærernes" Bøger, der knytter sig til "den ny Regnebog" I,II og III, opnaar man, at det Tilfældighedens Præg, som kan komme ind i Regneundervisningen afhjælpes, og at der kommer Fasthed, Bestemthed og Orden i Arbejdet, at der tages ligelig Hensyn til begge Sider af Regnefærdigheden*".
Der skete således det i 1920'erne at der udkom regnebøger på flere forlag under navnet Ny Regning eller lignende udtryk med "ny". Det sjove er, at det er disse bøger vi i dag først og fremmest tænker på, når vi taler om "traditionelle" regnebøger.

Eftertanker

Jeg har lagt særlig vægt på at forstå svinget tilbage til færdighedspositionen i 1920'erne. Det skyldes selvfølgelig, at vi ifølge en simpel fremskrivning af bølgemodellen snart burde gå ind i et sådant sving mod færdighed igen.

---

[16] Axel Nørby: Regneundervisning, Vor Ungdom 1929, s.214

[17] Ernst Gehl: Om regning, Vor Ungdom 1921 s. 204.
[18] Samme
[19] Samme s. 205.

Men som matematikere burde vi vide, at man ikke kan slutte fra en funktions opførsel i et givet interval til opførslen i det næste. Desuden er denne bølgemodel i langt højere grad end matematikken selv en konstruktion eller opfindelse. De der har levet et menneskeliv som matematikundervisere vil ogsåvide, at modellen er stærkt forsimplet, når det drejer sig om den sidste menneskealder. Der var foreksempel meget mere på spil under den ”Ny Matematik” end blot en læggen vægt på forståelse. Faktisk var den nye matematik så svær for mange, at der fremkom materialer med stærk vægt på indlæring af mængdebegreberne og de logiske symboler. Alligevel vil jeg dog hævde, at der samlet set var tale om et udsving til forståelsessiden fra den Blå Betænkning i 1960, gennem den Ny Matematiks blomstring og op gennem 1970'erene.
Så kan man måske være mere i tvivl om, at der faktisk kom en reaktion, der gav udsving mod færdighed igen. Derimod kan man næppe sætte spørgsmålstegn ved, at der kom en reaktion mod den nye matematik i almindelighed og mængdelærens og logikkens symbolverden i særdeleshed. Så en svingning kom der. Men man kan diskutere om den simple dimension ”færdighed kontra forståelse” fanger den retning svingningen gik i. Men indførelsen af en færdighedsprøve ved folkeskolens afgangsprøve i 1978 synes at retfærdiggøre talen om et sving i retningen af færdighed. Tvivlen om dette bevirker dog, at jeg på min model har gjort udsvinget mod færdighed omkring 1980 lidt mindre end ellers.
Så er der spørgsmålet om kurven er ved at vende igen. Jeg citerede fra den kortvarige avisdebat i år 2000, hvor der udover den anførte overskrift ”DI: den læseplan skal skrottes” forekom andre lignende overskrifter som: ”Glem ikke den gammeldags undervisning” og ”Matematik på katastrofekurs”. Debatten blev dog begrænset og slog ikke stærkt igennem politisk, men senere strammedes den progressive læseplan fra 1995 dog op på nogle punkter og blev i 2001 udstyret med ”Klare Mål”, der i 2003 er blevet gjort bindende som ”Fælles Mål”.
Dette, at man indskærper målene og laver trinmål, betyder ikke i sig selv et skift mod færdighed. Det vil først afsløres i næste omgang, når der nu snart kommer retningslinier om evaluering. Regeringen er stærkt interesseret i at Danmark i fremtiden skal placere sig bedre i de internationale undersøgelser om matematikkundskaber. Hvis den herunder kommer på den samme idé som i 1917 med at indføre repræsentativ testning af trinmål over større dele af landet, først da kan man med sikkerhed sige at kurven har vendt igen.
Da tyvernes færdighedsbølge havde fungeret i et årti testede man igen de 14.-årige børn med en test, hvor et af spørgsmålene lød[20]:
”Find overfladen af en mursten, der er 24 cm lang, 10 cm bred og 5,6 cm tyk”
Selv om spørgsmålet ikke er vanskeligt, svarede det ikke til nogen formel, børnene havde lært. Derfor svarede kun 11% rigtigt. Det interessante er at der var flere der benyttede den velindøvede formel for en kasses rumfang og angav korrekt facit for dette, men desværre gik spørgsmålet slet ikke på rumfang. Et lidt skræmmende eksempel på færdighed, der har domineret over forståelse.

Litteratur:

H.C. Hansen: Fra Forstandens slibesten til borgerens værktøj. Regning og matematik i folkets skole 1739-1958. DCN, Aalborg Universitet 2001. (Bogen findes som pdf.-fil på nettet: www.dcn.auc.dk/research/papers from dcn/No 16.pdf)

[20] Hele testen kan ses i Hansen (2001) s. 100

Rundt om uendeligheten

Av Vagn Lundsgaard Hansen

Institut for Matematik,Danmarks Tekniske Universitet, Matematiktorvet, Bygning 303,
2800 Kgs. Lyngby.
E-mail: V.L.Hansen@mat.dtu.dk

Homo sapiens - det tænkende menneske - har til alle tider været optaget af spørgsmålene om universets opståen og udvikling og om livets begyndelse og afslutning. Har universet altid eksisteret? Og vil det eksistere til evig tid? Er der et evigt liv efter døden? Er universet begrænset eller udstrækker det sig i det uendelige? Findes der et udeleligt materielt element? Eller kan vi fortsætte med at dele i det uendelige?

Evigt og uendeligt er begge udtryk for det samme, nemlig at der ikke er grænser. Mens evigt udelukkende benyttes i forbindelse med tidslig udstrækning, kan uendelig benyttes i forbindelse med alle former for størrelser og udstrækning. Hvad uendelig er - eller skal være - er et dybtliggende filosofisk problem, som har optaget de største tænkere i menneskehedens historie. Som et filosofisk problem og et teologisk problem er begrebet uendelig stadig genstand for diskussion: Hvordan skal man forstå noget, man aldrig når? Hvad er det evige liv?

I matematikken ligger spørgsmål om uendelighed bag mange begreber og metoder, men først i slutningen af 1800-tallet fik man hold på det matematiske uendelighedssbegreb. I kølvandet fulgte en dybtgående analyse af hele matematikkens grundlag som blandt andet førte til en erkendelse af, at matematikken i sin helhed ikke kan organiseres som et fuldstændigt aksiomatisk opbygget system, hvor alle matematiske spørgsmål har et entydigt svar.

I denne artikel tager vi udgangspunkt i uendelighedsbegrebet som det opstod i den græske filosofi og trækker nogle hovedlinier frem til uendelighedsbegrebets matematiske afklaring. En yderligere udbygning kan findes i forfatterens bog “Matematikkens Uendelige Univers”, udgivet af Den Private Ingeniørfond, Danmarks Tekniske Universitet, i 2002.

Om uendelighed i filosofien

For at kunne værdsætte dybden i de filosofiske paradokser knyttet til uendelighed, som tidligt opstod i den græske filosofi, er det nødvendigt med en kort omtale af nogle centrale filosofiske spørgsmål vedrørende begrebet *eksistens*.

Den græske filosof Parmenides (ca. 525 - 450 f.Kr.) gennemførte en analyse af begrebet at *eksistere* og opdelte med henblik på dette verden i det *værende* og det *ikke-værende*. Han argumenterede for, at det værende er evigt og uforanderligt, for enhver ændring af det værende må ske fra eller til det ikke-værende, hvilket er umuligt, da det ikke-værende jo ikke er. Derfor må det værende altid have været og vil være her for evigt. Og det må også være uforanderligt. Da dette er i modstrid med hvad vi observerer med vores sanser, nåede Parmenides frem til, at sanseverdenen faktisk er en illusion. Derved kom han i modstrid med mange af tidens filosoffer.

Parmenides blev dygtigt forsvaret af sin elev Zenon fra Elea, som argumenterede for, at bevægelse er umulig ved en række argumenter, der nu kendes som Zenons paradokser. Et af Zenons argumenter for at bevægelse er umulig er, at hvis man skal bevæge sig fra ét punkt til et andet, skal man først bevæge sig halvvejen, og før det en fjerdedel af vejen, og før det en ottendedel af vejen etc., altså en uendelig proces, så man aldrig kommer igang.

Det bedst kendte af Zenons argumenter for at bevægelse er umulig kendes som

Paradokset om Achilleus og skildpadden: Helten Archilleus skal løbe om kap med en skildpadde. Da Archilleus er antikkens hurtigste løber får skildpadden et forspring. Men hvad sker? Achilleus vil aldrig indhente skildpadden, for når Achilleus når derhen, hvor skildpadden startede, har den jo bevæget sig et stykke længere fremad, og når Archilleus når derhen, så har skildpadden igen bevæget sig fremad, hvorved vi kommer ind i en uendelig proces, som ingen ende vil tage.

Platon (427 - 347 f.Kr.) drog den fulde konsekvens af Parmenides opfattelse af sanseverdenen og opfattede denne som et ufuldstændigt spejlbillede af den virkelige verden, der for Platon var *ideernes verden*, en matematisk opbygget verden man kunne ræsonnere sig til ved rationelle argumenter.

Den store filosof Aristoteles (384 - 322 f.Kr.), som var den mest indflydelsesrige af Platons elever, forkastede forestillingen om ideernes verden, men opretholdt en skelnen mellem konkrete og abstrakte aspekter i sanseverdenen. Således består en konkret geometrisk figur af materie og form, og det er formen der beskriver figurens abstrakte aspekter og som kan henføres til matematikken.

Blandt andet Zenons paradokser, som strider mod erfaringerne fra sanseverden, gjorde at de græske filosoffer forbandt det endelige med det gode og det uendelige med det onde. Herunder opstod diskussion om "uendelig"er noget *potentielt* (en mulighed) eller noget *aktuelt* (noget der indtræffer, og har sin egen eksistens). Det er potentielt muligt at universet altid vil eksistere, altså at det bliver uendeligt gammelt, men det *er* ikke uendeligt gammelt på noget tidspunkt. Aristoteles var den første som skelnede mellem uendelig som noget potentielt og noget aktuelt. Aristoteles anså selv uendelig som noget der udelukkende var potentielt: noget hvor man kan blive ved ubegrænset. Som med de naturlige tal: 1, 2, 3,...., hvor der efter hvert tal kommer et nyt, men hvor ingen af tallene selv er uendelig.

Om regning med uendelige summer.
Zenons paradokser

Fra et matematisk synspunkt er det heldigvis muligt, at en uendelig sum i veldefinerede situationer kan tillægges en endelig værdi. Betragt fx en stang, lad os sige med længden 1 meter. Denne stang deler vi nu på midten, så vi har to stykker hver af længde ½ meter. Det ene stykke deler vi igen på midten, så vi får to stykker af længde ¼ meter. Så deler vi igen det ene af disse stykker i to lige store dele, og så fremdeles. Derved ser vi, at vores meterstok er blevet delt op i stykker svarende til en formel sum

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots.$$

En sådan formel sum kaldes en *uendelig række*, og $\frac{1}{2^n}$ kaldes det ^{n}*te led* i rækken.

Den her betragtede uendelige række skrives også på formen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\ldots+\frac{1}{2^n}+\ldots,$$

idet vi benytter sumtegnet $\sum$ og det matematiske symbol ∞ for uendelig. Symbolet ∞ for uendelig blev første gang brugt i 1655 af den engelske matematiker John Wallis. Rækken er en såkaldt

kvotientrække med kvotient $\frac{1}{2}$, idet hvert led i rækken netop er halvdelen af det foregående led. Af nærliggende grunde tillægger vi den omtalte kvotientrække summen 1.

Matematisk afklaring af Zenons paradokser

Det er netop denne kvotientrække, som fra et matematisk synspunkt afklarer det første af Zenons paradokser. Bevægelse *er* mulig, for i den proces som Zenon foreskriver, summerer skridtene sammen til en endelig længde, hvorved der bliver lagt begrænsninger på den tid, der er til rådighed for bevægelse.

Rækken afklarer også paradokset om Archilleus og skildpadden, hvis vi antager, at Archilleus løber dobbelt så hurtigt som skildpadden.

Den harmoniske række

En anden interessant uendelig række er den såkaldte *harmoniske række:*

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n}+\ldots$$

Denne række er *divergent*: den har ikke endelig sum. Herved forstås, at det *N*te afsnit i rækken, dvs. den endelige sum

$$S_N=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{N}$$

vokser ud over alle grænser, når tallet N vokser ubegrænset. Bemærk med henblik på at vise dette, at *udsnittet* i rækken fra $\frac{1}{k+1}$ til $\frac{1}{2k}$ for ethvert k indeholder k tal, der alle er større end $\frac{1}{2k}$, hvoraf straks følger, at

$$\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\ldots+\frac{1}{2k}\geq\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k}+\ldots+\frac{1}{2k}=\frac{1}{2}.$$

Herefter er det ikke svært at dele den harmoniske række ind i uendeligt mange udsnit, der alle er større end $\frac{1}{2}$, og derved indse, at afsnittene i rækken vokser ud over alle grænser, når der medtages flere og flere led.

Den alternerende harmoniske række

Den *alternerende* harmoniske række

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\ldots,$$

byder på store overraskelser. Den kan nemlig *omordnes*, dvs. leddene kan ombyttes, så den bliver konvergent med en vilkårlig på forhånd forlangt sum. Dette resultat blev bevist af den tyske matematiker Dirichlet i 1837 og er gyldigt for de såkaldte *betinget konvergente uendelige rækker*. Resultatet følger ved at udnytte at *positiv rækken*, dvs. rækken af led med positivt fortegn, vokser ud over alle grænser, og at *negativ rækken*, dvs. rækken af led med negativt fortegn, aftager ud over alle grænser, når vi medtager flere og flere led i afsnittene for de to rækker. Hvis man nu vil opnå summen S i en omordning af den alternerende harmoniske række, tager man først så mange af postiv rækkens led at man lige kommer over S. Derefter så mange af negativ rækkens led at man lige kommer under S. Så fortsætter man med led fra positiv rækken, fra der hvor man slap tidligere, til man igen lige kommer over S. Derefter med led fra negativ rækken til man igen lige kommer under S og så fremdeles. Da $\frac{1}{n}$ går mod 0, når n vokser ud over alle grænser, vil den netop beskrevne række være konvergent med sum S.

Den alternerende harmoniske række er den matematiske ide bag den episode i bogen "Alice i Eventyrland", skrevet i 1865 af den engelske matematiker Charles Lutwidge Dodgson under pseudonymet Lewis Carroll, hvor Alice af kålormen lærer om en paddehat med den forunderlige egenskab, at man bliver større når man spiser af den ene side, og mindre når man spiser af den anden, hvorved man kan opnå lige netop den størrelse man ønsker ved på skift at spise tilpasse mængder af de to sider af paddehatten. Det fortælles, at den engelske dronning Victoria blev så begejstret ved læsning af eventyrene om Alice, at hun bad om at få forfatterens samlede produktion tilsendt. Hendes overraskelse var sikkert stor, da den mest bestod af matematiske afhandlinger. Det kan man kalde popularisering af matematik på højt niveau!

For god ordens skyld skal nævnes at summen af den alternerende harmoniske række som opskrevet er den naturlige logaritme til 2.

Uendelige rækker versus endelige summer

Uendelige rækker voldte i begyndelsen kvaler selv for store matematikere. Man kunne ikke få hold om problemerne, idet man blot regnede med uendelige rækker som var det endelige summer. Hvad dette førte til kan ses i forbindelse med den uendelige række

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+1-1+1... \ ,$$

Sætter man parenteser i rækken på følgende måde

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = (1-1)+(1-1)+(1-1)+1... \ ,$$

er det nærliggende at påstå, at rækken har summen 0.

Sætter vi derimod parenteser på følgende måde

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-(1-1)-(1-1)-(1-1)-...,$$

kan man imidlertid lige så vel sige, at rækken har summen 1.

Den berømte matematiker Leonhard Euler (1707-1783) argumenterede omkring 1730 for at rækken

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} = 1-1+1-1+1-1+1...$$

har summen $S=\dfrac{1}{2}$, idet man ved regning som var det endelige summer finder, at $S=1-S$.

Først med præciseringen af *konvergens* og *divergens* af uendelige rækker fik man klarhed over sådanne modstridende forhold. Den betragtede række er divergent, og kan altså ikke tilskrives nogen sum.

Om konvergens og divergens af generelle uendelige rækker

En generel uendelig række har formen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots \ ,$$

hvor a_n er reelle tal.

Rækken siges at være *konvergent* med summen *S*, hvis det *N*te afsnit i rækken

$$S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$$

har grænseværdien *S*, når *N* går imod ∞. Udtrykket "*N* går imod ∞" er den måde hvorpå man i vore dage normalt udtrykker, at "*N* vokser ud over alle grænser". Hvis der ikke findes en grænseværdi, siges rækken at være *divergent*.

Det *n*te led a_n i rækken er differencen mellem to på hinanden følgende afsnit, nemlig $a_n = S_n - S_{n-1}$.

Heraf følger straks, at hvis en række er konvergent med sum *S*, da vil det *n*te led i rækken gå imod $S - S = 0$ for *n* gående imod ∞. Det er med andre ord en nødvendig betingelse for konvergens af en række, at det *n*te led i rækken går imod *0* for *n* gående imod ∞. At betingelsen ikke er tilstrækkelig ses blandt andet i tilfældet med den harmoniske række.

Begreberne konvergens og divergens af uendelige rækker blev præciseret på ovenstående form af den franske matematiker Augustin-Louis Cauchy (1789-1857) i hans berømte forelæsninger *Cours d'analyse* ved College de France i Paris i 1820'erne, og er nu de generelt accepterede.

Tallene fra et geometrisk synspunkt

Tallenes historie hænger nøje sammen med den historiske udvikling af det matematiske uendelighedsbegreb, som kulminerede i slutningen af 1800-tallet i arbejder af den tyske matematiker Georg Cantor (1845-1918). En fuldstændig konstruktion af de reelle tal er ikke mulig i en kort fremstilling, men da tallene spiller en afgørende rolle i det følgende, giver vi her en geometrisk anskuelig beskrivelse af de reelle tal ved at identificere disse med punkterne på en fastholdt orienteret akse, dvs. en linje med en fastlagt gennemløbsretning.

Med start i et vilkåligt valgt *origo* på den orienterede akse (et punkt som derefter fastholdes) deler vi den indledningsvist i lige lange stykker ved at afskridte aksen i begge retninger med en fast længdeenhed. Så kan vi afsætte de *hele tal* ..., -2, -1, 0, 1, 2, ... langs delepunkterne, idet vi vælger origo som 0 og afsætter de positive tal i gennemløbsretningen og de negative tal i modsat retning ud fra 0.

Hvis vi inddeler hvert af de lige lange intervaller på den orienterede akse, der afmærkes af de hele tal, i *q* lige lange delintervaller, får vi en række delepunkter langs hvilke vi kan afsætte alle *brøker* med *nævner* q og et vilkårligt helt tal *p* som *tæller*, altså tallene $\frac{p}{q}$. Ved at lade *q* gennemløbe alle de naturlige tal får vi dermed afsat alle brøker, også kaldet de *rationale tal*, langs den orienterede akse.

Vi opdager nu, at vi slet ikke har fået fyldt aksen ud; den er "gennemhullet". Eksempelvis irriterede det de gamle grækere grænseløst, at diagonalen og kantlængden i et kvadrat er *inkommensurable* størrelser, dvs. de kan ikke begge deles i et helt antal af en fælles måleenhed, eller med andre ord, at forholdet ikke kan udtrykkes ved et rationalt tal.

Vi indfører nu de *reelle tal* som de størrelser, der repræsenteres af længderne af intervaller med det ene endepunkt i 0 og det andet endepunkt i et vilkårligt punkt på den givne orienterede akse; størrelserne regnes med fortegn svarende til aksens gennemløbsretning. De reelle tal bliver således identificeret med punkterne på den orienterede akse, der i overensstemmelse hemed omtales som en *talakse*. Afsætter vi eksempelvis diagonalen i enhedskvadratet ud fra 0 på ovenstående måde når vi til tallet $\sqrt{2}$. De reelle tal som ikke kan repræsenteres af rationale størrelser, eksempelvis $\sqrt{2}$, kaldes *irrationale tal*.

Det tog meget lang tid for matematikerne at få karakteriseret de reelle tal fuldstændigt. Først i slutningen af 1800-tallet lykkedes det, uafhængigt af hinanden og næsten samtidigt, for Karl Weierstrass, Charles Méray, Georg Cantor og Richard Dedekind, at give rent aritmetriske konstruktioner af de reelle tal. Det skal nævnes, at det voldte store vanskeligheder at få sat de aritmetriske konstruktioner af tallene i forbindelse med punkterne på en talakse.

Vi skal her omtale en karakterisering af de reelle tal, som kommer tæt på Weierstrass' konstruktion. Det drejer sig om det såkaldte *intervalruseprincip* i følge hvilket de reelle tal kan anskues som "grænsepunkter" for indsnævrende følger af lukkede intervaller med rationale endepunkter.

De reelle tal udmærker sig i forhold til de rationale tal ved at følgende princip er opfyldt.

Intervalruseprincippet: Enhver indsnævrende følge af lukkede intervaller
$[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots \supseteq [a_n, b_n] \supseteq \cdots$,

hvor længden af intervallet $[a_n, b_n]$ går mod 0 for voksende *n*, har netop ét reelt tal som fælles punkt.

Ved bisektion (halvering) kan vi eksempelvis konstruere en intervalruse for $\sqrt{2}$ som følger:

$$[1,2] \supseteq \left[1, \frac{3}{2}\right] \supseteq \left[\frac{5}{4}, \frac{3}{2}\right] \supseteq \left[\frac{11}{8}, \frac{3}{2}\right] \supseteq \cdots \supseteq \left\{\sqrt{2}\right\}$$

Bemærk, at vi ved den geometriske model af de reelle tal i form af en talakse ubemærket har bevæget os ind i uendeligheden: ethvert linjestykke kan deles i det uendelige i vilkårligt små stykker. Der er således ikke længere "huller" i en talakse; den udgør et *kontinuum*, dvs. et sammenhængende hele.

Tal på uendeligheden

Først i slutningen af 1800-tallet, fra ca. 1870 og fremefter, begyndte matematikere at se på uendelig som noget i sig selv. Det var Cantor, der som den første så på talrækken {1, 2, 3, ...} i sin fuldstændighed og opfattede det som et nyt tal, et såkaldt *transfinit* tal; det første transfinite *kardinaltal*, betegnet $\aleph_0$. (Tegnet $\aleph$ er et gammelt fønikisk tegn, der læses "alef".) Dette hænger nøje sammen med mængdelærens opståen, hvor Cantor ved sine kardinaltal satte størrelse på mægtigheden af en mængde. En mængde, hvis elementer kan parres med den naturlige talrække, altså få sat numre på ryggen, siges at være *tællelig*, eller *numerabel*, og at have mægtigheden (kardinalitet) $\aleph_0$.

Generelt siges to mængder *A* og *B* at have *samme kardinalitet*, eller at bestemme *samme kardinaltal*, hvis der kan etableres en bijektiv korrespondance imellem elementerne i de to mængder, dvs. en korrespondance som til ethvert element i den ene mængde *A* lader svare netop et element i den anden mængde *B* og omvendt. Alle mængder hvor elementerne kan parres med mængden af fingre på et par hænder har kardinaltallet 10. Kan der etableres en bijektiv korrespondance imellem punkterne i en mængde og tallene i den naturlige talrække, har denne mængde som nævnt kardinaltallet $\aleph_0$. Generelt fastlægger en vilkårlig mængde *A* et kardinaltal; ofte betegnet med $|A|$. Hvis mængden *A* indeholder endeligt mange elementer, er kardinaltallet $|A|$ et sædvanligt naturligt tal. I modsat fald fastlægger $|A|$ et *transfinit* kardinaltal.

Tællelighed af de rationale tal

De rationale tal kan stilles op i en rækkefølge. De rationale tal kan altså *tælles*, eller som matematikere siger, de er *numerable*.

For at bevise dette, betragter vi heltalsgitteret i en plan med et sædvanligt retvinklet koordinatsystem, og laver en spiral i heltalsgitteret med start i (0,0), der gennemløber alle punkter med heltallige koordinater i en polygonal vej imod uret: (0,0), (1,0), (1,1), (0,1), (-1,1), (-1,0), (-1,-1), ... Træk dernæst spiralen ud i en lang “snor”. På denne snor ligger alle par af hele tal som punkter. Tager vi - når det kan lade sig gøre, dvs. når vi ikke dividerer med 0 - anden koordinaten som nævner og første koordinaten som tæller, får vi en brøk (et rationalt tal). Nu starter vi forfra på “snoren”: (0,0) dur ikke, (1,0) dur ikke, (1,1) dur og giver brøken 1, (0,1) dur og giver brøken 0, (-1,1) dur og giver -1, (-1,0) dur ikke, (-1,-1) giver 1, som vi har haft, så den springer vi over, ... Fortsættes på denne måde langs “snoren”, ser vi, at de rationale tal ligger som perler på en snor i en rækkefølge. I systemet antydet her bliver rækkefølgen: 1, 0, -1, -2, 2, $\frac{1}{2}$, -$\frac{1}{2}$, ...

De rationale tal kan altså tælles.

De reelle tal kan ikke tælles

Vi fører et indirekte bevis. Antag med henblik på at opnå en modstrid, at $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$ er samtlige reelle tal stillet op i en rækkefølge.

Vælg et interval $[a_1, b_1]$ på talaksen, som ikke indeholder tallet r_1. Tredel intervallet $[a_1, b_1]$ i tre lige lange delintervaller. Mindst ét af disse delintervaller, kald det $[a_2, b_2]$, indeholder ikke tallet r_2 .Tredel nu $[a_2, b_2]$ på samme måde og vælg et delinterval $[a_3, b_3]$, som ikke indeholder tallet r_3. Således fortsættes, og vi får frembragt en intervalruse $[a_1, b_1] \supseteq [a_2, b_2] \supseteq \cdots [a_n, b_n] \supseteq \cdots$, hvor tallet r_n ikke ligger i intervallet $[a_n, b_n]$ og de efterfølgende intervaller.

Intervalrusen bestemmer netop ét reelt tal *c*, som per konstruktion er forskellig fra tallene $r_1, r_2, \cdots, r_n, \cdots$. Dermed har vi opnået en modstrid med, at $r_1, r_2 . \cdots, r_n, \cdots$ skulle være samtlige reelle tal. Altså kan de reelle tal ikke tælles, hvilket skulle bevises.

Cantors diagonalmetode

Cantor viste i 1874 som den første, at de reelle tal ikke er numerabel. Han så på de reelle tal imellem 0 og 1 og repræsenterede dem som decimaltal. Hvis disse decimaltal kunne tælles - altså stilles op i en rækkefølge - kunne han konstruere et nyt tal, som ikke er med i denne følge, ved blot at sørge for at det første ciffer er forskelligt fra det første ciffer i det første tal i følgen, det andet ciffer forskelligt fra det andet ciffer i det andet tal i følgen, etc. Deraf følger, at de reelle tal ikke kan tælles. Denne bevismetode kendes nu som *Cantors diagonalmetode*.

Kontinuums Hypotesen

Samlingen af reelle tal kan identificeres med punkterne på en talakse, og man siger derfor også, at de reelle tal har kontinuums mægtighed (kardinalitet). Et berømt matematisk problem knytter sig hertil, nemlig den såkaldte Kontinuums Hypotese: Findes der mængder med kardinalitet imellem $\aleph_0$ (tællelig) og kontinuums kardinalitet? Eller er kontinuums kardinalitet simpelthen det næste kardinaltal $\aleph_1$? Med arbejder af den østrigske matematiker Kurt Gödel (1906-1978) i 1931 og den amerikanske matematiker Paul Cohen (f. 1934) i 1963 ved man nu, at begge muligheder er konsistente med de øvrige almindeligt anerkendte mængdeteoretiske aksiomer i den tyske matematiker Ernst Zermelos (1871-1953) aksiomssystem fra 1908 med forbedringer af den tyske matematiker Abraham A. Fraenkel (1891-1965) omkring 1920, og nu kendt som Zermelo-Fraenkel systemet. Kontinuums Hypotesen kan altså hverken bevises eller modbevises inden for Zermelo-Fraenkels aksiomssystem for mængdelæren. Det kan ikke udelukkes, at man senere vil finde et bedre aksiomssystem for mængdelæren til erstatning for Zermelo-Fraenkel systemet, hvori Kontinuum Hypotesen får et entydigt svar.

Om regning med uendeligheden

Det var Cantor som i 1870'erne første gang præcist definerede hvad det vil sige, at en mængde er uendelig. En mængde A er *uendelig*, hvis den kan bringes i bijektiv korrespondance med en ægte delmængde B af sig selv, altså hvis alle elementerne i A kan parres med elementerne i en ægte delmængde B af A.

En række overraskende konsekvenser af uendeligheden er på glimrende vis blevet illustreret af den tyske matematiker David Hilbert (1862-1943), som har lagt navn til et matematisk hotel: Hilberts hotel. I Hilberts hotel har man uendeligt mange værelser, alle numrene i den naturlige talrække er i sving som værelsesnumre. En aften er alt optaget på Hilberts hotel. En rejsende kommer og spørger om han kan få et værelse. Ja, siger portien. Men alt er jo optaget, så hvordan klarer portien nu den? Han flytter bare alle gæsterne et nummer op, så er værelse nummer 1 klar til den nye gæst. Så i Hilberts hotel er der altid plads til en til.

Dette forklarer (beviser), at $\aleph_0 + 1 = \aleph_0$
og ved simpel induktion, at $\aleph_0 + n = \aleph_0$
for et vilkårligt naturligt tal n.

Men der er plads til mange flere i Hilberts hotel, for denne fremgangsmåde kan udvides, som vi nu skal se. Hilberts hotel er bare et af hotellerne i en hel kæde af sådanne hoteller. En aften er alle hotellerne fyldt. Nu indtræffer katastrofen: et af hotellerne brænder ned til grunden, men heldigvis bliver alle gæsterne reddet. Hvordan klarer hotelkæden af Hilbert hoteller nu dette? Man kører gæsterne hen til et andet Hilbert hotel. Der flytter man alle gæsterne i dette hotel over på de lige numre (man skal altså bare gange sit værelsesnummer med to for at få sit nye værelsesnummer), og så er alle de ulige numre ledige til gæsterne fra det nedbrændte hotel.

Dette forklarer (beviser) det overraskende fænomen, at $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$

For to mængder *A* og *B* med endeligt mange elementer er summen af de tilhørende kardinaltal |*A*| og |*B*| netop antallet af elementer i foreningsmængden af mængderne *A* og *B*, når disse opfattes som disjunkte mængder, altså som værende uden fælles elementer; denne såkaldte *disjunkte* foreningsmængde skrives $A \cup B$. Tilsvarende er produktet af de endelige kardinaltal |*A*| og |*B*| netop antallet af elementer I produktmængden $A \times B = \{(a,b) \mid a \in A, b \in B\}$.

Inspireret heraf defineres *summen* og *produktet* af to kardinaltal |*A*| og |*B*| for generelle mængder *A* og *B* som kardinaltallet for $A \cup B$, henholdsvis $A \times B$. På symbolsk form svarer disse definitioner til formlerne

$$|A| + |B| = |A \cup B| \qquad |A| \cdot |B| = |A \times B|$$

Det ses umiddelbart, at det oven for anførte argument for at $\aleph_0 + \aleph_0 = \aleph_0$ under udnyttelse af Hilberts hotel, er i overensstemmelse med definitionen for summen af to kardinaltal.

Nu beregner vi produktet $\aleph_0 \cdot \aleph_0$. Ved et argument svarende til argumentet for tællelighed af de rationale tal, er det let at se, at produktmængden for den naturlige talrække med sig selv, altså mængden af talpar af naturlige tal, er tællelig. Dette viser, at $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$

Ovenstående er eksempler på en generelt udviklet teori for regning med de af Cantor indførte kardinaltal.

Omgåelse af uendelighed i matematikken

Antikkens græske matematikere, og mange andre matematikere siden da, forsøgte at omgå problemer, som involverer uendelige processer og konstruktioner.

Eksempelvis finder man i forbindelse med tallene her en af grundene til at pythagoræerne (500-tallet f.Kr.) holdt sig til rationale tal og ikke var glade for de irrationale tal, som fx længden af diagonalen i et kvadrat med kantlængde $1: \sqrt{2}$. For en tilnærmelse af et irrationalt tal med rationale tal involverer en uendelig proces.

Også i geometrien søger man at undgå uendeligheden. I Euklids Elementer fra ca. 300 f.Kr. gives en systematisk fremstilling af geometrien på basis af en række definitioner og fem postulater. Allerede i definitionen af en ret linje undgår Euklid uendeligheden, idet en ret linje i Elementerne er det vi i dag forstår ved et linjestykke. Hvor vi i dag siger, at en ret linje har uendelig længde, formuleres det i Postulat 2 hos Euklid, at linjer kan fortsættes ubegrænset ud i et; altså at linjestykker kan forlænges vilkårligt, uden dog at blive uendeligt lange. Også ved formuleringen af Postulat 5 (det berømte parallelpostulatet) vælger Euklid en formulering, der undgår uendeligt lange linjer.

En overraskende grænseovergang

Grænseovergange er nært forbudet med uendelighed. Vi skal derfor afslutningsvist se på et overraskende fænomen i forbindelse med en grænseovergang i et geometrisk problem. Betragt den ligesidede trekant i planen over linjestykket [0,1] på første aksen. Alle sider har altså længde 1 og trekantens højde er $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Specielt bemærker vi, at summen af de to lige lange ben over [0,1] er 2. Del nu hver af disse lige lange ben på midten og forbind midtpunkterne med midtpunktet af [0,1]. Derved fås en figur med to ligebenede trekanter over [0,1] af højde $\frac{\sqrt{3}}{4}$, hvor summen af de to par af lige lange ben igen er 2. Del nu på tilsvarende måde hver af de netop konstruerede ligebenede trekanter i to ligebende trekanter af højde $\frac{\sqrt{3}}{8}$, så der nu er fire ligebenede trekanter over [0,1] af $\frac{\sqrt{3}}{8}$, hvor summen af de fire par af lige lange ben igen er 2. Således fortsættes, og i det *n*te skridt fås 2^n ligebenede trekanter over [0,1] af højde $\frac{\sqrt{3}}{2^n}$, hvor summen af de 2^n par af lige lange ben er 2. Og hvad er der så mærkeligt ved dette? Det mærkelige er, at den polygonale kurve, som de lige lange ben i de 2^n trekanter fastlægger, kommer nærmere og nærmere til linjestykket [0,1], der har længden 1. Ved grænseovergangen falder længden af den polygonale kurve således fra 2 til 1. Forklaringen er, at længden af en kurve ikke afhænger kontinuert af kurven alene, man skal også have kontrol over tangenten til kurven, og det har man ikke for de "savtakkede" polygonale kurver, der indgår i ovenstående konstruktion.

Afsluttende bemærkninger

Ved den anden internationale kongres for matematikere i Paris i 1900 formulerede David Hilbert treogtyve vigtige matematiske problemer, som stod uløste ved indgangen til det 20. århundrede. Som det første af disse problemer stillede han spørgsmålet vedrørende Kontinuums Hypotesen. Med arbejderne af Kurt Gödel 1931 og Paul Cohen 1963 blev det afklaret, at Kontinuums Hypotesen hverken kan bevises eller modbevises inden for Zermelo-Fraenkels aksiomssystem for mængdelæren. I forbindelse med sit arbejde beviste Gödel den berømte sætning, der nu er kendt som *Gödels Ufuldstændighedssætning*. Denne skelsættende sætning siger, at ethvert aksiomatisk opbygget matematisk system, der indeholder en (alment accepteret) aksiomatisering af de naturlige tal opstillet af Giuseppe Peano (1858-1932) kort før 1900, vil indeholde udsagn fra mængdelæren, der hverken kan bevises eller modbevises; det er med andre ord umuligt at bevise, at Zermelo-Frankels system for mængdelæren er fuldstændigt inden for et sådant aksiomatisk system. Derved blev den drøm som Hilbert havde haft om at finde et fuldstændigt aksiomatisk grundlag for hele matematikken - den såkaldte *formalistiske* anskuelse af matematikken - kastet i grus. Hvorvidt dette er tilfredsstillende set fra et matematisk synspunkt er et åbent spørgsmål. Men sikkert er det, at spørgsmål om uendeligheden fortsat vil være i forgrunden ved de undersøgelser af matematikkens grundlag som også vil finde sted i dette århundrede.

Litteratur

Emnerne i ovenstående artikel er hentet fra bogen

V.L. Hansen, "Matematikkens Uendelige Univers", Den Private Ingeniørfond, Danmarks Tekniske Universitet, 2002.

Her kan man finde yderligere detaljer og litteraturhenvisninger.

Blandt de henvisninger i bogen, som er særligt relevante for nærværende artiklel, skal fremhæves:

R. Courant and H. Robbins: "What is Mathematics", Oxford University Press, New York, 1941.

P.J. Davis and R. Hersh: "The Mathematical Experience", Houghton Mifflin Company, Birkhäauser Boston, 1981.

V.L. Hansen: "Den geometriske dimension", Nyt Nordisk Forlag, 1989. [Engelsk udgave: "Geometry in Nature", A.K. Peters Ltd., Wellesley, MA 1993.]

V.L. Hansen: "Temaer fra Geometrien", Matematiklærerforeningen, 1992. [Udvidet engelsk udgave: "Shadows of the Circle", World Scientific, Singapore, 1998.]

J. Jørgensen: "Filosofiske Forelæsninger", Anden, omarbejdede Udgave, Munksgaards Forlag, København, 1935.

M. Kline: "Mathematical Thought from Ancient to Modern Times", Oxford University Press, 1972.

R. Laubenbacher and D. Pengelley: "Mathematical Expeditions - Chronicles by the Explorers", Springer-Verlag New York, Inc., 1999.

F. Topsøe: Jessens Balsal, Hilberts Hotel - en appetitvækker, i "Matematiske Ideer" (red.: S.T. Jensen og J. Matthiasen), Matematiklærerforeningen, 1993.

Matematik och design

Av Ola Helenius

ola.helenius@ncm.gu.se

Modern industridesign finns nästan överallt omkring oss. Lite förenklat kan man säga att en produkts design är en kombination av dess visuella intryck och dess funktion. Hos bilar, heminredning, elektronikprodukter, ja nästan hos vad du vill, är designen ett viktigt konkurrensargument för producenten. Här skall vi koncentrera oss på den delen av design som handlar om formgivning av en produkts yta. Det visar sig att de som arbetar med denna formgivning använder sig av matematik på flera sätt. Dels är de programvaror som används i stort sett helt och hållet uppbyggda av matematik. Dessutom är några av de allra viktigaste begreppen i designernas språk begrepp som härrör från matematiken.

Att beskriva ytor och kurvor

När en designer formger en produkts yta handlar det om att bestämma formen på de tredimensionella ytor som avgränsar produkten från omgivningen. En boll har t ex en sfär som begränsningsyta. En ishockeypuck har två cirkelskivor och en cylinderyta som begränsningsytor. Dessa två produkter är inte så intressanta ut designperspektiv, kanske, vi kan använda dem för att illustrera ett par fundamentala saker. Pucken illustrerar att de flesta produkter är ihopsatta av flera ytor, som tillsammans skapar produktens yta. Dessa ytor måste sitta ihop, annars blir det ju ”hål” i ytan. På matematikspråk – och designspråk – kallas detta att skarven mellan ytorna är *kontinuerlig*. I fallet med pucken blir det dock en ”vinkel” där de två ytorna möts. Detta kallas att ytorna *inte är tangent*, eller att ytan som bildas av de två delytorna *inte har kontinuerlig derivata*.
De tre ytorna på pucken kan vidare klassificeras i två grupper. De två cirkelskivorna som utgör topp och botten är helt platta. Detta betyder att de har en *krökning* som är noll. Puckens kant som ju är en cylinderyta är mer komplicerad. Den svänger nämligen i ena riktningen (om vi rör oss i en kurva runt pucken) men är plan i andra riktningen (om vi rör oss upp och ned längs ytan). På designspåk kallas detta att ytan är *enkelkrökt*. En enkelkrökt yta kan skapas av ett (plant) papper utan att man töjer på det. Vi kan ju till exempel rulla ett papper till en cylinder. Däremot kan vi ju inte ”rulla ihop” ett papper till en sfär. Detta beror på att en sfär är *dubbelkrökt*. Det betyder att om vi rör oss längs en kurva på en sfär, vilken kurva som helst, så kommer denna kurva att ”svänga”, dvs vara krökt.

Begreppen krökning och kontinuitet är mycket användbara för designers. Inte bara är de centrala då man skapar sina ytor, utan de är också ett medel för att verbalt kunna beskriva vissa egenskaper hos ytor. Inom bilindustrin finns t ex för närvarande ett ganska utbredd trend att bilen sidor blir allt mer ”plana”. Figur 1 visar t ex en några år gammal Ford Ka samt en lite nyare Ford Focus. Man ser tydligt att sidorna på den senare är planare.

Figur 1. Ford Ka till vänster och Ford Focus till höger.

På designspåk är alltså sidan på Ford Focus mindre krökt än den på Ford Ka. Mer specifikt handlar det om att man låter bilarnas sidor få mindre krökning i nederkant, dvs sidan svänger inte in ”under bilen” så mycket. Väldigt många nyare bilar följer denna trend.

Hur krökningen på en yta ändrar sig visar sig också spela stor roll för hur vi människor uppfattar ytan. En yta där krökningen ändrar sig på ett oharmoniskt sätt upplevs i allmänhet inte ”snygg”. Att vi människor är så bra på att uppfatta krökning och hur denna ändrar sig är fascinerande. Kanske beror det på att krökningen påverkar hur ljuset bryts i en yta.

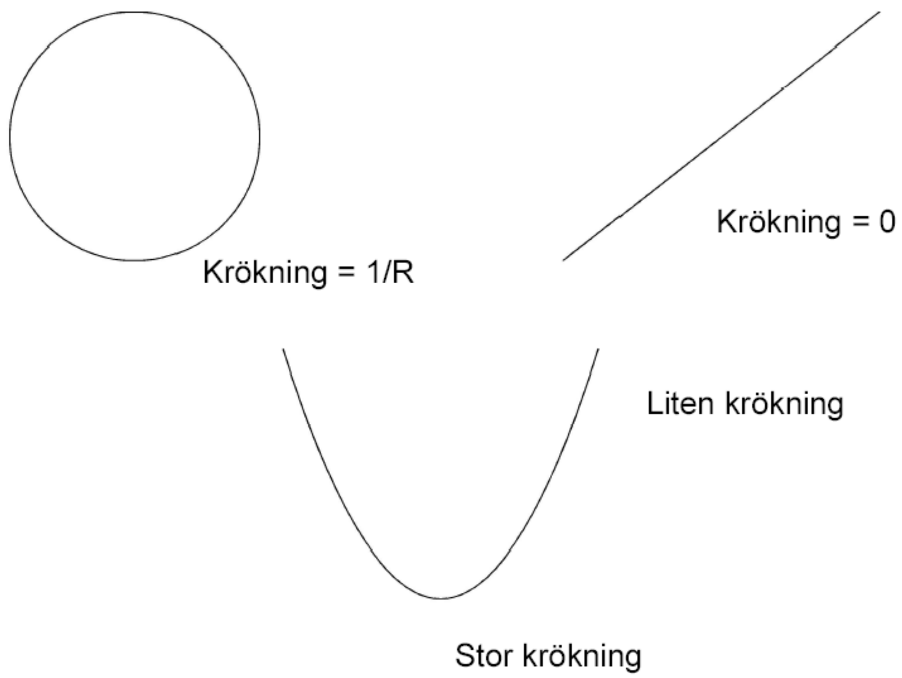
Matematiken

Kontinuitet är ett begrepp som oftast inte tas upp förrän på universitetsnivå. Det betyder inte att det är så komplicerat, i alla fall inte intuitivt. Geometriskt kan man säga att en kurva som är kontinuerlig är en man kan rita utan att lyfta pennan från papperet. Det finns alltså inga ”hopp” i kurvan. De kurvor som används av designprogrammen är alltid kontinuerliga i sig själva. Däremot kan man få problem med kontinuiteten när man skarvar ihop olika kurvor.

Ett annat centralt begrepp är *derivata.* Derivatan i en punkt på en kurva är lutningen på kurvans tangent i denna punkt (om tangenten existerar). En tangent kan sägas vara den räta linje som bäst passar kurvan i den punkt vi är intresserade av. Inom matematiken formaliserar vi denna definition med hjälp av gränsvärden. För våra vanliga elementära funktioner är det enkelt att beräkna derivatan.

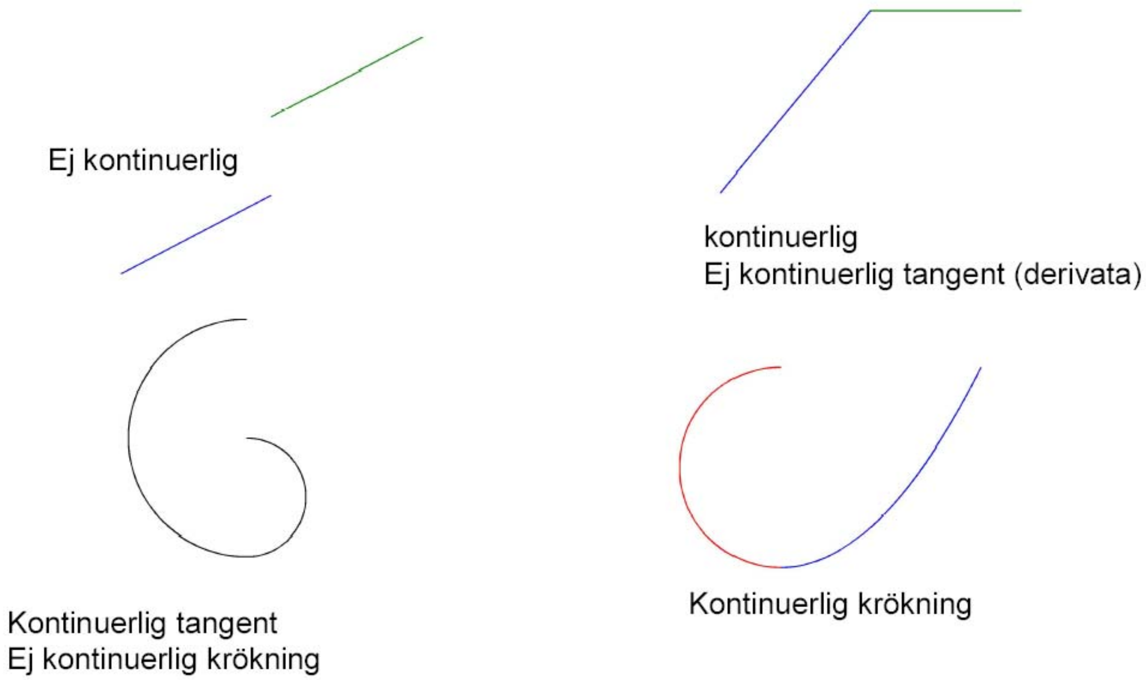
De kurvor som används av de program som industridesigners använder är alltid deriverbara och derivatan ändrar sig på ett kontinuerligt sätt. Precis som när det gäller kontinuitet kan det dock bli problem där man skarvar ihop två kurvor. Även om den resulterande sammansatta kurvan är kontinuerlig i skarven så kan det hända att derivatan inte är kontinuerlig (formellt existerar ofta inte derivatan i en sådan skarvpunkt). Den ”kant” som bildas om man skarvar ytor på det här sättet används ofta av designers för att skapa någon viss visuell effekt. Vi kan t ex se en sådan kant som följer en linje genom sidodörrarnas handtag på Ford Focus i figur 1.

Vi har tidigare berört begreppet krökning. Intuitivt handlar en kurvas krökning om hur mycket den svänger. Matematiskt kan man beräkna krökningen via en formel som innehåller kombinationer av derivatan och andraderivatan av den funktion som bestämmer kurvan. Geometriskt finns en något mer intuitiv beskrivning som också ligger närmare den beskrivning av derivata som vi gav ovan. Krökningen av en kurva i en punkt kan nämligen sägas vara 1/R där R är radien på den cirkel som bäst passar kurvan i punkten. Den här definitionen gör att en kurva som svänger mycket (en liten cirkel, t ex) får stor krökning medan en kurva som svänger lite (en stor cirkel) får liten krökning. Ett specialfall en är rät linje, som ju inte svänger alls. En sådan kurva kan dock sägas vara en cirkel med oändligt stor radie och ett delat på oändligheten kan vi ju tänka oss som noll. Alltså har en rät linje krökning 0, vilket känns intuitivt rätt. Denna definition är lite förenklad eftersom man i verkligheten talar om (tvådimensionella) kurvor också med negativ krökning. I princip handlar detta dock bara om att man t ex definierar krökningen på en kurva som ”svänger uppåt” som positiv och krökningen på en kurva som svänger nedåt som negativ.



Figur 2. Krökningen på en cirkel med radie R är 1/R. En rät linje har krökning 0.

På samma sätt som derivatan (eller tangenten) kan göra ”ett hopp”, dvs vara diskontinuerlig, även om kurvan i sig är kontinuerlig så kan en kurvas (eller ytas) krökning vara diskontinuerlig även om kurvan både är kontinuerlig och har kontinuerlig derivata. Figur 2 visar några kurvor som exemplifierar ovanstående begrepp. Den första kurvan är inte kontinuerlig, den andra är kontinuerlig, men har en kontinuerlig derivata, den tredje har kontinuerlig derivata, men inte kontinuerlig krökning och den sista har kontinuerlig krökning.



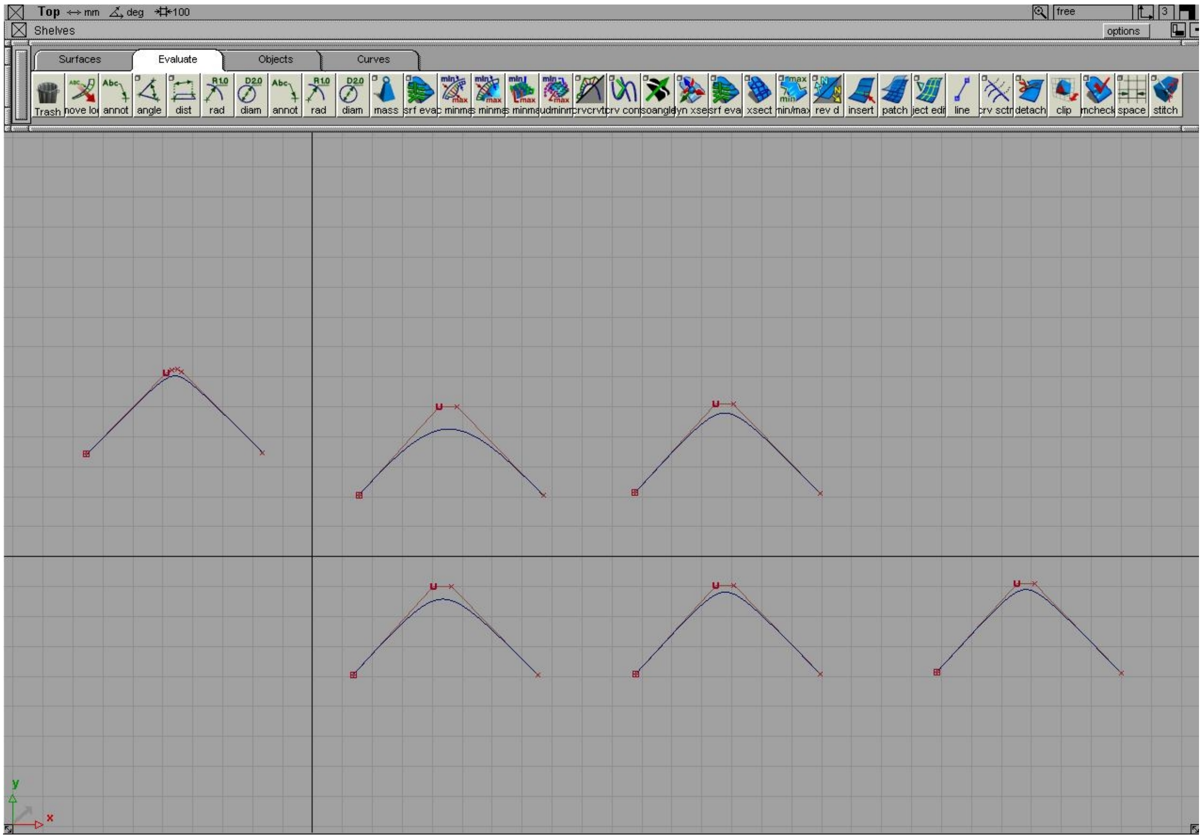
Figur 2. Överst t v en kurva som inte är kontinuerlig. Överst t h en kurva som är kontinuerlig, men inte har kontinuerlig derivata. Nederst t v en kurva med kontinuerlig derivata men inte kontinuerlig krökning. Denna kurva är skapad genom hopskarvning av två cirklar med olika radier och krökningen gör alltså ett hopp i skarven. Nederst t h ser vi en kurva som består av en cirkel skarvad med ett andragradspolynom. Polynomet är valt så krökningen i skarven sammanfaller med cirkelns krökning.

Kanter, dvs kurvor (eller ytor) där derivatan ej är kontinuerlig används som vi skrev ovan ofta för att skapa en viss visuell effekt. Däremot försöker nästan alltid en designer undvika kurvor och ytor med diskontinuiteter i krökningen. Det visar sig att vårt mänskliga öga är väldigt känsligt för sådana förändringar och att ytor med hopp i krökningen upplevs som oharmoniska. Detsamma gäller ytor där krökningen byter riktning (går från att vara konkav till att bli konvex).

Ytor designade i datorn

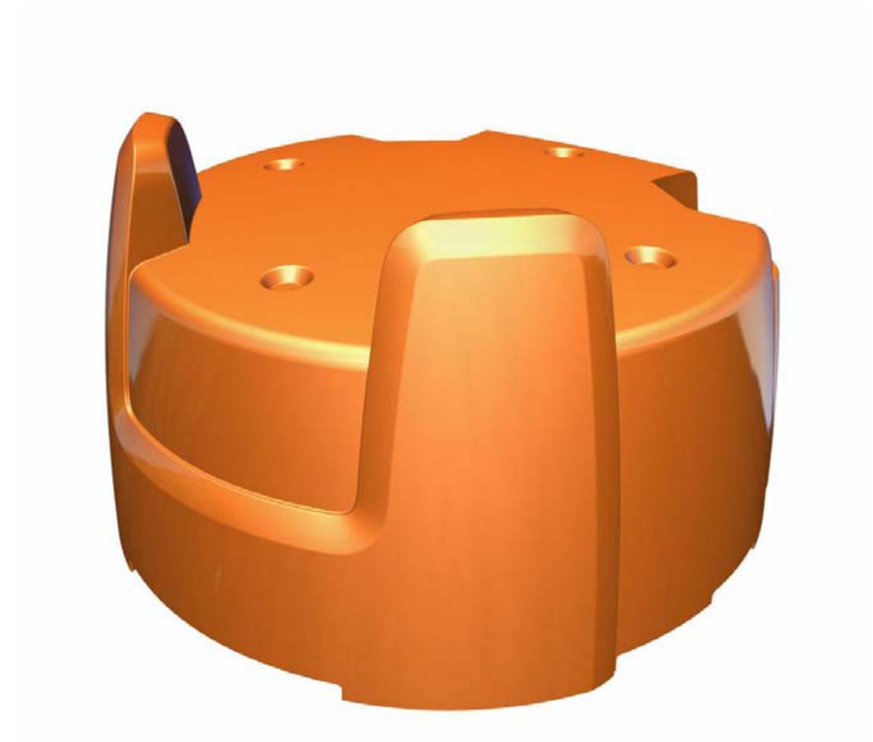
De funktioner som kurvor och ytor byggs upp av i de flesta program som används av industridesigners bygger i princip på polynom av grad 3-7. Lite mer exakt så är det kvoter av polynom och funktionerna i fråga är uppbyggda på ett speciellt sätt så att de skall vara lätta att påverka ”estetiskt”. Dessa kurvor kallas NURBS (Non Uniform Rational Bezier Splines). Till en sådan kurva (eller yta) hör ett antal kontrollpunkter som ligger i anslutning till kurvan.

Väldigt förenklat kan man säga att kurvan strävar efter att dels kröka så harmoniskt som möjligt, men också ligga så nära sina kontrollpunkter som möjligt. Genom att lägga till fler kontrollpunkter eller ändra kontrollpunkternas *vikt* kan man få större inflytande över kurvans form.



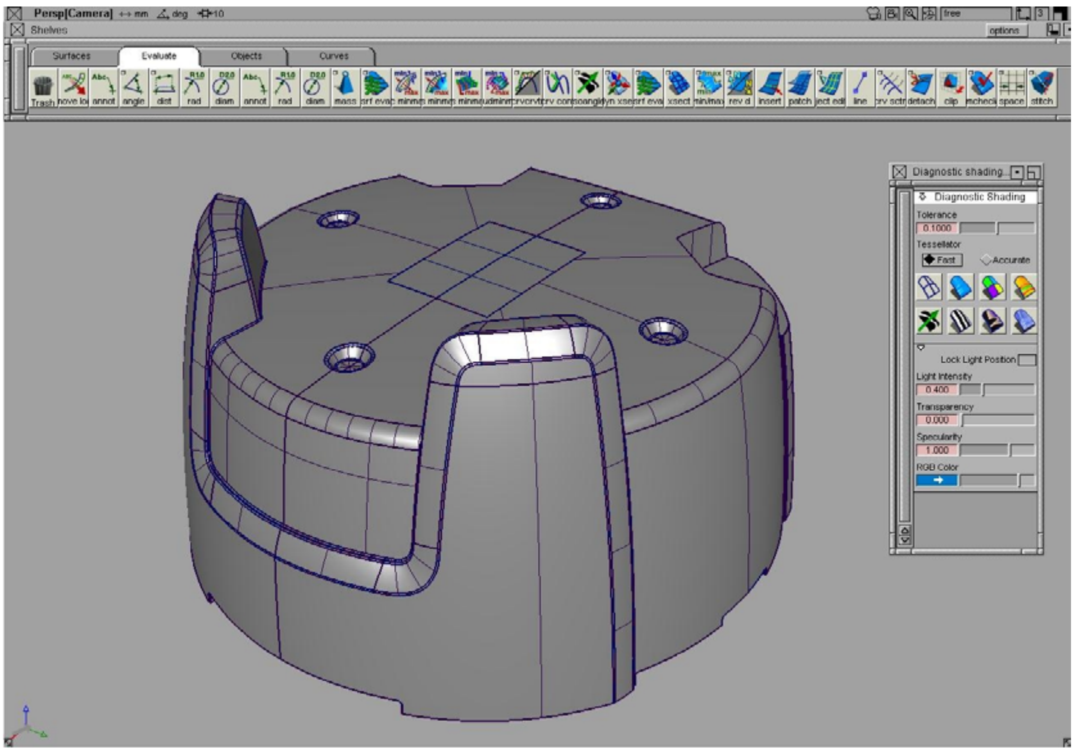
Figur 3. De fem NURBS-kurvorna till höger har alla fyra kontrollpunkter (de röda markeringarna). Genom att ändra de två mittenkontrollpunkternas vikt kan man få kurvan att ligga närmare dessa kontrollpunkter och göra en skarpare böj. En liknande effekt kan vi få genom att stoppa in fler kontrollpunkter, som vi gjort på den vänstra kurvan.

När en designer skapar en produkt yta i datorn så handlar det i praktiken om att skapa en rad NURBS-ytor. Dels gäller det givetvis att produkten skall se bra ut i det stora hela, men det gäller också att lyckas modellera de ytor man vill ha i datorn utan några oönskade oregelbundenheter i krökningen.
I figur 4 ser vi en del till en dammsugare, ritat i en dator. Det ser ut som en ganska enkel form, med många stora, svepande ytor.



Figur 4. En del av en dammsugare, ritad i att vanligt förekommande ytdesignprogram.

I figur 5 ser vi dock att detaljen är uppbyggd av hundratals små ytor. Det är lite svårt att förklara varför det oftast blir så har, men i princip handlar det om att man vill hålla nere graden på ytorna för att vara säker på att får ”rena” ytor. För att då få tillräckligt hög kontroll på ytorna skarvar man istället ihop flera ytor av låg grad.



Figur 5. Detaljen från figur 4 är uppbyggd av väldigt många delytor.

Är designers matematiker?

Trots att det förekommer mycket matematik inom modern industridesign behöver man inte vara matematiker för att kunna jobba som industridesigner. Programvarorna hanterar det mesta av matematiken. Programvarorna är dock mycket avancerade och det verkar som en viss matematisk erfarenhet gör det både lättare att lära sig och förstå programmen, samt gör att jobbet med att modellera ytor också blir mer effektivt. I Sverige fi nns det många ingenjörsutbildningar med inriktning mot design, och jag tror att de som utexamineras från dessa program skulle kunna bli mycket bra ytmodellerare. För skolan är design kanske inte så lätt att få in på matematiklektionerna annat än som en rolig tillämpning av matematik man kan berätta om. På gymnasiet kunde kanske design, form och ytor fungera som en mer geometrisk ingång till begrepp som kurvor, funktioner och derivata. Idag introduceras ofta dessa begrepp via t ex fysiken. Eftersom inte alla är intresserade av fysik vore det ett intressant experiment att angripa begreppet derivata genom att t ex titta på mobiltelefoners form.

Levende arkitektur: Å bære eller ikke bære – det er spørsmålet

Av Alf Howlid

alf@norskform.no
Alf Howlid er sivilarkitekt MNAL og arbeider som prosjektleder i Norsk Form i programmet Skole og omgivelser. Han har også i mange år arbeidet som lærer på alle alderstrinn

I Norsk Form formidlies arkitektur og design til elever i grunnskolen og videregående skole i Oslo og Akershus i et *Arkitektur- og designverksted som* gjørefag. Barn og unge har deltatt i aktiviteter der de i fellesskap har arbeidet med romdannelse og konstruksjonsøvelser. Øvelsene har eksempelvis vært å bygge gotisk katedral, yurt/kuppel og bro gjennom bruk av stokker, tau og seilduk i ulike formater.

Opplevelse av konstruksjon og teknologi

Et konkret arbeid med grunnelementene i arkitekturen: Romdannelser gjennom direkte hådtering av materialer og konstruksjon i stor målestokk (statikk, mekanikk) er pedagogisk meget velegnet, men lite påaktet. En konkret opplevelse av de virkende kreftene i byggeriet gir et nødvendig erfaringsfundament for forståelse av arkitektur i vid forstand, og har klare overføringsverdier til andre kjernetemaer som matematikk, naturfag og samfunnsfag.
I dag er mulighetene gjennom prosjektarbeid å gi både matematikk/teknologi- og historie/samfunnsfagsundervisningen en mer praktisk rettet innfallsvinkel ved bruk av områdene arkitektur lite benyttet.

En allmenn undervisning i arkitektur og design har to sider;
en orienterende, med betraktning, refleksjon, gjengivelse osv., og en annen med ferdighetsoppøvelse i arbeid med tredimensjonal form. Dette innebærer bygging og materialeksperimentering, og når det arbeides i full målestokk, gir dette muligheter for en reell rfaring med romdannelser.
Det betraktende elementet står sterkest i tilgjengelig undervisningsmateriale, mens ”gjøre”elementet i undervisningen i arkitektur er mindre til stede.

Utgangspunktet er derfor at undervisningen i disse temaene skal ha et sterkt handlingsrettet element og være ”gjørefag”. Dette innebærer at det skal legges vekt på å gi barn og unge konkrete opplevelser der de er aktive deltakere og medskapere.

Pedagogisk utgangspunkt

Min erfaring er at formidling av arkitekturens egenart til barn og unge krever spesiell pedagogisk tilrettelegging. Uten forhåndskunnskaper og referanser i erfaring er det vanskelig

å få et grep om den eksisterende arkitekturen, med all sin kompleksitet. Det moderne urbane bygningsmiljø er overveldende, og en forståelse krever en ferdighet i å analysere romlige og konstruksjonsmessige forhold.
Heller ikke arkitektens tegninger og modeller er helt enkle å få utbytte av. Det er krevende å danne seg konkrete forestillinger om det fysiske miljøet ut fra arkitektens abstrakte formidlingsformer.

Det er en hovedoppgave å finne et pedagogisk felt for aktiv deltagelse mellom den uoversiktlige arkitekturen ute i verdedn og de vanskelig tilgjengelige arkitekttegningene og prosjektmodeller.

Store grupper på 12 til 30 elever/studenter/lærere kan i fellesskap arbeide med romdannelser og konstruksjonsøvelser i full målestokk, med stokker og tau og oppspente duker i ulike formater.
Deltagerne er nødvendige elementer i konstruksjonen, og trykk- og strekk-kreftene oppleves direkte på kroppen. Hovedprinsippet for arbeidet er at det er behov for alle hender (og armer og ben) i konstruksjonen. Siktemålet er at deltagerne skal få en konkret opplevelse grunnleggende prinsipper for konstruksjon og at helhet og samvirke er kjennetegn for all arkitektur.

Forløpet har tre faser:

1: Vi går inn i fenomenet ved handling/eksperiment
2: Så trer vi litt tilbake og iakttar og tenker over handlingen
3: Deretter arbeider vi med hvilke perspektiver og sammenhenger man da kan få øye på

Handling

Deltagerne i store grupper med instruktør gjør eksperimenter med konstruksjon og romdannelser ved hjelp av kropper, stokker, tau, seil med mer.
Dette har to siktemål:
For det første arbeides det i stor målestokk slik at byggingen i seg selv er en skikkelig hendelse som krever samhandling, prøving og feiling i grupper på gjerne 20 til 30 deltagere. Kjernen i denne handlingsbaserte pedagogikken er en direkte deltagende opplevelse av elementene. Som pedagogisk konsept ikke så ulikt brevandring med fører, men i denne sammenhengen med byggeutstyr inne i gymsalen.
For det andre er det valgt øvelser/byggehendelser som ikke bare er selvbegrunnende gruppeøvelser med materialer i stor målestokk, men også at konstruksjonene på en god og innlysende måte representer grunnelementene i byggteknologien og i arkitekturhistorien.

Ettertanke

Instruktøren innleder til samtale om eksperimentene som er gjort.
Det er viktig å stille spørsmål ved hva gruppen har vært med på, hva som faktisk skjedde. Hva gjorde vi? Hvordan fikk vi det til? Hva kjente vi i kroppen i de enkelte

konstruksjonene? Hvilke krefter virker? Hvordan oppførte materialene seg? Hvor mange må vi være for å få dette til? osv.
Hendelsen er ganske kompleks, og de enkelte har ofte merket seg forskjellige momenter. Gjennom en oppsummerende samtale kan fenomenene fremstå klarere for deltagerne.

Perspektiver

Instruktøren peker på/presenterer sentrale elementer i bygningskunsten og det konstruktive grunnlaget for arkitekturen med referanser til eksperimentene og samtalen.
Her må instruktøren bringe inn spørsmålene: Hvor kan dette føre oss hen? Hva minner dette om? Kan dette illustrere deler av den store arkitekturen?
Hvilke andre "fag" kommer til syne i det vi har gjort? (Matematikk, geometri)
Kan vi se paralleller i menneskekroppen? (søyler og buer/skjelett-konstruksjoner, strekk-krefter/muskler og sener)

Eksempler:
Gotisk katedral:
Deltagerne (16 – 30 personer) danner gotiske strebebuer og holder oppe en horisontal stokk som kan belastes (for eksempel med 1 til 2 personer) Dette utvikles fra enkle demonstrasjoner av strekk- og trykk-krefter i en trebjelke. Sammenligning av konstruksjonsmulighetene i ulike materialer (stein, tre, armert betong)
Yurt/kuppel:
Deltagerne (12 – 30) danner vegger i en sirkelform og holder rundstokker i en stjernekonstruksjon mot midten/sentrum. Konstruksjonen kan belastes (en person kan heises opp i midten) og den kan stabiliseres ved at et tilsvarende antall personer danner tau(ring) rundt og låser konstruksjonen. "Veggen" (deltagerne som holder stokkene) kan så hvile mot "tauet" (deltagerne som holder hverandre i armene rundt "kuppelen").
Denne fellesopplevelsen av en "yurt i full størrelse" kan være en innfallsvinkel til en konkret forståelse for konstruksjoner i kuppelbygg, feks Pantheon, Brunelleschis kuppel i Firenzedomen og til ulike moderne konstruksjoner.
Bro:
Deltagerne (16 – 24 personer) bygger en halv bro fra hver side av en "slukt" på 6 meter. Med stokker og tau lages en konstruksjon/bro som holdes på plass slik at deltagerne etter tur kan passere over "slukten". Konstruksjonen forutsetter at alle deltagerne holder i tau og stokker med ulik kraft etter som broen belastes på ulike deler. Fellesopplevelsen av å være en del av en bro kan være en innfallsvinkel til å forstå ulike former for moderne arkitektur med komplekse sammenstillinger av strekk- og trykkbelastninger.

Matematikinlärning med multilink

Av Lisen Häggblom

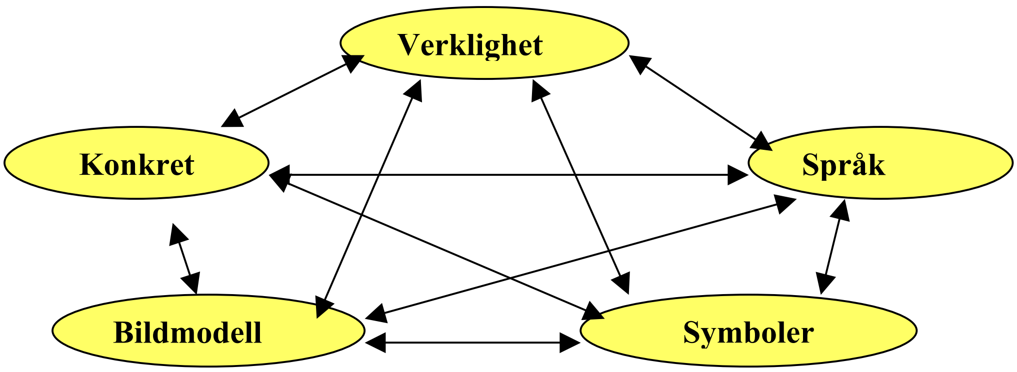
lhaggblo@vmail.abo.fi

Lisen Häggblom är doktor i pedagogik och arbetar som lektor i matematikens didaktik vid Institutionen för lärarutbildning i Vasa. Är aktiv inom pedagogiskt utvecklingsarbete och skriver läromedel i Finland och Sverige. Intresseområdet är begreppsbildning genom laborationer och forskningen handlar om elevers kunskapsutveckling i matematik.

Med multilinkklossar som stödmaterial kan vi hjälpa eleverna till en mångsidig begreppsförståelse i matematik. Eleverna får träna sin tankeförmåga och sitt logiska resonemang. Genom ett nära samband mellan konkreta handlingar och språkliga resonemang blir matematiken ett lustfyllt ämne.

Bakgrund

Matematikinlärning är en aktiv process som utvecklas i samspel med andra människor och som sker i den sociala interaktion som utvecklas bl.a. i ett klassrum. Ur detta perspektiv är laborativa aktiviteter en viktig del i elevernas begreppsbildningsprocess. I Finland har det under många år pågått utvecklingsarbete som stöder elevernas begreppsbildning och lärande i matematik och i den nya finländska läroplanen betonas arbete med konkreta modeller. När eleverna arbetar med konkreta modeller, använder de språket aktivt och sambanden som studeras får ett symbolspråk. Följande figur visar de fem representationsformerna för en utvecklad begreppsförståelse:



En utvecklad begreppsförståelse innebär att en individ känner igen begreppets olika representationsformer, kan hantera begreppet inom en enskild representationsform samt kan växla från en form till en annan.

Utifrån denna teoretiska modell framstår arbete med konkreta modeller som en viktig princip i undervisningen. Valet av konkreta modeller varierar beroende på vilket matematiskt begrepp som är aktuellt. Det hjälpmedel som här beskrivs är ett klossmaterial som visat sig vara ett flexibelt material inom olika områden i matematik.

Vad är multilink?

Multilinkklossar är plastklossar med 2 cm långa kanter. Klossarna finns i tio olika färger och kan sammanfogas åt alla håll. Klossarnas storlek och konstruktion underlättar modellbyggande både inom olika matematiska områden och på många olika nivåer.

Med hjälp av multilinkklossarna kan man på ett mångsidigt sätt stödja elevernas utveckling av taluppfattning, rumsuppfattning och problemlösningsförmåga. Den nära integrationen mellan taluppfattning och rumsuppfattning gör att eleverna får uppleva att matematik inte är enbart räknande. Övningarna syftar till att också utveckla elevernas medvetenhet, kreativitet och lust att lära. Genom dessa laborativa inslag och en aktiv språkanvändning får eleverna uppleva matematikens spännande värld.

Taluppfattning

För att ta tillvara och kunna diagnostisera elevernas kunskaper kan undervisningen under det första skolåret inledas med att eleverna fritt får bygga med multilinkklossar, *räkna antal, göra jämförelser* och *berätta räknesagor*. Begreppen *lika många, fler än* och *färre än* görs synliga. Med hjälp av *talkort* befästas sambandet mellan en konkret modell och det abstrakta symbolspråket.

När talområdet utvidgas upp till 20 läggs klossarna på en *talrad* eller läggs på en *positionsplatta* för att åskådliggöra *tiotal* och *ental*. Arbetet med klossar som en talrad hjälper eleverna att övergå till abstraktioner. Med positionsplattan läggs grunderna för vårt tiosystem men det är även möjligt att arbeta med andra talsystem på en postitionsplatta.

Talanalyser med klossar hjälper eleverna att se sambanden mellan räknesätten. Eleverna får upptäcka det nära sambandet mellan *addition* och *subtraktion* när ett visst antal klossar delas upp. *Olika namn för tal* samt *likhetstecknets betydelse* kommer med som en naturlig del i arbetet. Att dela upp klossar i *lika stora delar* och sedan ange antalet genom en multiplikation förstärker förståelsen för sambandet mellan *multiplikation* och *division*. Elevernas egen undersökning av *division med rest* blir en intressant upptäckt som sedan skrivs ner med tecken och symboler. Multiplikationens egenskaper kan konkretiseras på en byggplatta eller klossar som är sammanfogade till rutsystem. Senare ersätts klossarna av en bildmodell i form av ett rutsystem (1x1 cm rutor eller 7x7 mm rutor).

När talområdet utvidgas till 100 kan *hundraplattan* och *hundrarutan* användas för att visa talstrukturer och samband mellan tal och antal. Klossarna kan byggas till tiotal och ental men byts småningom ut mot ett tiobasmaterial (av trä eller plast) för att få bättre plats på positionsplattan.

Klossarna kan användas för att lägga *talmönster* och studera mönster. Studera de mönster som bildas av

- Talen 1,2,3,4,osv.
- Talen 2,4,6,8 osv.
- Talen 1,4,9,16,osv.

För att konkretisera *bråkbegreppet* kan klossarna, tack vare sina färger, användas dels för att visa *delar av ett helt* och dels *delar av ett antal*. T.ex. en av fyra klossar visar en fjärdedel men en fjärdedel kan också konkretiseras med en modell som är byggd av att annat antal klossar. Då är det fråga om *bråks förkortning* eller *förlängning*. När eleverna bygger bråkmodeller kan de rita resultatet på rutigt papper och beskriva sina modeller med symboler. Tack vare klossarnas olika färger kan de även användas i samband med diskussioner av *procentbegreppet*. Med hjälp av hundraplattan kan procentbegreppet introduceras och eleverna kan bygga olika modeller för procent.

Rumsuppfattning

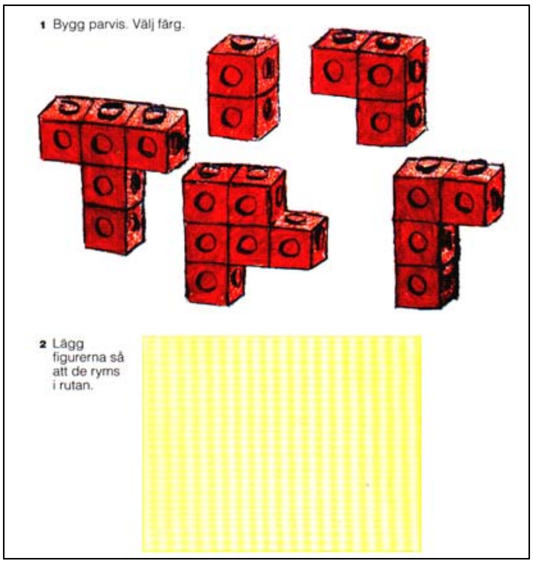
I modellbyggande med klossar får eleverna öva sin rumsuppfattning och perception. Att *bygga* enligt modell, *avbilda* en given modell och arbeta med *mönster* och *pussel* blir en naturlig del av arbetet. Många övningar tränar elevernas kreativitet och problemlösningsförmåga.

Språklig träning
Eleverna arbetar i par. Båda har identiska uppsättningar av t.ex sju klossar i olika färger. Mellan eleverna sätts en skärm eller en bok så att de inte kan se varandras figurer. Den ena eleven bygger en hemlig figur (gärna tredimensionell) och talar sedan om för sin kamrat hur klossarna ska sammanfogas. I förklaringen används klossarnas färg, antal och riktning. När arbetet är klart jämförs figurerna.

Geometriska aktiviteter
I den inledande matematikundervisningen bygger eleverna två- och tredimensionella figurer enligt givna modeller. Modellen kan vara byggd av en kamrat, den kan vara en färdig bildmodell, eller bygga med givna föreskrifter. T.ex. hur många olika modeller kan man bygga av fyra klossar? Figurer som består av fem klossar byggda plangeometriskt blir *pentominomodeller*. Plangeometriska modeller kan sammanfogas som ett pussel med olika

grundformer. När samma klossfigurer täcker olika grundformer tränas förståelse för areabegreppet. Är omkretsen densamma om arean är konstant?

Att lägga pussel
Bygg följande figurer och sammanfoga dem till en given rektangel:

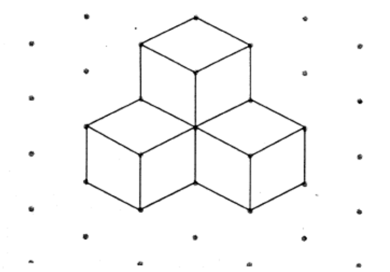


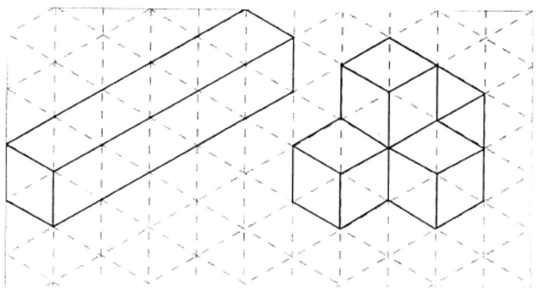
Bygg fyra staplar som är två eller tre klossar höga. Gör olika figurer av staplarna, rita runt och be en kamrat täcka figuren med de fyra tornen. Areabegreppet övas. Övningen kan varieras genom att utgå från olika grundmodeller.

Avbildningar i rutsystem
Både två- och tredimensionella figurer kan avbildas i rutsystem. Till en början används 2x2 cm papper och rutornas storlek är då densamma som multilinkkuben. Senare övergår man till 1x1 cm rutsystem. På dessa rutsystem kan eleverna avbilda

- en given figur plangeometriskt
- en tredimensionell figur från sex olika håll; rakt framifrån, bakifrån, uppifrån, nerifrån och från båda sidorna
- egna mönster i olika färger

Tredimensionell avbildning
På triangelpapper eller prickpapper med liksidiga trianglar kan avbildningen göras som perspektiv.





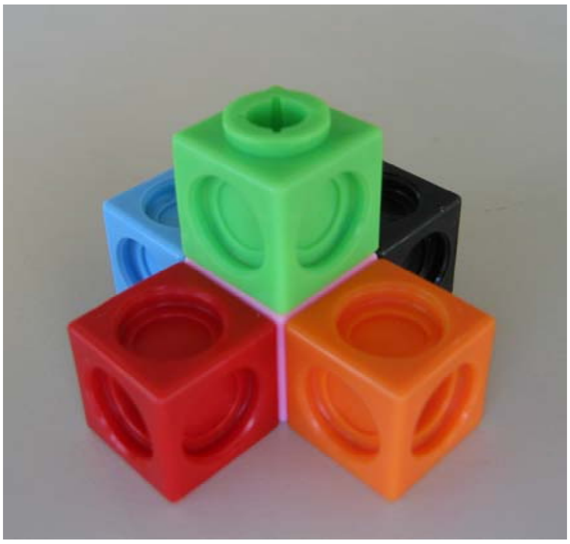
Arbetet med triangelpapper eller prickpapper kan innebära

- att bygga en egen modell som avbildas

- att avbilda en given figur
- att studera och avbilda samma figur från olika håll
- att bygga och avbilda olika modeller av fyra eller fem klossar som avbildas
- att göra en förstoring eller förminskning

Problemlösning
I arbetet med klossarna blir problemlösningen en naturlig del av undervisningen. Många övningar som beskrivits i det föregående innehåller olika former av geometrisk problemlösning. Övningarna kan även innehålla en kombination av systematisk antalsräkning och spatial förmåga.

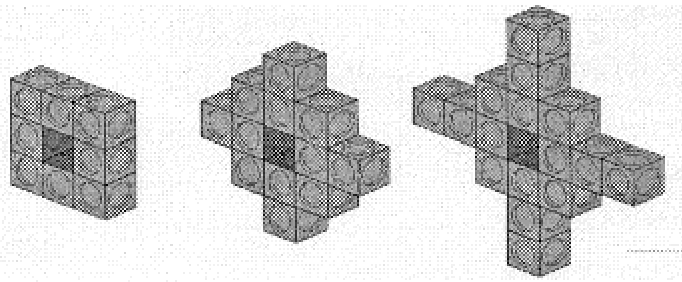
T.ex. Bygg en figur av ett antal klossar. Hur många fler klossar behövs för att figuren ska bli en kub?



I vårt utvecklingsarbete har vi funnit att multilinkklossarna ger möjlighet att redan i de lägsta klasserna ta med specifika övningar för att träna t.ex. *logisk slutledningsförmåga*.

Använd rutsystemet med 2x2 cm rutor och avgränsa 3x3 rutor. Det behövs nio multilinkklossar i tre olika färger. Placera ut klossarna i rutsystemet så att samma färg inte ligger sida vid sida utan endast diagonalt.

Följande uppgift tränar förmågan att *se system* och *regelbundenheter*:
Hur många klossar behövs till nästa figur? Hur många klossar har den sjunde figuren?



Övriga aktiviteter
De förslag till övningar som jag presenterat är ett litet urval av de möjligheter som finns. I det följande vill jag ge exempel på några andra aktiviteter från andra delar av matematiken.

Vid mätning och vägning
Multilinkklossarna är ett utmärkt hjälpmedel för att få eleverna att uppskatta och reflektera över längd, vikt och volym. Hur högt är ett torn som består av fem klossar, tio klossar osv. Hur många klossar behövs för att få en sträcka som är en halv meter lång, 10 meter lång osv.? Hur mycket väger en multilinkkloss? Hur stor är dess volym?

Statistik och sannolikhetslära
Klassificera klossarna enligt färg, sammanställ resultatet i tabell och gör ett diagram. Alternativt kan klossarna representera olika egenskaper/fakta som studeras. Klossarna är även ett utmärkt hjälpmedel för göra experiment vid introduktion av sannolikhetslära.

Inledande algebra
För att förbereda eleverna för algebraiskt tänkande kan klossarna användas t.ex. som variabler med egna värden. Utgående från ett antal klossar skriver eleverna ett uttryck och beräknar uttryckets värde.

Litteratur

Häggblom,L.,& Hartikainen, S. (2002). Tänk och räkna 1. Läromedelsserie i matematik. Stockholm: Majema-förlaget.

Häggblom,L.,& Hartikainen, S. (2003). Tänk och räkna 2. Läromedelsserie i matematik. Stockholm: Majema-förlaget.

Stone,B., Patilla, P. & Frobisher,L. (2000). Number Skill. NES Arnold. England.

Stone,B., Patilla, P. & Frobisher, L. (2000). Multilink Mathematics 10-14. Shape & Space. NES Arnold. England.

Naturlig geometri

Av Torbjörn Lundh

torbjrn@math.chalmers.se

Matematiska Vetenskaper, Chalmers Tekniska Högskola, Göteborg.

Fysiken har under århundraden dragit nytta av matematiken på ett fantastiskt sätt. Kanske är det snart dags för biologin att utnyttja matematikens formskapande förmåga för att förklara det som inte står i generna?
Jag kan inte låta bli att fortfarande förundras över tomtenissens schackrutiga färg i Disneyprogrammet som visas på tv varje julafton i Sverige (en nationell tradition som är svår att förklara – speciellt för icke-sekulariserade amerikaner). Att ordning spontant skulle kunna uppstå ur oordning! Ändå är det detta som sker med ett befruktat ägg som under upprepad delning ska bli en ny individ. Vi kommer att titta på geometriska formskapande konstruktioner som uppkommer i naturen, från snöflingor till grodyngel. Vi kommer också att spekulera i om vi behöver uppfinna (eller upptäcka?) en ny sorts matematik för att kunna förstå naturens olika formskapande processer. Jag hoppas också kunna presentera några öppna problem. Bland annat en biogeometrisk fråga som har över 2300 år på nacken.

Ordning ur oordning

Om vi tar en kopp kaffe och häller i lite mjölk förväntar vi oss att utan att vi rör om med en sked i koppen kommer mjölken att undan för undan att blanda sig med kaffet till en välmixad mjölk-kaffeblandning. Vi är vana att system av sig själva strävar mot maximal oordning.

Tomtenissens färg

Klockan tre på julafton ser vi, och nästan hela Sverige, på Kalle Ankas jul på teve. När jag var liten var min favorit, vid sidan av tjuren Ferdinand som luktar på sina blommor under sin kära korkek, just tomten som målade schackbrädor med sin rutiga färg. Långt efter att jag slutade tro på tomten trodde jag att det verkligen fanns en sådan färg. Sedan efter eget vattenfärgskladdande fattade jag hur orimligt det var. Ännu lite senare, under mina civilingenjörsstudier, fick jag lära mig att det inte bara var orimligt, det var olagligt också. Man fick inte bryta mot termodynamikens andra huvudsats som säger att system som lämnas i fred går automatiskt mot mer och mer oordning.

Men om vi nu tittar på ett ägg som just befruktats. Det ser ju mer eller mindre homogent ut, men efter att ha börjat dela sig, bildas strukturer. Strukturer som blir mer och mer invecklade och utmejslade, efter ett tag har vi ett embryo som så småningom utvecklas till en ”färdig” organism, som i sin tur kanske kan skapa ett nytt ägg. Se till exempel denna process i filmsekvenser där man ser hur följt ett äggs utveckling och snabbat upp tiden. Går vi inte mot mer och mer ordning? Och bryter vi inte därmed mot termodynamikens andra huvudsats?

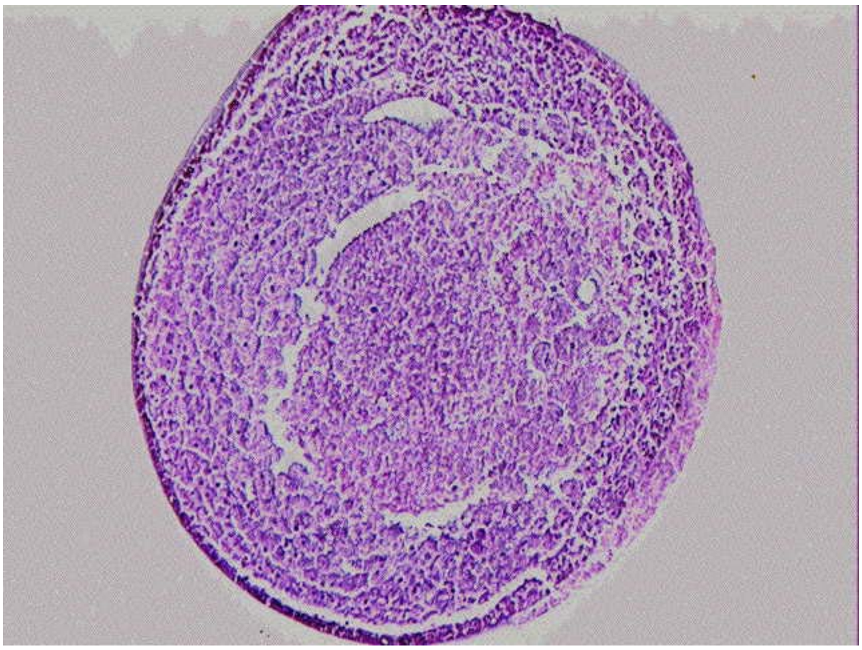
``En genererande funktion kan vara mycket enklare än en beskrivande. Detta är den centrala motivet i morfogenes: ägget innehåller inte en beskrivning av den vuxna organismen utan ett program för att skapa den. Misstaget att inse detta har, i det förflutna, lett till en viss mån av förvirring"
Lewis Wolpert

Som ett exempel på denna förvirring kan vi se på skisserna av en spermie som kunde göras genom stadium i det nyuppfunna mikroskopet. Här är en skiss som Hartsoeker gjorde år 1694 som tydligt visar att det inte bara är en färdig beskrivning av den vuxna organismen inne i spermien, utan mer eller mindre hela organsimen färdig och klar för att bara växa till. Denna bild av embryologin ledde till vissa underligheter. Antag att den lille krabaten inne i spermien kommer att växa upp till en man, då har han inte bara sina testiklar redan, utan också alla spermier klara, vilka i sin tur innehåller små pyttepojkar som i sin tur också har spermier, osv. En annan invändning mot denna bild är att den reducerar kvinnans ägg till att bli enbart en passande plats för spermien att växa till, en slags blomkruka helt enkelt. En sådan syn får inte många poäng idag på den genusvetenskapliga skalan.

Morfogenes

Goethe och Schiller gick hem efter att ha varit på ett kvällsseminarium i botanik. Goethe var inte bara en stor poet, utan också en naturvetare av högsta rang, så vi kan anta att det var han som lurat med sig sin diktarbroder till detta seminarium. Schiller var lite missnöjd med att man diskuterat små detaljer hos en viss växt hela kvällen.
”Var är de stora idéerna, de övergripande teorierna? ” Goethe gick hem och tänkte ut en sådan övergripande ide. Han tänkte sig något i stil med en abstrakt växt som hade alla andra växters egenskaper han kallade den *urplantan,* se figur 1. Han gav också namnet morfogenes till de biologiska formskapande processerna.

Figur 1 Goethes egen skiss av hans urplanta. De inringade bladen är två exempel på konkreta manifesteringar.



Figur 2 Här ser vi ett tvärsnitt av ett tidigt grodembryo. Notera att vi fortfarande kan se de enskilda cellerna i strukturen.

Emergens

När vi tänker på hur ett ägg och en spermie tillsammans skapar en helt ny komplex organism slås man av att helheten i detta fall är mer än summan av dess delar. Detta fenomen kallas emergens och har av bland andra Trondheims egen Nils Baas fått en matematisk definition. Som exempel på andra strukturer man brukar kalla emergenta kan man se på hur enskilda individer formerar sig i flockar som i sig kan ha ett helt eget beteende.

Två succéhistorier

Låt oss titta på två vetenskapliga dundersuccéer – Newtons analys och upptäckten av DNA molekylen. Jag tänkte vi skulle ta upp solsystemet först. Innan Kopernikus kom in i matchen hade man en geocentrisk världsbild med jorden i mitten. Sedan visade Kopernikus (inte utan gnissel från den mäktiga kyrkan) att genom att istället lägga solen i mitten fick man en mycket elegantare matematisk representation. Men det var inte bara estetiska fördelar. Man kunde också göra bättre förutsägelser. Och det gjorde man. Man samlade data och hade fått ihop en ansenlig mängd information som Isaac Newton lade vantarna på och funderade ut sina lagar som kunde förklara hur och varför planeterna rörde sig. Det djärva i detta projekt var att han behandlade himlens objekt, som ju egentligen hörde till kyrkans hägn, på samma sätt som simpla profana äpplen. Han inte bara satte upp en modell, han utvecklade matematiken som krävdes för att behandla denna modell – det blev till infinitesimalkalkylen, eller med andra ord analysen, eller ”integraler derivator och sånt” som miljontals studenter studerar mer eller mindre just nu. Och han lyckades också använda dessa verktyg till att göra precisa och hittills omöjliga astronomiska förutsägelser. Det ska sägas att han också fick problem med den mäktiga kyrkan i och med att han började ge sig in på att tala om oändligt små tal, detta var forfarande något som inte vem som helst kunde ta sig friheten att definiera. Denna teori skapade han i huvudsak i Cambridge mellan åren 1664 och 1666. (*Principia* 1687). Fysiken har inte varit sig lik sedan dess. Den har varit intimt sammankopplad med matematiken sedan dess och olika teorier på makro- och mikronivå har utvecklats med hjälp av den matematiska analysen. Nu till den andra vetenskapliga ”hitten”.
Nästan 300 år senare också i Cambridge, satt två doktorander Watson och Crick på puben The Eagle och spekulerade om meningen med livet på ett mer konkret sätt än vad unga personer brukar fundera på i samma miljö. De satte upp en modell av DNA molekylen som den dubbla spiral vi numer känner så väl. De byggde sina ideer på data som Rosalyn Franklin tagit fram genom röntgenmätningar. Det är nu femtio år sedan och biologin har bytt skepnad efter denna banbrytande upptäckt. För några år sedan kungjordes att hela det mänskliga genomet var kartlagt genom HUGO-projektet. Är inte allt klappat och klart nu. Kan vi inte sätta igång och bota sjukdomar nu när vi har hela den genetiska koden i vår hand, eller rättare sagt på en CD-skiva? Eller finns det mer att upptäcka?

Genocentriska tidsåldern

``In genetics for example, the task of understanding the functions of all the 100,000 human genes will require a much greater effort than that involved in their identification, and by a factor 10 or more.''
J. Madox

``Det finns en stark tendens att tänka på gener som om de fixerade lagarna för biologisk utveckling, men det är inte så; deras roll är mycket närmare ***begynnelsevillkoren****. ... Det måste finnas mer fundamentala teorier, dom sanna biologiska lagarna, de matematiska reglerna där den genetiska koden stoppas in i."*
Ian Stewart, Warwick

Brian Goodwin har lite tillspetsat sagt att vi idag befinner oss I den genocentriska tidsåldern eftersom vi är bländade av den fantastiska framgång som upptäckandet av DNA molekylen har inneburit för vår syn på biologin.

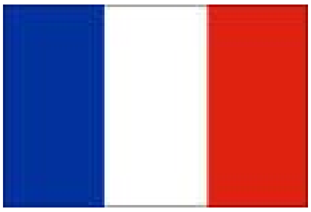
Om vi jämför biologins användning av matematiken jämfört med fysikens täta koppling, kan man säga att biologi-matematiken idag befinner sig på förenewtonsk nivå. Vi väntar på genombrottet som ska sätta igång en liknande revolution som fysiken genomgick efter det att Newton satte upp sina lagar, uppfann den matematiska analysen för att kunna arbeta med lagarna, och sedan gjorde förutsägelser bland annat om planeters position med hjälp av analysen. Kanske väntar vi på en ny Newton? Kanske genombrottet aldrig kommer, men vi måste försöka och vi måste hoppas.

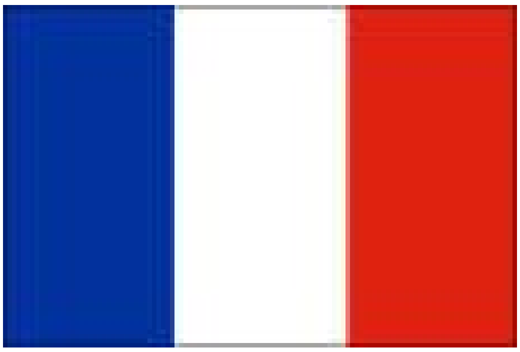
Dagens morfogenesmodeller

Jag tänkte att vi kunde titta på några morfogenesmodeller man använder idag.

Franska-flagg-problemet

- *Hur kan en grupp av celler generera tre olika zoner (blå, vit och röd) med samma bredd, oberoende av det totala antalet celler?*
- *Driesch 1901 and Wolpert 1969 (positional information).*



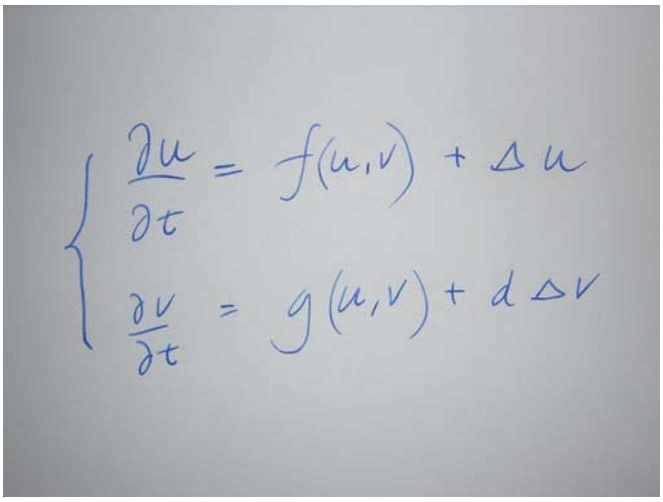


Gradientmetoden

Lösningen av det franska flaggproblemet med hjälp av gradientmetoden går ut på att man tänker sig att koncentrationen av en viss kemikalie, ett morfogen, bestämmer vilken färg cellerna ska få. Om vi har en källa som producerar detta morfogen på den vänstra blåa kanten och en sänka som suger upp morfogenet på höger sida på den röda kanten kommer koncentrationen av kemikalien att avta från vänster till höger och om vi har en regel som ger cellerna röd färg om koncentrationen understiger ett visst kritiskt värde, och blå färg om den överstiger ett annat kritiskt (högre) värde koncentrationer mellan de kritiska värdena ger vita celler får vi en franskflagga oberoende av rektangelns storlek. Denna enkla ide är mer en bara hypotetisk. Man har tillexempel hos bananflugan kunnat hitta sådana signalprotein som ger koordinater längs bananflugelarven och som är viktiga för dess organutveckling.

Reaktion-diffusionsmodellen

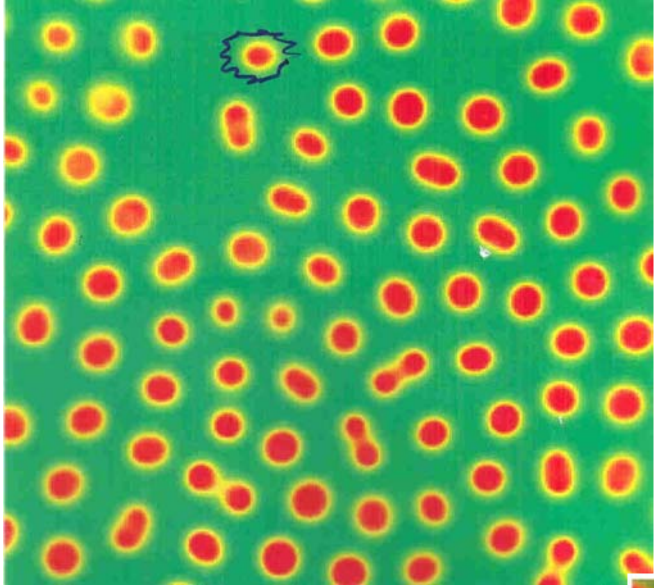
Samtidigt som Watson och Crick upptäckte DNA molekylen publicerade den engelske matematikern Alan Turing en artikel som handlade om två hypotetiska morfogen som samverkade på ett ickelinjärt sätt och som tillsammans gav upphov till spontan mönsterbildning. Turing hade lämnat Cambridge och var i Manchester där han också arbetade med att utveckla datorn. Innan dess hade han gjort sig berömd inom den snäva krets som kände till de extremt hemliga engelska kodknäckararbetena under andra världskriget. Turing var den tongivande i forcerandet, eller ”knäckandet”, av den Tyska ubåtskoden Enigma. Det kom en film med samma namn för några år sedan där en karaktär bär många, men inte alla, av Turings drag. Turings matematiska ekvationer kan sammanfattas som ett kopplat system av paraboliska differentialekvationer, där kopplingen är ickelinjär och där de olika variableprna har skilda diffusionskonstanter. Se Figur 3.



Figur 3. Turings reaktion-diffusions ekvation. Här kan vi tänka oss att u och v står för koncentrationerna för två morfogen och där funktionerna står för kopplingen mellan kemikalierna. Notera att om f och g är båda noll, så får separata partiella differentialekvationer som beskriver rena diffusion, men med olika hastigheter i och med att d strikt större än ett.

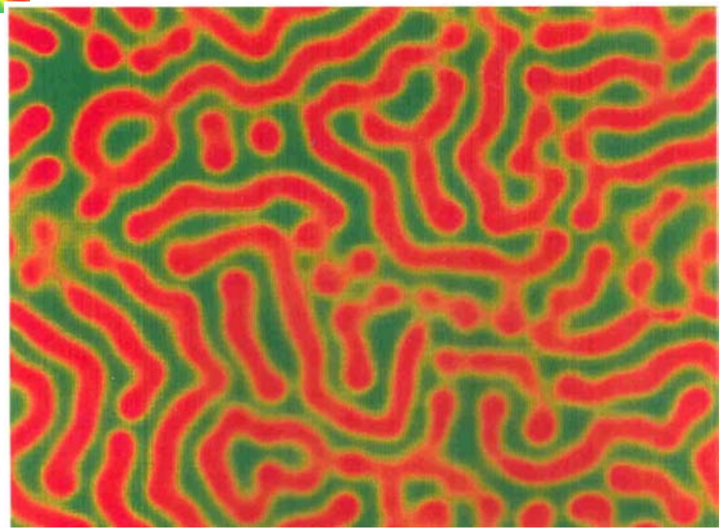
Jim Murray har arbetat mycket med denna modell, se till exempel… Han har gett en trevlig beskrivning av hur man kan förklara hur det fungerar i princip utan att blanda in några ekvationer alls. Tänk er att vi har ett stort gräsområde där det finns många gräshoppor. Det är torrt och plötsligt startar en mängd småbränder på gräsområdet. Gräshopporna i närheten grips av panik och börjar hoppa frenetiskt bort från elden. De hoppar så frenetiskt att de börjar svettas så kopiöst att gräset där tillräckligt många passerar blir lite fuktigt, vilket gör att branden inte kan sprida sig vidare åt den riktningen. Tillslut kommer det alla bränder att slockna och kvar blir ett mönster som kan kanske se ut som i Figur 4.

I Figur 5 har vi samma situation, men här är det en annan art av svettiga gräshoppor som inte kan hoppa så snabbt vilket leder till att bränderna hinner breda ut sig mer. Observera att i båda fallen gäller att vi inte på förhand kan säga exakt hur mönstret kommer att bli, bara vilken karaktär den kommer att ha. Detta är ovanligt i matematiska modeller, där man är för det mesta van vid total determinism, utom förstås i statistiska sammanhang. Vi kan ge en kvalitativ förutsägelse,



Figur 4. Ett tänkt resultat efter att mång småbränder startat spontant och gräshoppor hoppat och svettats. I detta exempel kan gräshopporna hoppa snabbt, vilket i ekvationen i Figur 3 motsvaras av

Figur 5. Här kan inte gräshopporna hoppa så snabbt (d närmare ett) vilket leder till att bränderna kan breda ut sig mer.



Reaktion-diffusions modellen har varit framgångsrik när det gäller att ge teoretiska modeller för pälsmönstring, etc. Den kan tex ge ett svar på det faktum att det finns prickiga djur, men inga prickiga svansar. Men det har varit svårare att hitta riktiga morfogen i naturen.

Belusov-Zhabotiskii

Samtidigt som den teoretiska realiseringen av en slags ”tomtefärg” skapades av Alan Turing, gjorde en rysk kemist en fantastisk upptäckt. Så fantastisk att den inte kunde bli accepterad för publikation förrän långt senare, och då i en konferensproceding, inte helt olik den du läser i just nu! Belusov upptäckte av en slump att en viss kemisk blandning gav upphov till spontan mönsterbildning. Det vill säga en helt homogen blandning som på egen hand började dela upp sig och ge mönster av utvidgande cirkulära band. Det var förståss en världssensation, men tyvärr kunde ingen tidskrift publicera något som så flagrant bröt mot termodynamikens andra huvudsats. Det visade sig senare att lagen fortfarande håller. Den spontana mönsterbildningen pågår kanske bara i en kvart innan den slutar. Det var först på 70-talet som en ung rysk doktorand gav sig på att försöka upprepa försöket, men att tillsätta mer synliga indikatorer gjorde han inte bara om försöket, han gjorde det dessutom omöjligt att inte se de mönster som uppträdde.

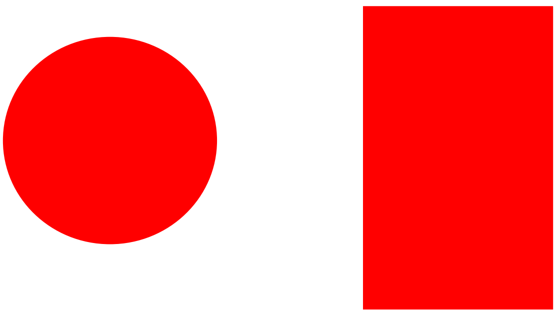
Romanesco – min nya favoritgrönsak

För några år sedan lanserades en ny grönsak, inte genmodifierad, men framavlad som många andra grönsaker genom korsning. Denna kallades Romanesco och var en korsning mellan brocolli och blomkål. När jag såg det första exemplaret av den, räknade jag antal spiraler som skruvar sig ut från varje top. Jag fick det till åtta åt ena hållet och tretton år det andra. Det var vad man kunde förvänta. Man har länge sett att sådan spiraler hos växter är efterföljande Fibonaccital, dvs tal ur serien 1,1,2,3,5,8,13,21,33,…, där man får nästa tal i följden genom att summera de två tidigare talen. Man har sedan länge sett detta fenomen och det stämde alltså även på nya grönsaker. Men varför är det så. Alan Turing funderade en hel del på detta. Det var först på 80-talet Douady et al kunde ge en bra förklaring till detta som byggde på att spiralerna som kom fram var en bieffekt av att växten försöker packa de nya knopparna så effektivt som möjligt under tiden hela grönsaken växer.

Det som gör Romanesco till min nya favorit är att den förutom denna Fibonacciegenskap också har en sk. Fraktal struktur, dvs den är självliknande på olika skalor. Tänk er att ni bryter av en liten top på den stora klumpen och förstorar upp den. Den lilla biten blir då svår att särskilja från originalbiten. Den smakar rätt okey också, speciellt som tilltugg till fördrinkar etc.

Sårläkning

Som avslutning skulle jag vilja ta upp ett öppet biogeometriskt problem som enligt sägnen först formulerades för ungefär 2300 år sedan av Hippokrates, läkekonstens fader, som varje läkare svär sin trohets ed till vid examen. Han frågade sig varför runda sår läker så mycket långsammare än kantiga sår. Detta problem är fortfarande olöst, även om flera teorier och hypoteser finns.



Som avslutning skulle jag vilja citera Galileo som i sin tur citerade Platon:
”Naturens bok kan mycket väl vara skriven med geometrins bokstäver”.

Referenser

N. A. *Baas Emergence, Hierarchies, and Hyperstructures*, Artificial Life III, Ed. C. G. Langton,SFI Studies in the Sciences of Complexity, Proc. Bol. XVII, Addison--Wesley, 1994.
P. Ball *The self-made tapestry*, Oxford University Press, 1999.
B. Goodwin *How the leopard changed its spots*, Weidenfeld and Nicolson, 1994.
S. Johnson *Emergence*, Scribner, 2001.
J. Madox *What remains to be discovered*, The Free Press, NY, 1998.
J. D. Murray *Mathematical Biology I, II,* Springer--Verlag, 2002.
I. Stewart *Life's other secret*, Penguin books, 1998.
L. Wolpert *The Triumph of the Embryo*,Oxford University Press, 1991.

Mathematics: equally meaningful to children and students as to mathematicians

Av Juha Oikkonen

University of Helsinki, Finland
E-mail: juha.oikkonen@helsinki.fi

This talk is for encouragement. We begin by considering discussions between mathematical researchers from the point of view of "meaningful". Then we go on to describe, using some examples, how this can be realized in "math days" of school children. Finally we tell how the same way of thinking has been successfully used in Helsinki in teaching first-year students of mathematics.

To develop one's teaching a teacher needs time and freedom to do so. My purpose is to show by means of example taken from my own work where and how those treasures might be found. This is what I mean by 'encouragement'.

Besides this I wish to tell about how and why I find mathematics so very exciting and natural.

About some discussions about math

People often say that to learn mathematics you must have a special skill and then go on to confess that in our family nobody has (had) such a skill. I have come to believe that this kind of comments come from a severe misunderstanding of what mathematics is, how it is done and how it is learned. I believe that mathematics is as natural to all of us as our mother tongue. Teaching and learning it can be much more effective and fun (though both are hard work like teaching or learning to skijump). In saying this, there is some exaggeration, but only very little.

So what do I want to say? I come from a community of university mathematics and so have had the pleasure to discuss (research) mathematics with top level researchers. I have also had the even more great pleasure to discuss mathematics with young children. It has been a PYSÄYTTÄVÄ TMS experience to me to realize how similar these types of discussions have been.

In both types of discussions mathematics has appeared as meaningful and concrete. This requires some explanation. Of course mathematics should be meaningful for a research mathematician. But there is more in it. The research mathematician does not let the mathematical concepts remains as they are but makes them mean to her or him. And the objects of study are in for the mathematician often real as rooms and tables and chairs. These features are remarkable since modern mathematics is extremely technical and abstract.

To enjoy a mathematical problem with a young child one has to put the problem in terms that makes it meaningful for the child. And everything has to be concrete enough. (But everything does not have to be in fairy-tale-terms: looking for certain parts in polygons may quite well be concrete enough.)

Math days

Next I shall tell about some experiences with math days. Of course, dozens of people have organized various kinds of math days in very many countries and I am sure that both the adults involved and the children have enjoyed themselves greatly. So my purpose is to tell here simply about what the children have taught to me.

My first experience of a math day was in a Finnish pre-school class. No mathematics had bee taught to those children. Among the tasks I gave to the children was the following. The (rectangular) room had a door at a corner. By the door I had put on the floor a piece of paper with two arrows, one blue and one red. A starting point was marked on the floor. Moreover, there were a piece of paper and a MITTANAUHA. On the paper I had written some numbers in blue and red, like: 70 (red), 120 (blue) 230 (red), 60 (blue) etc.

I had told the class that some candy was hidden in the class and these were the lousy instructions that we had to get along with. I took the measure and drew it a bit commenting "there seem to be some numbers here."

It did not take long before the children started to go zig-zag on the floor according to the instructions. The only thing the adults had to do was to divide the roles: "you take this end and you that end of the measure", "you read the instructions" etc. And the candy was found, of course.

This was rather startling to me: the children were actually doing two-dimensional vector algebra with no instruction given!

I later have seen some years older children do the same on a symbolic algebraic level. We were playing "treasure hunting" and we used a paper with "rutor" so usual to our Scandinavian schools. I draw again two arrows to indicate the direction on the top of the paper. But I had only a pencil and so could not use the proper colors for them. Instead I wrote the letters "b" and "r" to indicate blue and red. And the instructions got a form like "2b + 3r". This was the simplest case. Whenever a treasure had been found, I said "how clever you are, do you want to have something more challenging?" The answer was of course a "yes" and so we got parenthesis, minus-signs, scalars in front of parenthesis etc. Finally I drew a route to the treasure and asked the children to write instructions. In the route a similar form appeared twice before some other steps. Rather quickly the children came with something like 2(2b – 3r) + …

No formal mathematics (not to mention vector algebra) had ever been taught to these children.

An other area where the children have been especially good compared to many “untrained” adults is combinatorics. Think about the dog Snoopy. I’ve heard that he is very strict about what he wears: he wants to wear a sock on every foot and moreover requires them to be of the same color. Snoopy has in a completely dark room a huge box full of socks which are completely alike with possibly the exception of color. How many socks Snoopy has to take out from the storage room to be sure of that he can choose four socks of the same color among those he took out?

To answer the question we must know the number of colors. Starting with just two colors and perhaps just to feet (like those of the teacher instead of Snoopy), the children are extremely good at solving this problem.

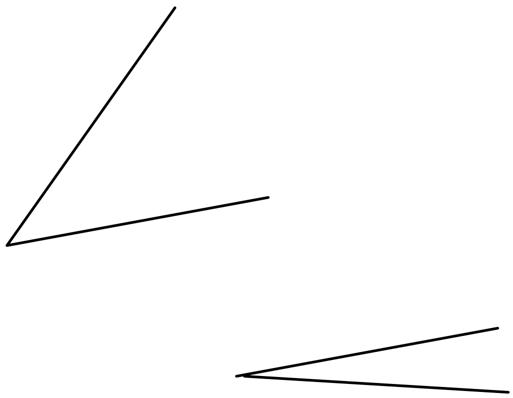
Math days and mathematical content

Some of my most enjoyable experiences during math days have been in connection to some theorems of geometry. The children have been lead to a meaningful situation where a question from geometry arises. Then they answer question by question and make simple observations which finally lead to an answer to the original question together with a reason for why we have to accept the answer.

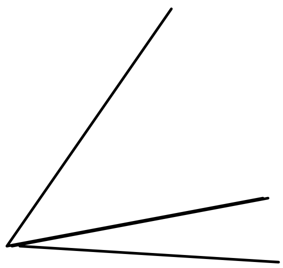
Moreover, the questions are presented just like in my earlier examples so that the children always can come out from the session without “failing”. There simply are so many ways of “failing” in studying mathematics at school that avoiding one more does not harm, to say the least.

As an example we shall consider the question about the sum of the angles of a triangle. To introduce the problem we could start with a triangle drawn on a piece of paper. Then we could either tear the paper in pieces so that we can set the angles of the triangle next to each other, or we could measure how many degrees the angles are. Then the result would be that when put next to each other, the angles seem to form a straight line or that the sum of the angles measured is (probably) somewhere between, say, 178 and 182 degrees (or perhaps between 179 and 181 degrees - but not exactly 180 degrees unless we cheat.) So what is the sum of the angles of a triangle exactly, and why it is so? We may guess that the sum is exactly 180 degrees, but is this true?
(And why our measurements did not give exactly that answer?)

Here we (the teacher and the class, say) have something worth finding out. To begin, we should decide what we mean by the sum of the two angles



The answer should be an angle (agreement about this seems easy to achieve according to my experience) and the natural angle should be the result of putting the two angles next to each other like this.



Here the children have come to a very important definition. But we need actually also another definition to answer what it means that two angles are or are not equal. So the children are asked to look at three angles which seem equal (but where one is slightly different) and answer whether they really are. The correct answer is obtained at least when they are asked to put the angles on top of each other.

So the children have in their "miniature geometry" two basic definitions for "=" and "+". But there will also be an axiom. Therefore they are asked to look at the picture

They are asked whether there are any other angles equal to the marked one. Usually it does not take long to find the three other ones. The teacher says “bravo” and the “miniature geometry” gets its axiom: after this it is known (among the mathematical community consisting of the teacher and the children) that these four angles are equal.

After these preliminary discussions the teacher and the children can come back to the sum of the angles of the triangle. (The angles are marked here with drawing but especially for younger children colors would be better.)

So we shall imagine something more: two of the sides have been extended and a line parallel to the third side has been drawn.

(Notice: when a mathematician says “assume that…” it is actually meant “imagine a situation where …”. Assumptions are hard even for university students, but children are masters of imagination. There is problem in how can we know the line to be parallel in the picture, since we simply imagine it so.)

Finally the children are asked whether they can find angles equal to the marked one. And of course they can. Some of those are marked below.

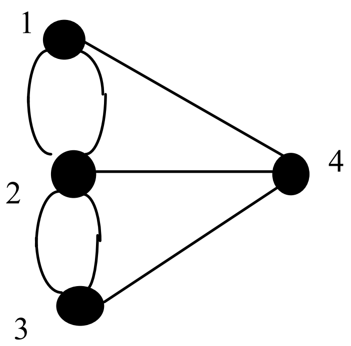
In the picture we see that the angles really form a straight line – or an angle of 180 degrees, if we prefer that language. But we (the teacher and the children) obtain more. We know now also why this fact holds.

So this adventure has been in many respects like real research mathematics. During it we met (as our friends) definitions, an axiom and finally an answer to our question together with a "guarantee".

Discussing with the children

Another exciting aspect of the math days is related to the kind of discussions that we have had. As I said above, these resemble very much those among researchers. I shall give an example.

Consider a map of Lisa's home town consisting of four islands marke with 1, 2, 3 an 4 on the following map. The lines indicate bridges between the islands.



Lisa lives on island 1. Is it possible for her to take a walk (starting from home and ending there) through all the bridges so that she walks over every bridge, but only once?

- Let me try (the child makes several tries with a pencil).
- I think not.
- Are you sure? Maybe you just did not find the correct route?
- (After some more consideration) I still think not!
- Let's try together to see whether we can be quite sure.
- Look at island 2. Does Lisa go there / visit it?
- Yes.
- Why?
- Because she has to use all bridges.
- How many bridges she uses to come to island 2?
- One.
- What happens after she has come to the island?
- She goes away.
- How many bridges she needs for that?
- One.

- How many bridges does this make together? - I mean coming to the island and going away?
- Two
- Is she going to come back to the island?
- Yes.
- Why?
- Because island 2 has more bridges.
- So, how many other bridges she uses during her next visit to the island?
- Two.
- How many of the bridges of island 2 has she used now?
- Four.
- Imagine that island 2 had very many bridges. How many bridges would she have used after the next visit?
- Six.
- And after the next one?
- Eight.
- What kind of number this number of bridges always seems to be?
- Even.
- How many bridges does island 2 have?
- Five.
- Is it even?
- No.
- So, is it possible for Lisa to make the walk?
- No.

Every feast is followed by a working day

The examples discussed above give rise to several questions and comments. A math day is a "feast". How about the every day life after a feast? A teacher seems always to be in a hurry in working through a curriculum - so is there any possibility to give sense to anything described abour in everyday teaching? The examples seemed to be for rather early classes – how abut other levels of teaching?

My own real teaching is at the university level. Therefore I cannot make any direct claims about the work of a teacher at a school. But as discussing with children is very much like discussing with research mathematicians, I strongly believe there is very much in common in teaching at any level. At least when the teacher takes the learning of the students seriously.

This is why I will turn to tell about my own experiences in looking for more meaningful and succesful teaching (and learning.) I am this year teaching an introductory course of analysis for the third time (i.e., differential and integral calculus with exact defintions and proofs using the "epsilon-delta"-machinery.)

This course has the following characteristics: there is very much material to cover; the definitons and proofs are challenging for students coming directly from the school; many students find it dificult to pass the course; etc. Traditionally teaching this courses has consisted of lectures where "the course material is gone through" and exercise classes where homework problems have been "gone through". There has been also some guidance classes where "ex tempore problems have been gone through". To put it short, teaching and studying this course is an extremely important and interesting task.

At the deparment of mathematics (that of mathematics and statistics since 1. 1. 2004) we have been able to make a change in these heavy traditions.

I try to explain two parts of what has been tried. Both are somewhat relevant to a teacher's relation to her/his students ant to what she/he is teaching. First, the exercise and guidance classes have been attempted to be made more meaningful to the student by for example taking younger students to the team and by trying to stress that the quality of how a problem is worked with is much more important than the number of problems covered.

We have also tried to effect on the way the students study by encourraging them to form small teams in which to study and discussing aspects of succesful study and learning with them. Much of this has taken place in new types of groups where older students act as tutors for theif fellow students. Indeed, we have reached a happy situation where students and teachers together work for better study and teaching at our deparment (especially for the first year studies.)

There is also much which I have attempted to reach as the lecturer of the analysis course. To start with, I have tried to encourage the students to take an active role in their studies and especially during the lectures. They are told to aske whenever whatever. And for the (not too uncommon) sitation where a student thinks that she/he does not understand enough to make a proper question, I have told them that one of the most positive comments to say during my lecture is to say "just now I do not understand anything". This is no joke: such a comment gives the teacher full permission to stop and to try to open some difficult notion with no need to hurry. And perhaps other studens can be drawn to the discussion – either to confess "I don't understand either", or to give valuable suggestions abut where to look for an understanding. The lectures are for the students, not for me. This is a rather trivial thing to say, but it seems that such simple things are actually extremely important.

Another aspect of what has been attempted during the lectures is related to the eternal problem of hurry. Before that I shall make one step backwards: why are we looking for a change in this course? There a two types of reasons. Traditionally, too few students have passed the course. And traditionally, too many of those who have passed it have learned the basic concepts fat too purely. What we have been trying is to handle both of these problems. Perhaps the main difficulty in this kind of a course in analysis is its rich conceptial side. There are actually not so many ways of thinking on should learn. But these are really challenging for a new-comer. And they are easily hidden among the plenty of material.

So what I have tried to do is to concentrate on these few but difficult ways of teaching. It means that in the course material there is much that has been discussed very lightly or skipped altogether. We have thaught that this price is worth paying: the concepts and conceptual thinking are what is required most in the next few courses.

The attempts of a rather large team of people has been succesful. The number of students passing the course has been doubled when compared to the usual level. Moreover, it seems that the students learn the main concepts better than before. And even better, the number of the students passing the next few courses has been also doubled.

So the encouragement I wish to give to every teacher from the above few examples is: look at what you are teaching now. Give time to what you now find most esssentia – and to your student. Rely on yourself – and on your student.

Maupertuis saga: en matematisk äventyrsresa till Lappland

Av Osmo Pekonen

Osmo Pekonen (e-mail: pekonen@mit.jyu.fi) är docent i matematik vid universiteten i Helsingfors och i Jyväskylä. Han har studerat matematik särskilt i Frankrike och har doktorerat år 1988. Han är numera redaktören av bokrecensionspalten i den världskända populärmatematiska tidskriften "The Mathematical Intelligencer" (Springer-Verlag). Han har utgivit vetenskapliga artiklar närmast om differentialgeometri samt ett par populärmatematiska böcker på finska. Han är också känd för andra böcker utanför matematiken och är medlem av Finlands Författarförbund.

Abstract

Den franska matematikern Pierre Louis Moreau de Maupertuis företog under åren 1736--1737 en expedition till Lappland. Hans avsikt var att med gradmätning utreda om jordklotet var tillplattat vid polerna, som Newton hade teoretiskt förutsagt. Expeditionen lyckades bevisa Newtons teori genom triangelmätning på marken i Lapplands yttersta vinterförhållanden. Den av den Kungliga franska vetenskapsakademien finansierade utforskningen hade stor betydelse för kartografins och geodesins utveckling. Samtidigt fäste Maupertuis livliga reseskildringar uppmärksamheten på Lappland i europeiska vetenskapliga kretsar. Maupertuis resa är fortfarande ett av de färgrikaste äventyr i matematikens historia. Han antecknade också spännande saker om lapparnas sedvänjor, föreställningar och mytologi. I skolundervisning kan Maupertuis saga gälla som motivering för att begripa matematikens betydelse i den allmänna kulturhistorien. Matematiskt sinnade klassutflykter kunde organiseras till Lappland i Maupertuis fotspår.

Figur 1 - Maupertius framställd som jordens tillplattare och Lapplandsresenär. En fransk gravyr från 1740-talet

Inledning

År 1998 firades i Finland, Sverige och Frankrike 300-årsminnet av den franska matematikerns Pierre Louis Moreau de Maupertuis födelse. Jag var huvudansvarig för den finska festkommittén, som organiserade olika slags evenemang för att hedra minnet av den upptäcktsresa som Maupertuis ledde till Lappland (eller närmare sagt: till Tornedalen, som numera delas av Finland och Sverige) under åren 1736--1737. Exempelvis invigde den franska ambassadören en Maupertuis tillägnad plats i Torneå, där han vistades. En turistrutt i Maupertuis fotspår med flera sevärdheter inleddes i Tornedalen. Dessutom deltog jag som vetenskaplig expert i projektet för att bearbeta en film om Maupertuis expedition för den franska televisionen. Regissören var den välkända franska dokumentaristen Yves de Peretti. Tyvärr fullbordades denna film inte eftersom resurser saknades. Ämnet är fortfarande av lärdomshistorisk aktualitet, vilket flera nya böcker om Maupertuis bevisar. På själva konferensen kunde jag dock illustrera Maupertuis äventyrsresa med avsnitt ur den ofullbordade filmen.

Maupertuis i sin tid

Huvudgestalten i mitt föredrag är Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698--1759), en fransk matematiker och en av 1700-talets mest lysande vetenskapsmän och universalgenier. Han föddes i Saint-Malo i Bretagne år 1698. Efter en kort militärtjänst inriktade han sig på att bli matematiker. Han besökte London år 1728 och bekantade sig då med Isaac Newtons matematiska teorier. Han var en framstående matematiker som gjorde viktiga insatser för variationskalkylens utveckling. Han var exempelvis den första som formulerade den minsta verkans princip, men här koncentrerar vi oss på de insatser som har gjorde i geodesin.

På Maupertuis tid var problemet med jordens figur av stor vetenskaplig aktualitet. Att jorden hade formen av en boll hade utretts redan av antikens vetenskap. Numera vet vi, att jordklotet inte är en perfekt boll, utan har många slags oregelbundna former. Det hade man börjat misstänka redan på 1600-talet. Fransmannen Jean Richter märkte att hans pendelur gick 2 minuter efter vid ekvatorn jämfört med tiden i Paris. Isaac Newton påstod i verket *Principia* (1687), att jordklotet är avplattat vid polerna. Enligt Newton förorsakas avplattningen av den kraft som jordens rotation medför.

Jordklotets exakta form kunde, med de metoder som användes på 1600-talet, utredas med gradmätning och astronomisk positionsbestämning. Först måste man mäta en given meridianbåges längd på markytan och sedan även centrivinkeln som motsvarar denna båge. Om jordklotet är helt runt, motsvaras en lika stor centrivinkel av ett lika långt avstånd överallt på markytan, exempelvis vid ekvatorn och vid polcirkeln. Om jorden är avplattad vid polerna är avståndet längre vid polcirkeln. Om jorden är utdragen vid polerna är avståndet däremot kortare vid polcirkeln än vid ekvatorn.

Den franska astronomen och geodeten Jacques Cassini (1677-1756) gjorde försök med triangelmätningar i Frankrike mellan Colliour och Dunkerque. Enligt mätningarna var gradens längd i norra delarna av mätbågen 56 950 famn (*toises*) (1 toise = 1,949 meter i moderna enheter) och i södra delarna 57 097 *toises*. Enligt denna forskning skulle jorden hellre vara citronformig d.v.s. utdragen vid polerna. Man hittade argument ur René Descartes föråldrade virvelteori (*théorie des tourbillons*) för att stödja denna felaktiga slutsats.

Detta ledde till en lärostrid mellan vetenskapsmännen i Frankrike och i England. Man diskuterade häftigt om jordklotet hade formen av en oblat sfäroid eller en prolat sfäroid. Eller i mera familjära termer: liknar jordklotet en mandarin eller en citron? Vem hade rätt: Newton eller Descartes? England eller Frankrike?

Debatten var ingalunda av enbart akademiskt intresse, eftersom felaktiga kartor förorsakade sjökatastrofer, skeppsbrott och stora förluster för både handels- och örlogsflottor. Den nation, som först skulle få till sitt förfogande tillförlitliga kartor, skulle kunna räkna sig som den ledande sjömakten. Den mäktige marinministern greve Maurepas övertalade kungen Ludvig XV att ge sitt bifall för att organisera ett storslaget forskningsprojekt för att bestämma jordens figur.

Kungliga Franska Vetenskapsakademin utrustade två expeditioner för gradmätning. Den ena skulle sändas till ekvatorn och den andra långt upp i Norden. Vardera expeditionen skulle med hjälp av triangelmätning på sitt mätningsområde definiera längden på en meridianbåge som motsvarade en grad. Ifall den i Norden skulle vara längre än i söder, alltså antingen i Frankrike eller ännu mera söderut vid ekvatorn, skulle Newton ha rätt, i motsatt fall Cassini.

Den ena expeditionen, som i början leddes av Louis Godini men senare av Charles-Marie de La Condamine, reste år 1735 till ekvatorn, till Peru och den andra ledd av Pierre-Louis Moreau de Maupertuis år 1736 till Lappland. De två expeditionernas underliga öden hör till både forskningsresornas och matematikens stora historia.

Vi koncentrerar oss i detta föredrag på Lapplands-expeditionen. La Condamines expedition skulle vara värd en annan historia. Den var tvungen att stanna i Sydamerika i nio år. Den drabbades av sjukdomar, attackerades av indianer och hade mycket otur över huvud taget. En av medlemmarna, urmakaren Séniergues, t.o.m. slogs ihjäl. Själva mätningen måste delvis genomföras uppe på Anderna, t.o.m. på 5000 meters höjd.

Båda expeditionerna leddes av Frankrikes främsta matematiker. Utom Maupertuis var Lapplandsexpeditionens andra matematiker Alexis Claude Clairaut (1713--1765), som är välkänd i differentialgeometrins historia. Han var ett matematiskt underbarn, som föreläste om ämnet *Quatre problèmes sur de nouvelles courbes* vid bara 13 års ålder och valdes vid 17 års ålder som akademiledamot. När Lapplandsäventyret började, var han 23 år. Clairauts teorem, som han formulerade efter resan, behandlar just sambandet mellan jordens avplattning, tyngdkraften och centrifugalkraften. Clairaut minns man också som den matematiker, som teoretiskt förutspådde återkomsten av Halleys komet år 1759.

Expeditionens verksamhet i Tornedalen

Maupertuis expedition avseglade ombord på skeppet Le Prudent från Dunkerque den 2 maj 1736 med Stockholm som destination. Utom matematikerna Maupertuis och Clairaut hörde till sällskapet astronom Pierre-Charles Le Monnier, tecknare d'Herbelot, sekreterare Sommereux, och en katolsk präst abbé Réginald Outhier. Från Uppsala i Sverige anslöt sig astronomiprofessor Anders Celsius, förstås den samma som är känd för sin termometer, men under resan tillämpade man ännu Réaumurs termometer. Celsius hade varit på studiebesök i Paris och lärt känna Maupertuis samt hans vetenskapliga krets. Celsius hade också hjälpt till att skaffa ett tre meter långt teleskop tillverkat av George Graham från London. Han var en tränad observator, van att handskas med instrument.

Ursprungligen hade Maupertuis tvekat om han skulle fara till Island, norra Norge eller till svenska Lappland. Celsius besök i Paris då expeditionen planerades hade förmodligen inverkat på att resan företogs till Sverige. Maupertuis gode vän och beundrare vid denna tid Voltaire, som år 1731 hade skrivit den svenska krigarkungens Karl XII:s historia, säger i ett brev att han gärna skulle ha följt med som expeditionspoet till det svenska riket, men att han fruktade att inte kunna överleva kylan i dessa nordliga nejder. *Quel dommage !*

Det lärda sällskapet stannade för några dagar i Stockholm, där kungen Fredrik I skänkte Maupertuis ett jaktgevär. Kungen sade, att han själv hellre skulle delta i en blodig batalj än resa till det vilda Lappland. Med dessa uppmuntrande ord i minnet fortsatte det dristiga sällskapet resan norrut. Det franska sällskapet anlände till Torneå den 21 juni 1736 och kunde alltså observera midnattsolens under. Samtidigt var fransmännen tvungna att börja sitt arbete under den värsta myggtiden just efter midsommar.

Den i Pello i Tornedalen födda finnen Anders Hellant, från länskansliet i Västerbotten, var hela tiden med som tolk. Han hade studerat vid Uppsala universitet och skrivit en avhandling om laxfisket i Torne älv. Hellant hade lärt sig både latin och franska och var till stor nytta för expeditionen. Efteråt fortsatte han vetenskapliga studier och blev en välkänd amatörastronom.

Maupertuis fick också enligt överenskommelse med överstelöjtnanten Carl Magnus Du Rietz vid Västerbottens regemente använda finska soldater som roddare för båttransporterna, för att bära utrustning, för att hugga skog samt för andra ändamål. Den huvudsakliga transportleden var Torne älv som har flera stora forsar. Strömmen i älven fördröjde all färdsel norröver. Att färdas åt söder gick visserligen undan men var vådligt i de forsar, som över huvud taget kunde passeras av forsbåtarna med deras skickliga förare. Maupertuis hade bråttom och blev så småningom en flitig forsfarare. Expeditionens båtar var fullastade med instrument och proviant och bildade en ovanlig syn var än man åkte i älvsdalen. Åskådarnas nyfikenhet på expeditionsmedlemmarnas mystiska förehavanden blev t.o.m. besvärande.

För att förrätta mätningen behövdes en ungefär en-grad-lång nord-sydgående linje i vars omgivning man kunde utföra triangelpunktsmätning. Maupertuis planerade först att ställa upp den nödvändiga triangelmätningskedjan i Bottenvikens skärgård utanför Torneå. Camus, Outhier och Sommereux undersökte skärgården mellan Torneå och Brahestad. Öarna visade sig dock för låga för det avsedda arbetet. Efter förslag från Torneå skolas rektor, Johannes Wegelius, förflyttades mätningen till bergen i närheten av Torne älv.

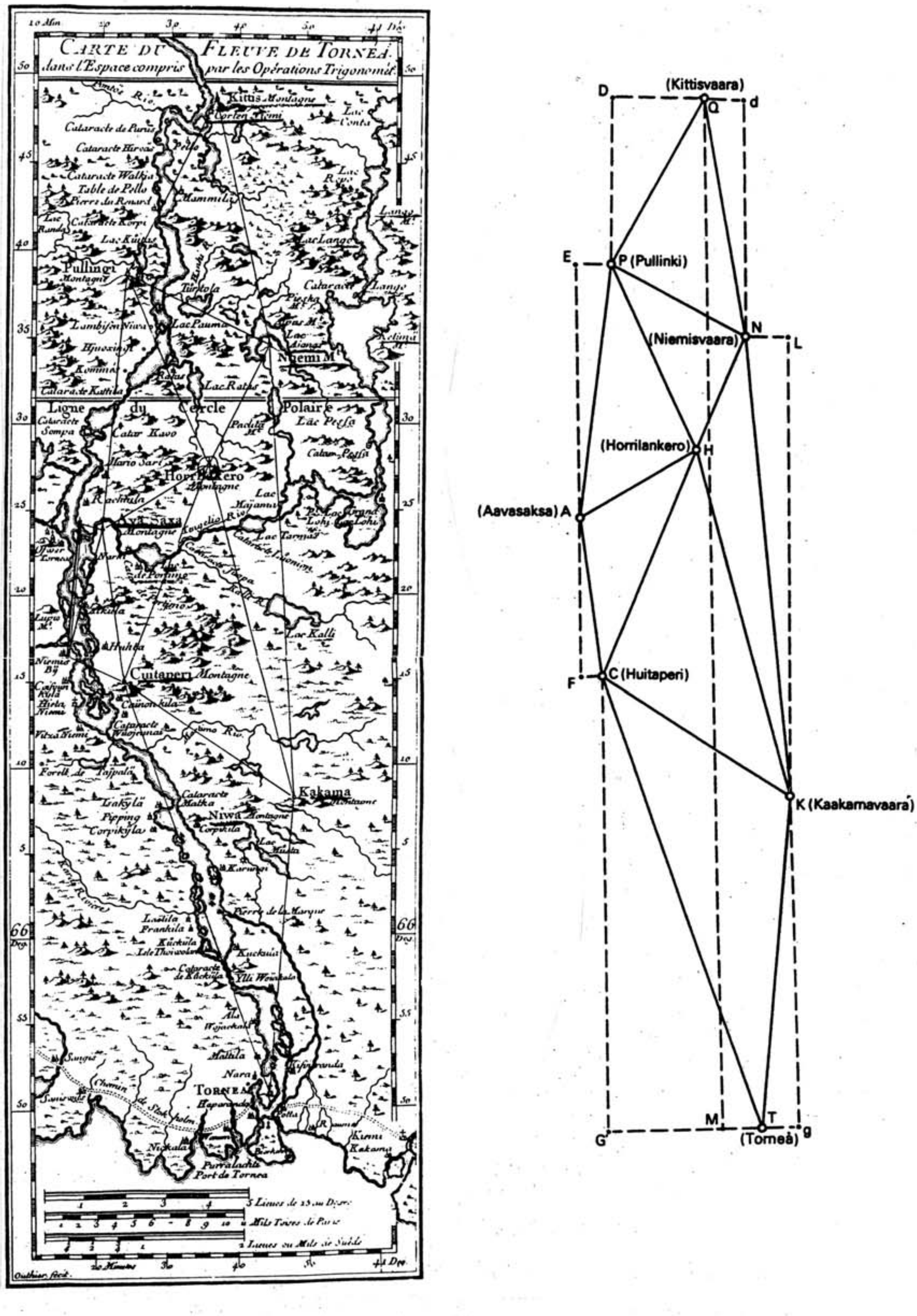
Nu började fransmännen att söka upp lämpliga bergstoppar för att placera mätningstrianglarnas hörnpunkter. Siktlinjerna mellan dem, som låg i synförmågas yttersta gränser, bildade tillsammans en stor kedja. Ena ändpunkten var Torneå stadskyrkas torn, den andra låg ungefär 110 kilometer längre norrut vid berget Kittisvaara norr om Pello. Deras avstånd motsvarar ungefär en meridiangrad. Bergstopparna markerades med signaler, kraftiga koner av skalade trädstammar som syntes på långt håll. Hela tiden plågad av mygg hade man framför sig ett fruktansvärt arbete för att klättra upp på bergstopparna, transportera instrument, tält och proviant genom myrmarker, röja urskog och uppresa signaler i uthuggna gläntor. Detta genomfördes i ett väglöst land om vi bortser från de möjligheter som älven gav. Ett par sameflickor som vaktade sina renar lärde fransmännen konsten att tända eldar för att fördriva mygg. Annars kunde man täcka ansiktet med tjära. Expeditionens yngsta medlem den 21-årige Le Monnier fick så många myggbett att han insjuknade och var tvungen att återvända till prästgården i Övertorneå för att vila. Annars tycks Maupertuis samt hans expedition ha varit alldeles outtröttliga i sitt arbete. Inga svårigheter var så stora att de inte förmådde övervinna dem. Man arbetade hektiskt. De ljusa sommarnätterna möjliggjorde att verksamheten pågick nästan dygnet runt.

Akkurata mätningar i vinterkylan

Den allmänna strategin i gradmätning genom triangulation är att mäta triangelkedjans vinklar samt att göra astronomiska observationer för att fastställa läget för de båda ändpunkterna. Den sydligaste punkten var i kyrktornet i Torneå och det nordligaste blev Kittisvaara. De övriga mätpunkterna var bergen Kaakamavaara, Nivavaara, Horilankero, Aavasaksa, Huitaperi, Niemivaara och Pullinki.

Kvadranten är den huvudsakliga utrustningen för mätning av trianglarnas vinklar. Expeditionen hade med sig 2 mässingskvadranter, som var tillverkade av Langlois i Paris. Den större uppbevaras nuförtiden i Potsdam-Babelsberg observatoriet i Tyskland. Någonstans måste man självfallet fixera en baslinje, vilkens längd måste mätas så noggrant som möjligt. Känner man basens längd, kan alla andra längder räknas genom trigonometri. Det behövs också många slags korrektionstermer som motsvarar nivåskillnader mm. Den ungefär 14,5 kilometer långa basen lades snett över älven nära Övertorneå. Avsikten var att mäta dess längd på den frusna älvens is.

Celsius föreslog att basmätningen skulle uppskjutas till vårvintern då dagarna började bli längre och skaren på snön höll att gå på. Ortsborna antydde ändock att det enstaka år kunde komma en mycket tidig vårflod som bröt upp isen. Detta och den omständigheten att beräkningsarbetet inte kunde påbörjas förrän basen längdbestämts gjorde att Maupertuis beslöt att utföra basmätningen snarast möjligt.



Figur 2 - Kartan av Tornedalen ritad av Abbé Outhier samt det motsvarande trigonometriska schemat.

Den 21 december 1735, på årets kortaste dag, satte man igång basmätningen, som blev ett faktiskt kraftprov i decembermånadens yttersta förhållanden, i sträng kyla, i djup snö och i fullständigt mörker. Från Frankrike hade man tagit med sig ett famnmått av järn som man använde samt en järnlikare i vilken famnmåttet precis gick in vid en temperatur av 14 grader Réaumur (18 grader Celsius). Famnmåttet bevaras fortfarande på observatoriet i Paris.

I ett rum med en fin brasa där justeringstemperaturen kunde hållas, tillverkades först 5 stycken trästänger av gran med en längd av en *toise*. De armerades i båda ändar med en grov spik och genom finjustering med fil kunde de avpassas så, att de exakt fick plats i likaren. Precisionen på dessa famnmått var ett papperblads tjocklek! Härefter kapades och finjusterades 8 trästänger av tallvirke av exakt 5 franska famnar eller 9,745 m längd. Sådana stockar lades i rad på den horisontella älvisen och flyttades därefter steg för steg för att mätkedjan skulle ge baslinjens längd. Var och en hade en penna och somliga använde ett papper för sina markeringar, andra hade hängt en träbricka om halsen och gjorde ett streck på den för varje gång de lade ut sin stång. Resultatet av basmätningen blev att basen var 7406 famnar 5 fot och 2 tum eller nära 14 436,1 m lång. Linjen dubbelmättes och avvikelsen var endast fyra tum!

Maupertuis skriver: "Jag vill ingenting nämna om den möda och de farligheter som detta arbete satte oss uti; var och en kan föreställa sig vad det är att gå till fots uti en alns djup snö, när man måste i händerna bära tunga stänger, som man alltjämt skulle lägga ner på snön och lyfta därifrån upp igen; och allt under en sådan köld att tungan och läpparna frös fast vid kärilet, så snart man ville supa brännvin, som var det endaste man kunde hålla ofruset till att dricka." Den 7 januari sjönk temperaturen i moderna enheter till ---46 grader Celsius.

Liksom kompensation för det det bistra klimatet tändes dock det praktfulla norrskenet. Maupertuis skrev: "På himmelen tändes eldar av tusende färger och figurer och hela Orions konstellation var som doppad i blod. När man ser dessa lufttecken kan man inte förundra sig om de, som beskådar dem med andra ögon än filosofens, blir varse brinnande vagnar, fäktande arméer och tusen andra saker."

Utgående från förrättade mätningar kunde man göra de nödvändiga beräkningarna och utreda avståndet mellan Kittisvaara och kyrktornet i Torneå. Av triangelkedjan användes i den slutliga mätningen nio trianglar. Resultatet måste även korrigeras därför att Torneå och Kittisvaara inte befann sig precis på samma meridian.

Det sista momentet i gradmätningen var den astronomiska bestämningen av den motsvarande bågens gradlängd. För att utföra dessa observationer skulle en sektor användas och operationen kallades bestämning av en stjärnas zenitavstånd. Observationerna skulle göras i den norra och den södra ändpunkten av triangelkedjan mot samma stjärna som låg nära zenit och man valde stjärnan Delta i stjärnbilden Draken. I mätningarna blev vinkeln mellan Kittisvaara och Torneå 57 minuter 27 sekunder, vilket mycket passande är ganska nära en grad.

Man kunde nu räkna fram att en meridiangradens längd i Tornedalen måste vara 57 437 *toises*. Detta är 111,95 kilometer. Mätningarna var utomordentligt akkurata. Senare forskning har bevisat, att avståndet från Kittisvaara till Torneå enligt Maupertuis mätningar var bara 50 några meter för långt.

En tidigare meridiangradsmätning i Frankrike mellan Amiens och Paris hade gett måttet 57 060 *toises*. I mätningarna som förrättades av La Condamine i Peru, men som blev kända bara flera år senare, blev längden på en en-grad-stor meridianbåge 56 737 *toises*. Genom att räkna med detta som utgångspunkt blev jordklotets tillplattningsförhållande 1 : 205. Newton hade teoretiskt förutsagt 1 : 230, medan Cassini föreslog i motsatt riktning värdet – 1 : 284. Senare forskning har visat, att det riktiga tillplattningsförhållandet är 1 : 298,25.

Expeditionen startade sin återresa den 10. juni 1737. Gradmätning hade genomförts på ett år, vilket var en förträfflig prestation med den utrustning och de metoder som på den tiden stod till förfogande. I Paris mottogs polcirkelfararna med översvällande entusiasm. Maupertuis blev mannen för dagen. Redan dagen efter sin ankomst framfördes han för kungen, kardinal Fleury och marinminister Maurepas i Versailles. Maupertuis hade som Voltaire fyndigt uttryckte saken "tillplattat såväl Cassini som jordklotet".

Den kulturhistoriska betydelsen

Förutom att göra anteckningar om forskningsresultaten skrev Maupertuis och Celsius i sina dagböcker och framför allt den litterärt begåvade Abbé Réginald Outhier i sin bok *Journal från en resa i Norden* mycket om levnadsförhållandena i Tornedalen. Denna bok innehåller också en beskrivning av besöket i Stockholm och i de svenska koppargruvorna i Falun. Maupertuis mera tekniska verk *Jordens figur* översattes omedelbart till svenska av hans finska assistent Anders Hellant. Maupertuis vetenskapliga resultat lästes i hela Europa, men också Outhiers reseskildring hade stor utspridning. Den främjade i sin tid betydligt kunskapen om Norden. Publikationen utkom på franska i flera upplagor och har översatts till tyska 1759, till engelska 1808, till finska 1975 och till svenska 1982.

Exempelvis om den finska bastun eller *sauna* har Outhier de följande iakttagelserna att meddela:

"Befolkningen började att bada ofta. Deras bad är så hett, att Herr de Maupertuis, som ville pröva det, fann att en Réaumurs termometer steg till 44 grader över fryspunkten (= 55 grader Celsius). I sina badstugor har de en ugn, som är alldeles lik den jag berättat att de har för att torka säden. Den finns också i ett hörn av rummet. Då stenmassan, som den består av, är ordenligt upphettad, kastar de vatten på den, och den vattenånga som uppstår fungerar som ett bad. De går i regel i badstugan två och två, och alla har i handen ett risknippe som de piskar sig med för att driva fram svetten. I Pello har jag sett hur en mycket gammal gubbe, som kom ut ur badstugan alldeles naken och svettig, gick över gården i skarp köld utan att han fick något obehag därav."

I Outhiers bok blir tornedalingarna kända för att vara sega, kunniga och gästfria. Fransmännens forskningar framskred väl, tidtabellerna höll och de fick språkkunnigt sällskap längs Torne älvdalen. Med officerare kunde man prata franska och med prästerna konversera på latin. Den lokala befolkningen gav tjänstvilligt hjälp. Övernattning och mat bjöds överallt. Posten kom till Torneå en gång i veckan och gick snabbt därifrån norrut. Maupertuis skrev flera brev från Lapplands ödemark till vetenskapliga kolleger men också till kvinnliga beundrarinnor i Paris salonger.

Maupertuis var en storartad popularisatör av vetenskap och matematik. Han kunde fängsla sina åhörare med berättelser om sina strapatser och bragder, skönhetsupplevelser i landskapet, om norrsken, renar och lapparnas mytologi samt därtill sina vetenskapliga resultat. Att utstå äventyr i nordisk kyla och mörker, bergbestigningar och forsfärder gjorde intryck, inte minst hos kvinnor. Maupertuis stora beundrare var markisinnan du Châtelet i vilkens salong Voltaire samt andra Newtons anhängare hade samlats sedan länge. Det blev publikrekord för Franska Vetenskapsakademiens allmänna sammankomster och åhörarana gav sitt bifall till känna.

En berömd episod som ännu måste nämnas gäller flickorna Planström. Under vinterns lopp hade fransmännen och borgarna i Torneå blivit väl bekanta med varandra. Fester hölls både hos torneborna och hos fransmännen. Maupertuis spelade gitarr. Folkliga berättelser om expeditionens festande har bevarats genom generationer. Fransmännens möten med ortens unga flickor gick inte utan påverkan och de fick till och med dramatiska följder. Maupertuis blev kär i Torneå stadens rådmans dotter Christine Planström och skrev åt henne en kärleksdikt som han också sjöng:

Dans les frimas
De ces climats
Christine nous enchante:

Oui, tous les lieux

Où sont tes yeux
Sont la zone brûlante.

L'astre du jour
A ce séjour
Refuse la lumière;
Et tes attraits
Sont désormais
L'astre qui nous éclaire.

Le soleil luit:
Des jours sans nuit,
Bientôt il nous destine;
Mais ces longs jours
Seront trop courts
Passés près de Christine.

Följden var att Christine Planström tillsammans med sin syster Elisabeth reste till Frankrike. Deras öde var dock att bli övergivna av matematikerna. Efter färgrika öden i ett främmande land gick slutligen båda i kloster. Samtidigt levde Maupertuis sin vetenskapliga triumf.

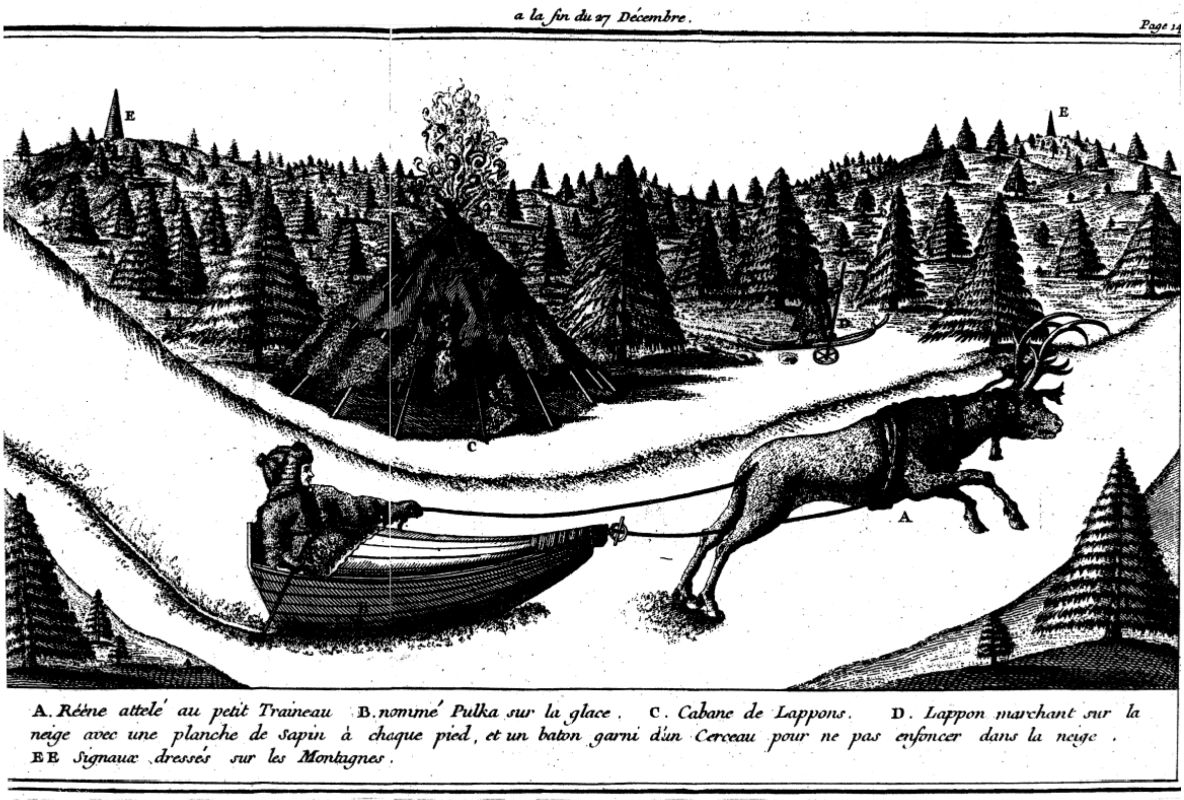
År 1744 bjöds han av Fredrik den Store till det fransktalande preussiska hovet i Potsdam och två år senare valdes han till den preussiska vetenskapsakademins president. Voltaire som också hade sökt Fredriks ynnest och gärna skulle ha mottagit samma ställning blev avundsjuk. Voltaires och Maupertuis vägar skiljde sig nu och de blev riktiga fiender. Voltaire försökte i många satirer ringakta Maupertuis betydelse som vetenskapsman. Som vapen hämtade han fram de två Torneå flickornas öde, som nu fick ge stoff till skvallerkrönikan. Voltaire raljerade med gradmätningsexpeditionen exempelvis i de följande verserna:

Courriers de la physique, Argonautes nouveaux,
Qui franchissez les monts, qui traversez les eaux,
Ramenez des climats soumis aux trois couronnes
Vos perches, vos secteurs, et surtout deux Lapones,
Vous avez confirmé dans ces lieux pleins d'ennui
Ce que Newton connut sans sortir de chez lui.
Vous avez arpenté quelque faible partie
Des flancs toujours glacés de la terre aplatie.

Lyckligtvis beslöt den preussiska kungen att försvara sin vetenskapsakademiepresident. Han lät bödeln offentligt bränna en av Voltaires smädeskrifter som var riktad mot Maupertuis och t.o.m. lät arrestera Voltaire för en månad.

Maupertuis saga som en del av Nordens identitet

Maupertuis och Outhiers skrifter bidrog till att skapa bilden av Norden i Europas upplysta läsarkretsar. Maupertuis själv lät sig representeras i en fantasifull lappdräkt bestående av ekorrsvansar och renskinnspäls för ett porträtt. De senare generationerna, ända fram till vår tid, har i Maupertuis och Outhiers verk fått detaljerade uppgifter om 1700-talets liv, boende och vanor i Tornedalen. Många senare resenärer, exempelvis italienaren Giuseppe Acerbi år 1799, men också nutida turister, har av dessa skrifter fått inspiration att besöka Tornedalen.



Vad finns det för sevärdheter längs Maupertuis rutt? Både i närheten av kyrkan i Torneå och på Kittis-fjället i Pello har man rest minnesmärken som berättar om Maupertuis resa. Också Anders Hellant har fått sin minnesten. Hela Tornedalen karakteriseras av stor naturlig skönhet. Bergtopparna som användes som mätningspunkter bjuder vackra utsikter. De stora forsarna i Torneälven rinner fortfarande fria. Torneå kyrka, som har vigts 1686 och tillägnats drottningen Hedvig Eleonora, finns fortfarande. Däremot brann tyvärr de tyska trupperna i Lapplandskriget ned hela Pellobyn och förstörde de urgamla byggnaderna av Korteniemi-gården där Maupertuis vistades. Pello kommuns vapen, som representerar tre stjärnor, har fått sitt motiv från gradmätningsexpeditionen. Hela rutten i Maupertuis fotspår har gamla anor och många kulturhistoriska sevärdheter.

I skolundervisning kan Maupertuis saga gälla som motivering för att förstå matematikens betydelse i den allmänna kulturhistorien. Mätningen av jordens figur hör till mänsklighetens största vetenskapliga framsteg på 1700-talet. Matematiskt sinnade klassutflykter kunde organiseras till Tornedalen i Maupertuis fotspår.

Referenser

Balland, A. 1994, La terre mandarine, Seuil, Paris.

Ekeland, I. 2000, Le meilleur des mondes possibles. Mathématiques et destinée, Seuil, Paris.

Hecht, H. (red.) 1999, Pierre Louis Moreau de Maupertuis: Eine Bilanz nach 300 Jahren, Verlag A. Spitz, Berlin.

Hederyd, O. 1996, Två systrar: en lätt romantiserad 1700-talskrönika från Bottenviken och Frankrike, Ord & visor, Skellefteå.

Martin, J.-P. 1987, La figure de la terre: récit de l'expédition française en Laponie suédoise (1736--1737), Isoète, Cherbourg.

Maupertuis, P.-L. M. de 1977, Jordens figur, Tornedalica 23, Luleå. (Originalupplaga: Paris 1738.)

Outhier, R. 1975, Matka pohjan perille, Otava, Helsingfors. (Originalupplaga: Paris 1744.)

Outhier, R. 1982, Journal från en resa i Norden år 1736--1737, Tornedalica 39, Luleå. (Originalupplaga: Paris 1744.)

Terrall, M. 2002, The Man Who Flattened the Earth. Maupertuis and the Sciences in the Enlightenment, Chicago University Press, Chicago och London.

Tobé, E. 1986, Fransysk visit i Tornedalen 1736--1737. En bok om gradmätningsexpedition och dess nyckelpersoner, Tornedalica 42, Luleå.

Tobé, E. 1991, Anders Hellant: en krönika om sjuttonhundratalets märkligaste tornedaling, Tornedalica 49,
Luleå.

Tobé, E. 2003, Anders Celsius och den franska gradmätningen I Tornedalen 1736--37, Acta Universitatis Upsaliensis 74, Uppsala.

Matematikken i kunsthåndverkets tjeneste – et laboratoriekurs

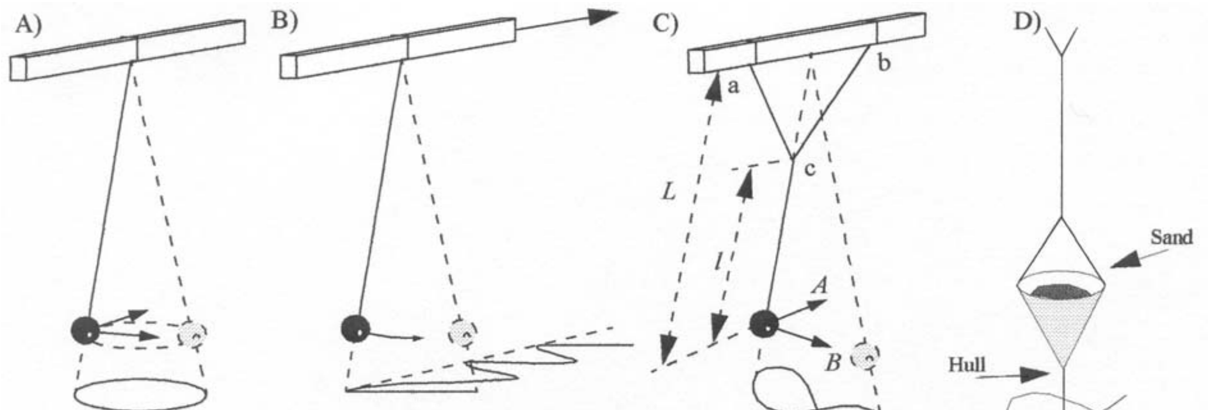
Av Nils Kristian Rossing

Skolelaboratoriet for Matematikk, Naturfag og Teknologi ved NTNU
nils.rossing@plu.ntnu.no

Introduksjon til flettemønster

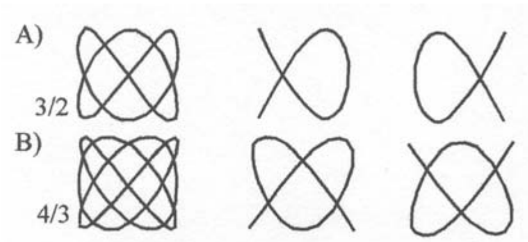
Pendelsvingninger

En pendel som er ca. 25 cm lang og som settes i svingninger vil ha en svingetid på ca. 1 sek og er omtrent uavhengig av utslaget. Avhengig av hvordan vi setter i gang pendelen, vil den beskrive en bue, oval eller en sirkel som vist i figur 1 A).



Figur 1 Pendelbevegelser

Dersom vi lar pendelen svinge i en bue og samtidig gir den en jevn bevegelse på tvers av svingeretningen, vil projeksjonen av bevegelsen ned på gulvet bli en sinuslignende kurve som vist på figur 1 B).

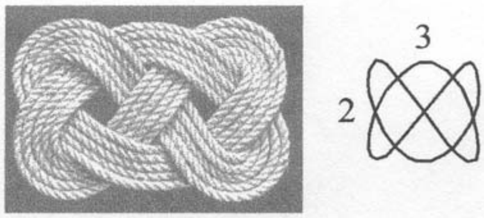


Figur 2 Lissajous-figurer

Vi kan også henge opp loddet i *to tråder* som vist på figur 1 C). Ved hjelp av et strikk eller en ring holdes de to trådene sammen i punktet c. Når pendelen nå settes i bevegelse vil den svinge på en helt annen måte. Vi vil se at pendelen har ulik svingetid avhengig om vi setter den i bevegelse i retning A eller B (figur 1 C)). Ved å flytte strikken opp eller ned kan forholdet mellom de to svingetidene endres. Dersom vi stiller inn forholdet mellom de to lengdene som $L/l = 9/4$, får vi at forholdet mellom frekvensene er 3 til 2. Pendelen vil da kunne tegne figurer som ligner på de som er vist på figur 2 A). Bytter vi ut loddet med en pose sand med et lite hull i kan vi få den fine sandstrålen til å tegne figurene på gulvet som vist i figur 1 D). Slike figurer kalles Lissajous-figurer etter den franske fysikeren med samme navn.

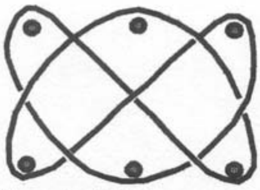
Taumatter

Som vi ser av figur 3 så ligner disse mønstrene til forveksling mønstre av enkle taumatter. Mønsteret på figuren er det samme som vi kan få med en pendel hengt opp i to tråder, hvor forholdet mellom de to svingefrekvensene er som 2/3, dvs. som antall bukter langs sidene på tegningen.



Figur 3 Utviklingsmatte

For å lage en slik matte må en sørge for å la tauet gå over og under på rett måte. La oss tegne opp mønstret på nytt og markere når trådene skal gå over og under.
En slik matte kan lages ved å feste mønsteret til en plate. Stifter kan slås ned i plata som hjelp til å holde tauet på plass. Etter at tauet er lagt en gang langs traséen, gjentas føringen parallelt med den første omgangen. Dette kan gjentas 2 til 3 ganger til matta blir fast og fin. Enden kan syes fast eller limes på undersiden av matta.



Figur 4 Utviklingsmatte

Slike matter kalles *utviklingsmatter* og ble før i tiden mye brukt om bord på seilskutene for å beskytte trappetrinn eller hindre at sjøfolkene skled på det glatte dekket. Denne type matter kan lett økes i størrelse med flere bukter langs begge sidene. Dersom en ønsker at matta skal kunne lages med en sammenhengende tråd, må en sørge for at antallet bukter i de to sidene ikke er delelig med hverandre (f.eks. 6/3 eller 12/4 o.l.). Vi sier at antallet bukter er *innbyrdes primiske*.

Introduksjon til taumatte-matematikk

Mattene kan lett tegnes i et regnemaskinprogram dersom en framstiller funksjonene:

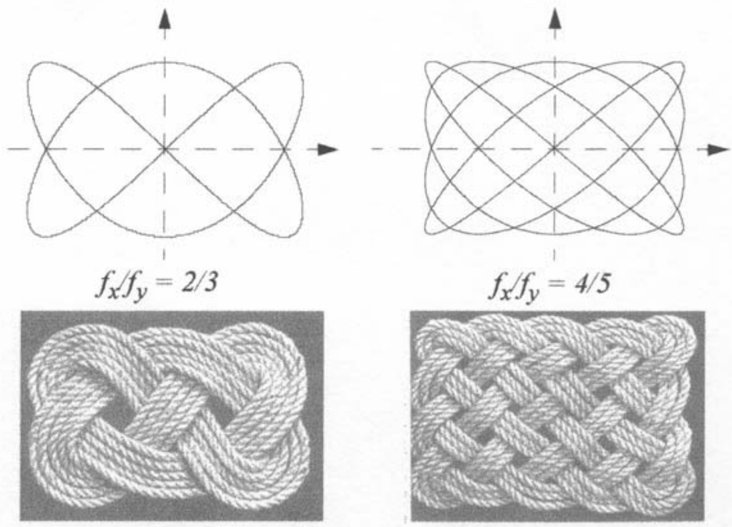
$$x = A_x \sin(2\pi f_x t)$$

$$y = A_y \cos(2\pi f_y t)$$

Velg for eksempel $A_x = 1.5$, $A_y = 1$, $f_x = 2$, $f_y = 3$ og $t = 0.01 \cdot n$, hvor n gies verdiene 1 til 100.

Selv om denne matematikken tilhører videregående skole og vel så det, kan det være spennende for de yngre elevene å vite at det går an å tegne ut et slikt mønster ved hjelp av matematikk.
Figur 5 viser den matematiske matta øverst, og taumatta nederst. Kanskje kan vi tillate oss å kalle denne type matematikk for *taumatte-matematikk* [1], [2]?

Vi skal senere se på Winplot som er et grafisk tegneprogram for å tegne ut matematiske funksjoner.



Figur 5 Simmulering av utviklingsmatter

Mønster i asiatisk og afrikansk kultur

Vi skal nå se på matematikk i kunst og håndverk i et noe videre perspektiv og vil berøre temaet *etnomatematikk*, som i første rekke er vokst fram i den 3. verden som en reaksjon på deres frigjøring fra koloniherredømmet.

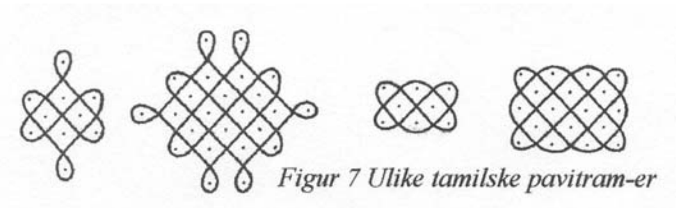
Etnomatematikken springer ut fra den lokale kultur og synliggjør matematikken i håndverk og religiøs ornamentikk. Det kan være mønstre i sanden, ornamenter risset inn i stein eller på tre, eller til og med strikkemønster slik vi for kjenner dem fra f.eks. Selbu-rosa. En av etnomatematikkens ivrigste talsmenn har vært *Paulus Gerdes* bosatt i Mosambik.

Riskornene som beskyttet huset

Gerdes forteller (fritt gjengitt) [3]:

> *Under innhøstningen i måneden Margali (midten av desember til midten av januar) setter kvinnene i Syd-India seg ned foran huset sitt hver morgen og tegner mønstre. Margali er en tid på året da de ofte er utsatt for epidemiske sykdommer. Mønstrene de lager er derfor ment som en bønn til guden Shiva om beskyttelse.*
>
> *Som en forberedelse rydder de et firkantet område foran inngangsdøra, dynker det med vann og dekker området med kumøkk. Den plane flata dekkes med regelmessige merker. Disse merkene benyttes som referansepunkter når selve mønstret skal tegnes.*
>
> *Så tar de litt ris mellom fingrene, gnir dem lett mot hverandre slik at risen drysser i en fin stråle ned på flata. Alltid mellom punktene og helst i en kontinuerlig sammenhengende linje.*

Figur 6 Brahma's knute



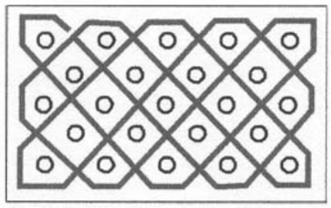
Figur 7 Ulike tamilske pavitram-er

Et mønster formet som en enkel sammenhengende kurve kalles en ***pavitram***, som betyr *ring* eller *ren*. Hensikten med en pavitram er å skremme bort onde ånder eller djevler. ***Brahma's knute*** er et typisk eksempel på et tradisjonelt *Tamilsk* mønster.

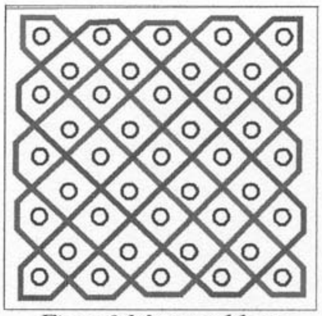
I figur 7 finner vi mønstre som vi drar kjensel på fra taumatter. La oss se nærmere på hvordan vi kan fremstille mønster som vist lengst til høyre på figur 7.

Vi tegner først opp referansepunktene (ringer) slik som de Tamilske kvinnene gjorde. Så kan vi begynne å tegne.

Vi starter et vilkårlig sted og tegner diagonalt mellom punktene til vi møter rammen. Der bøyer vi av slik at avbøyningsvinkelen blir minst mulig. I hjørnene legges kurven i en 90° vinkel. Vi legger merke til at mønstret dannes av en sammenhengende linje (se figur 8) . Dersom den lages i tau er dette en utviklingsmatte.



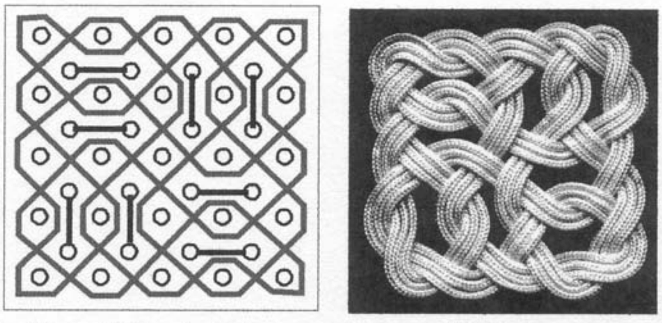
Figur 8 Pavitram lik en utviklingsmatte



Figur 9 Mønster lik en diagonalmatte.

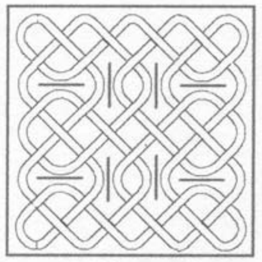
La oss også lage et kvadratisk mønster (5 x 5). Dvs. det består av fem punkter langs hver av sidene. I tillegg har vi tegnet inn hjelpepunkter mellom de fem radene og de fem kolonnene. Dersom vi gjennomfører samme tegneøvelse som i tilfellet over, får vi en kvadratisk matte som vist i figur 9.

Vi ser at dette mønstret har 5 løkker som ikke henger sammen. Som taumatte er dette en *diagonalmatte*.

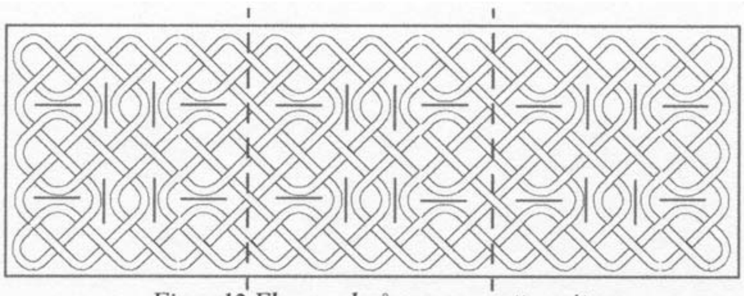


Figur 10 Konstruksjon av pavitram ved hjelp av sperrer Mønster (t.v.) og realisert i nylon tau (t.h.)

La oss legge inn noen sperrer (svarte streker mellom noen av referansepunktene) midt inne i mønstret. I figur 10 er det lagt inn sperrer på 8 forskjellige steder. Disse sperrene kan legges hvor som helst, men er her lagt slik at vi skal få fram et spesielt mønster. Når vi kommer til en av sperrelinjene, må vi bøye av og gå inn i nærmeste diagonal. Vi får nå dannet et nytt mønster som gir en sammenhengende linje. Diagonalmatta blir med ett mye mer spennende. Vi ser at sperrene danner åpninger som knapphull i et plagg. En slik figur kan lages i tau dersom vi lar tauet vekselvis gå over og under som vist i figur 10.



Figur 11 Eksempel på en pavitram



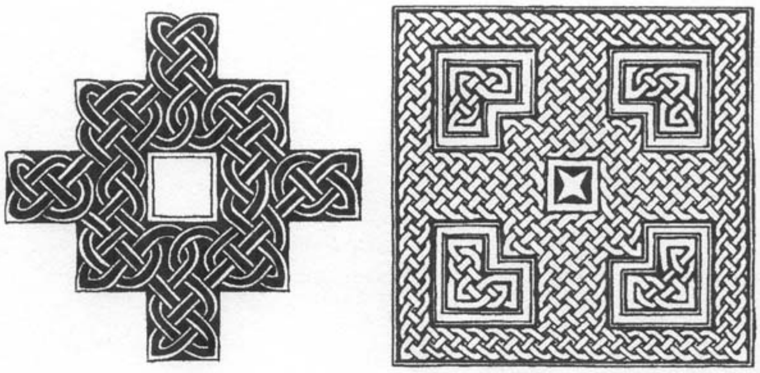
Figur 12 Eksempel på sammensatt pavitram

I figur 11 har vi lagt inn sperrene på en litt annen måte. Dette gir et mønster av en noe annen karakter. Vi legger imidlertid merke til at mønstret fortsatt er en pavitram, dvs. en sammenhengende kurve. Tre slike mønster kan kobles sammen ved at vi legger dem ved siden av hverandre, for så å knytte mønstrene sammen der de møtes (se figur 12).

Lignende teknikker for å frembringe mønstre finner vi i keltisk kunst [4] og i sandtegninger hos stammefolk i Angola, Zaïre og Zambia [7].

Figur 13 viser et par eksempler på typiske keltiske mønstre, brukt bl.a. for utsmykning av boksider eller hugget i stein eller tre.

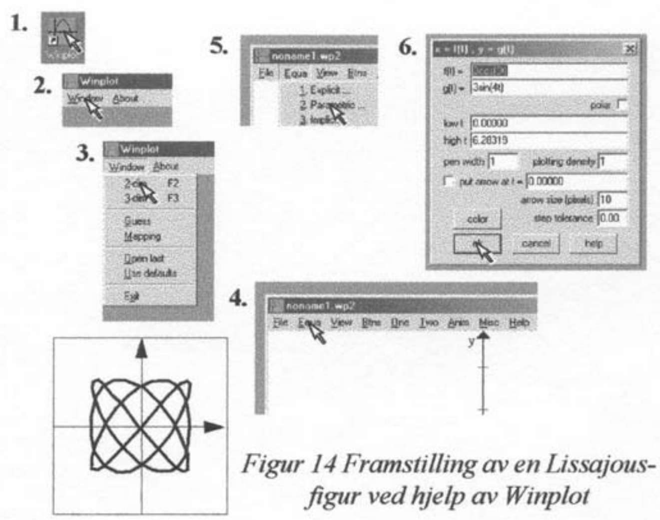
En god referanse for den som ønsker å fordype seg i etnomatematikk generelt er Marcia Aschers bok "Ethnomathematics" [5].



Figur 13 Flettemønster hentet fra keltisk kultur

Taumatte matematikk

Vi skal i dette avsnittet se nærmere på hvordan vi kan bruke matematikken til å fremstille mønster til ulike taumatter.



Figur 14 Framstilling av en Lissajous-figur ved hjelp av Winplot

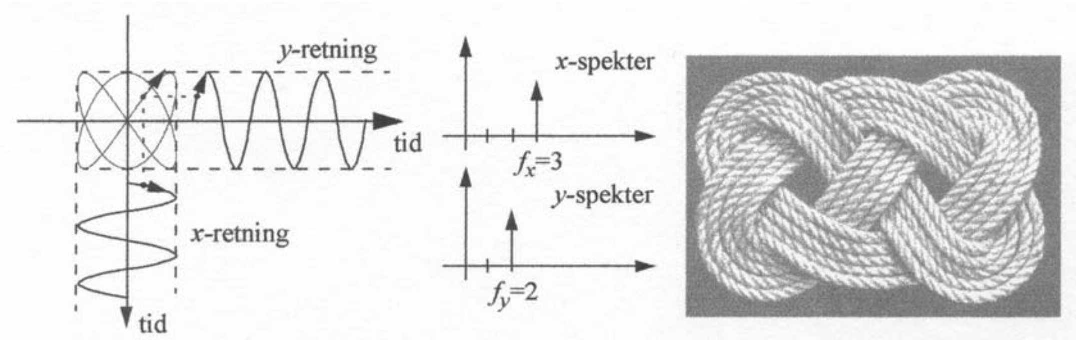
Winplot

Før vi går i gang med å studere ulike taumattemodeller skal vi se på Winplot som er et grafisk dataprogram som er beregnet på å tegne ut matematiske funksjoner i to og tre dimensjoner. Programmet kan hentes fra **http://math.exeter.edu/rparris/winplot.html.**

Ved noen få enkle tastetrykk kan en lett få fram en funksjon som beskriver en hvilken som helst utviklingsmatte. Figur 14 viser hvor lett dette kan gjøres.

Utviklingsmatta

En Lissajous-figurer (t.v. figur 15), kan beskrives av en bevegelse som er sammensatt av *to* sinusfunksjoner som er orientert vinkelrett på hverandre. *Spekteret* i x- og y-retning viser på en grafisk måte hvordan frekvenskomponenten i *x*- og *y*-retningen er plassert i forhold til hverandre.



Figur 15 Lissajous-figur eller utviklingsmatte satt sammen av to sinusfunksjoner

Det er ikke vanskelig å se at en *Lissajous-figur* og en *utviklingsmatte* til forveksling ligner hverandre. Det er derfor ikke overraskende at disse to kan beskrives med de samme matematiske uttrykkene. Vi kan dermed finne "*spekteret"* til taumatta på samme måte som vi kan finne spekteret til en Lissajous-figur.

Det er et stort utvalg taumatter av ulike slag. Spørsmålet er om det er mulig også å beskrive andre typer taumatter på tilsvarende måte. La oss se nærmere på *tyrkerrosetten.*

Tyrkerosetten

Tyrkerrosetten består av bukter som slynger seg over hverandre. Mønsteret framkommer dersom vi lar to vektorer rotere med forskjellig rotasjonsfrekvens, hvor den ene vektoren er festet til spissen av den andre. Mønsteret tegnes av spissen til den ytterste vektoren.

En tyrkerrosett har følgende karakteristiske trekk:

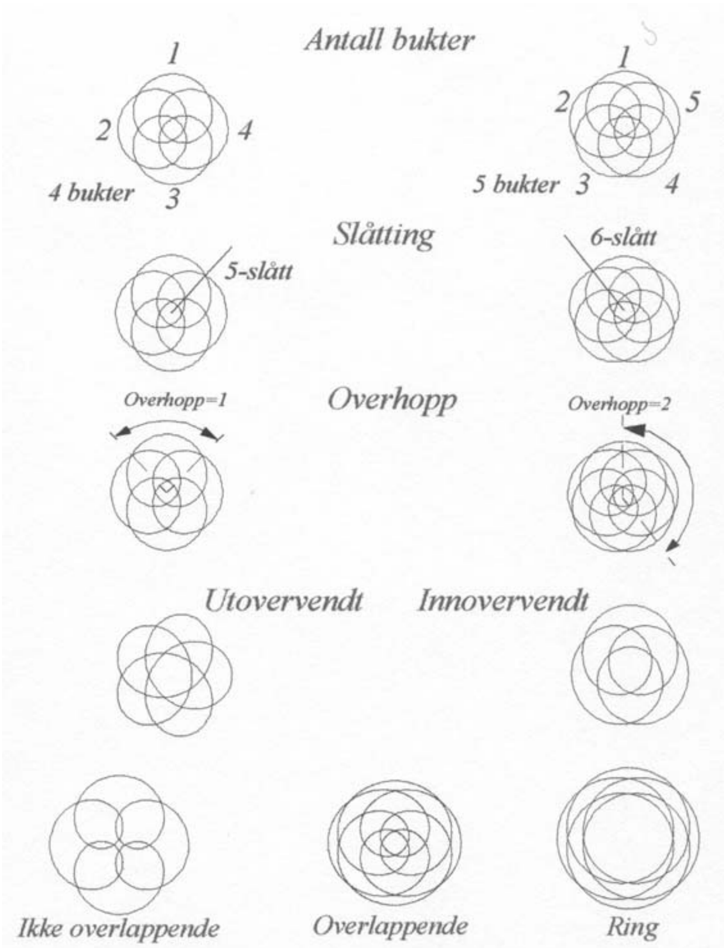
Antall bukter angir hvor mange bukter vi kan telle når vi går oss rundt langs kanten av rosetten.

Dersom vi trekker en stråle fra sentrum av rosetten og ut til kanten, angir **slåttingen** antall krysninger mellom strålen og rosettens trasé fra sentrum og ut til ytterkanten.

Rosettene har normalt mer enn en bukt. Følger vi traséen til rosetten, vil vi noen ganger oppleve at to etterfølgende bukter ligger som *naboer*, mens de andre ganger ikke vil være naboer. Hvor mange bukter som ligger mellom to etterfølgende bukter, kalles **overhopp**. Er to etterfølgende bukter naboer sier vi at rosetten har overhopp lik 1.

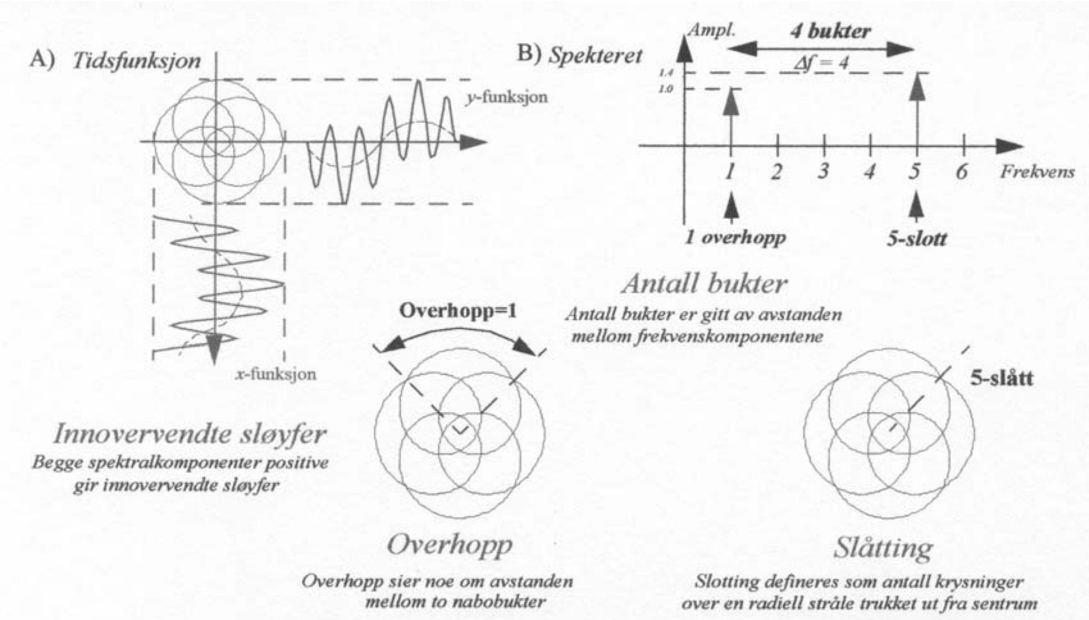
Ved observasjon ser vi også at enkelte rosetter har **utovervendte** bukter, mens andre har **innovervendte** bukter.

I tillegg har noen rosetter bukter son overlapper sentrum av rosetten, mens andre ikke overlapper sentrum. De førstnevnte kalles **overlappende**, mens de sistnevnte kalles **ikke-overlappende** eller **ringer**. Eksempler på de ulike karakteristika for tyrkerrosetten er vist i figur 16.



Figur 16 Ulike karakteristiske trekk ved tyrkerrosetten

Ved å la et punkt følge langs traséen til rosetten kan vi tegne ut to tidsfunksjoner i henholdsvis *x*- og *y*-retning (figur 17 A)). Disse viser, ved observasjon to funksjoner som begge er satt sammen av to frekvenskomponenter. En langsom og en raskere. Disse to frekvenskomponentene kan fremstilles som to spekter, et i *x*-retning og et i *y*-retning. Det viser seg at alle rotasjonssymmetriske rosetter har ensartede spekter i *x*- og *y*-retning, dvs. at frekvensene er plassert på samme sted i spekteret, men fasen er forskjellig. Vi har derfor valgt bare å tegne opp det ene.



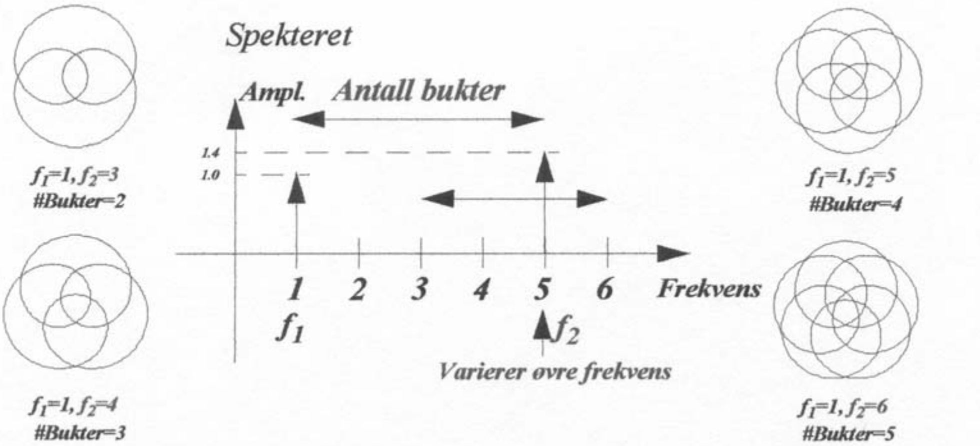
Figur 17 Tidsfunksjon, spekter og noen karakteristiske egenskaper for tyrkerrosetten.

Figur 17 viser sammenhengen mellom plasseringen av frekvenskomponentene og de to karakteristiske parametrene *overhopp* og *slåtting*. Nedre frekvenskomponent angir overhoppet, som i dette tilfellet er lik 1, dvs. at etterfølgende bukter er naboer. Mens øvre frekvenskomponent angir ståttingen, som i dette tilfellet er 5. Avstanden mellom de to frekvenskomponentene angir antall bukter, som i vårt eksempel er 4.

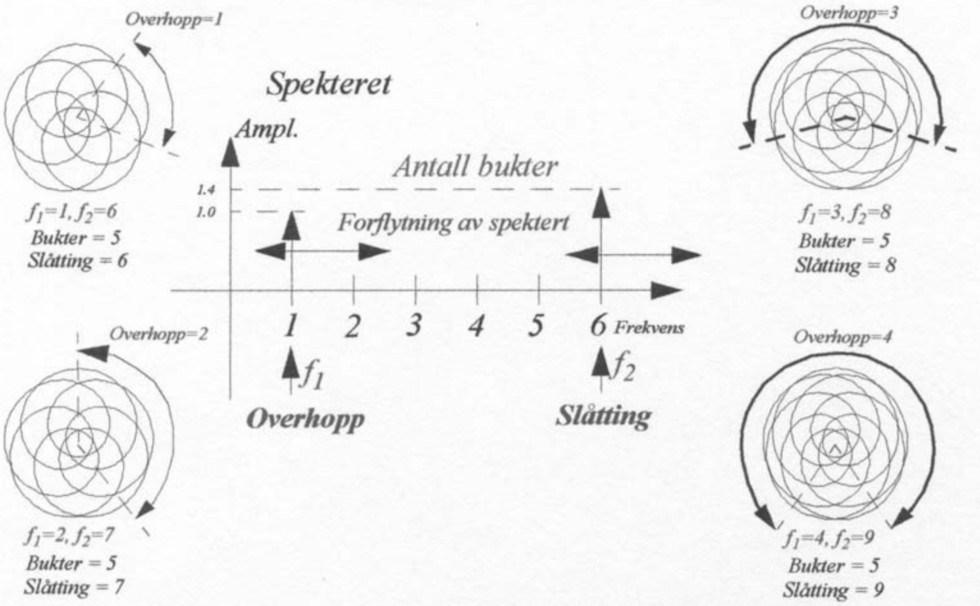
Ved hjelp av Winplot og følgende ligningssett, kan vi lett simulere ulike tyrkerrosetter. f_1 angir nedre og f_2 øvre frekvenskomponent. Lengden på de to vektorene angis med A_1 og A_2.

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos f_1 t + A_2 \cos f_2 t \\ y(t) &= A_1 \cos f_1 t + A_2 \cos f_2 t \end{aligned} \qquad 0 < t < 2\pi \tag{3.1}$$

Figur 18 og 19 viser hvordan mønsteret kan endres ved å flytte og forskyve frekvenskomponentene til tyrkerrosetten.



Figur 18 Differansen mellom frekvenskomponentene gir antall bukter. Ved å endre øvre frekvenskomponent, endres antall bukter

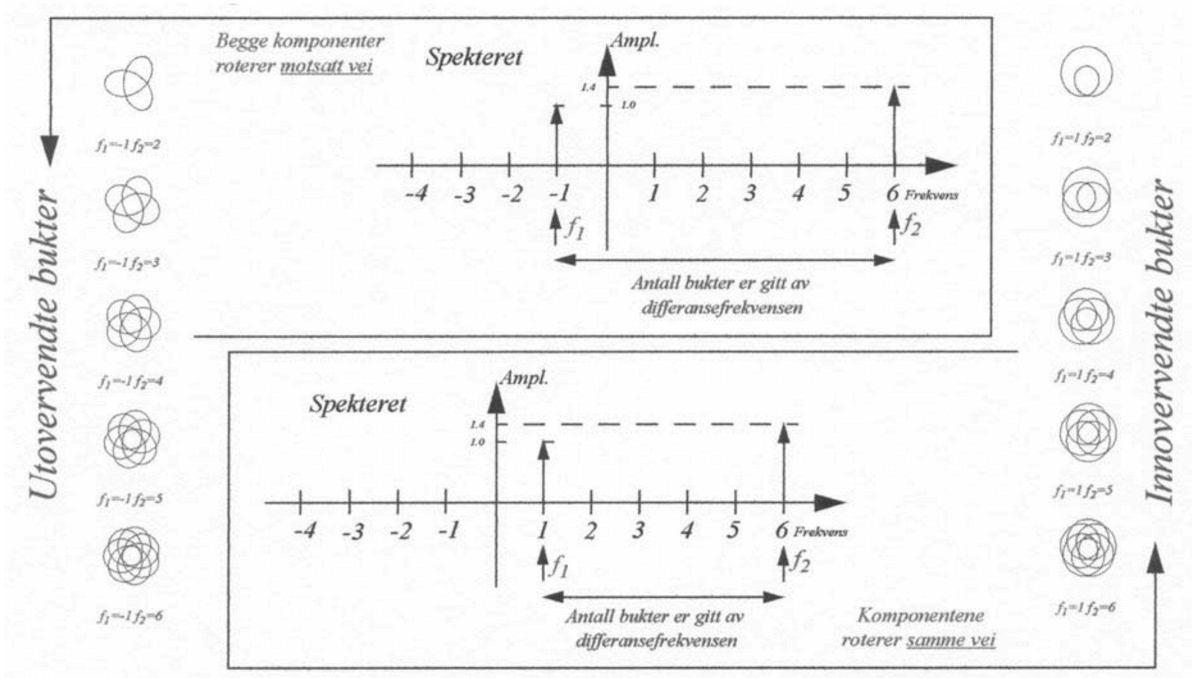


Figur 19 Forskyves hele spekteret, endres både slåtting og overhopp, mens antall bukter forblir konstant

Dersom spekteret forskyves mot høyre slik at nedre frekvenskomponent blir negativ, betyr dette at de to vektorene roterer motsatt vei.

Selv om spekteret har en negativ frekvenskomponent så angir differansen antall bukter. Vi legger også merke til at buktene blir utovervendte med en negativ frekvenskomponent og innovervendte når begge frekvenskomponentene roterer i samme retning

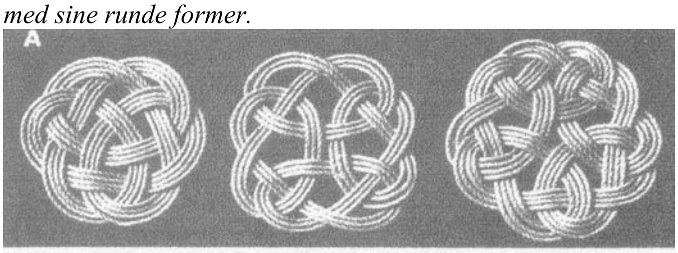
Figur 21 viser to eksempler på tyrkerrosetter, en overlappende tyrkerrosett omgitt av en tyrkerring.



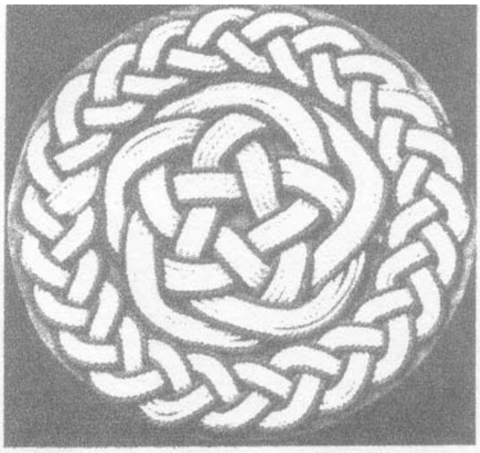
Figur 20 Eksempler på rosetter med positive og negative frekvenskomponenter

Kringlerosetten

Kringlerosetten er en taumatte som er satt sammen av tre eller flere kringleformede grunnfigurer. Rosetten er svært dekorativ med sine runde former.



Figur 22 Tre eksempler på kringlerosett [8]



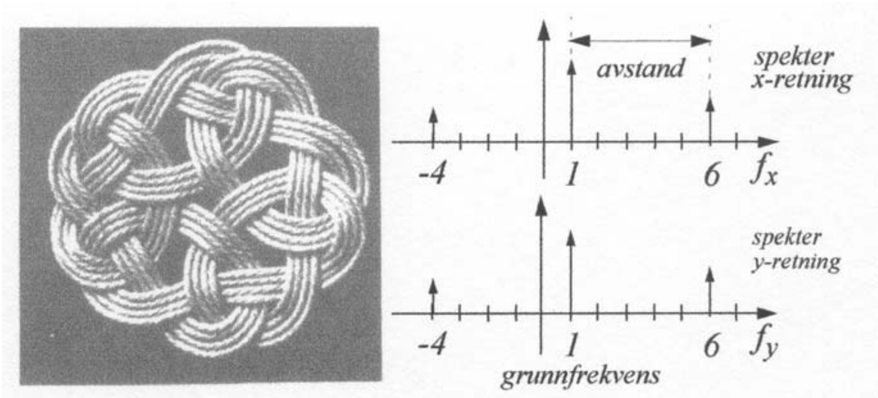
Figur 21 En treslått tyrkerring ytterst og en fireslått tyrkerrosett inni

Også denne rosetten kan beskrives matematisk på tilsvarende måte som tyrkerrosetten. Vi har sett at tyrkerrosetten kan beskrives ved hjelp av to roterende vektorer. Kringlerosetten beskrives ved hjelp av *tre* roterende vektorer. Dette gjenspeiles i de tre leddene i hver av ligningene (3.2). Hvert ledd beskriver en av de roterende vektorene.

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \cos f_1 t + A_2 \cos f_2 t + A_3 \cos f_3 t \\ y(t) &= A_1 \sin f_1 t + A_2 \sin f_2 t + A_3 \sin(f_3 t) \end{aligned} \qquad 0 < t < 2\pi \qquad (3.2)$$

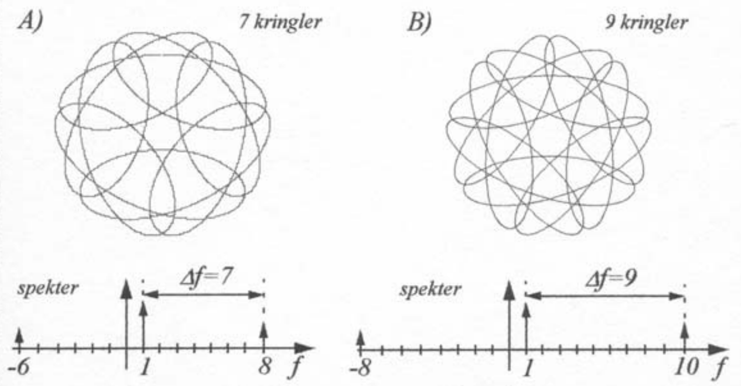
Spekteret til hver av de to funksjonene bestemmes ved hjelp av *Fourier-analyse.*

Studerer vi spekteret til kringlerosetten nærmere, ser vi at det består av tre frekvenskomponenter med ulik amplitude. Vi ser også at spekteret i *x*- og *y*-retning er likt. *Avstanden* mellom komponentene er *5* og lik antall *kringler* i rosetten. *Grunnfrekvensen* har verdien 1 og er lik antall runder tauet gjør rundt sentrum når rosetten legges.

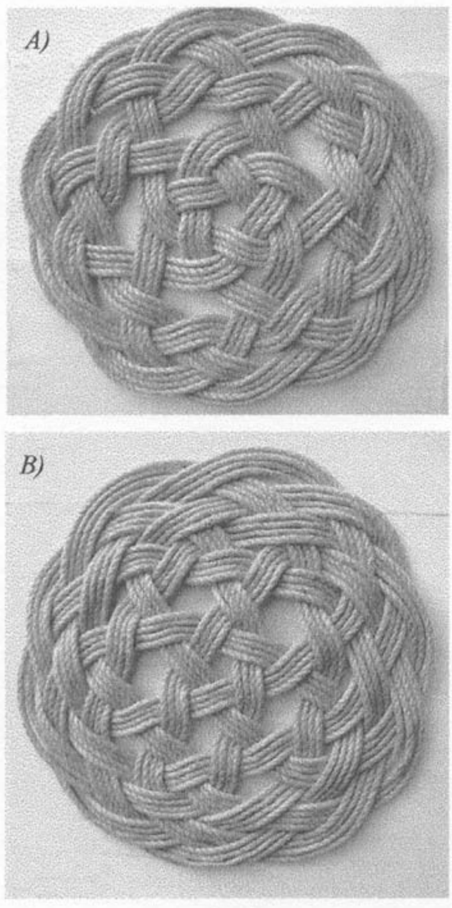


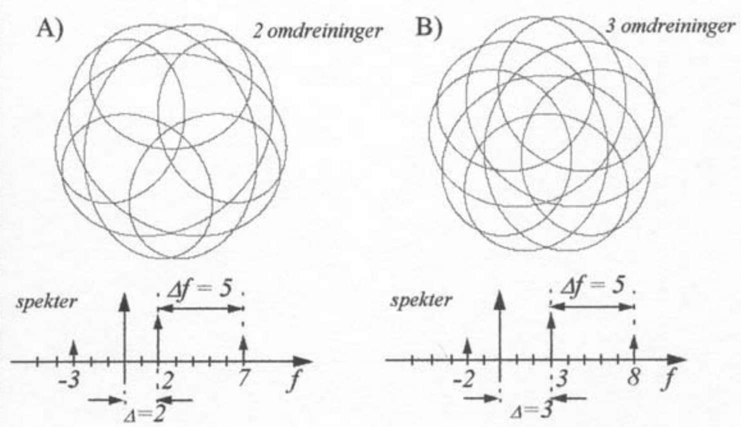
Figur 23 Kringlerosett med tilhørende spekter til høyre

Ved å endre på amplitudeverdiene (A_1, A_2 og A_3), øke avstanden mellom frekvenskomponentene (f_1, f_2 og f_3) eller forskyve spekteret, kan vi finne nye varianter av kringlerosetten.



Figur 24 To ulike varianter av kringlerosetten
Avstanden mellom frekvenskomponentene gir antall kringler





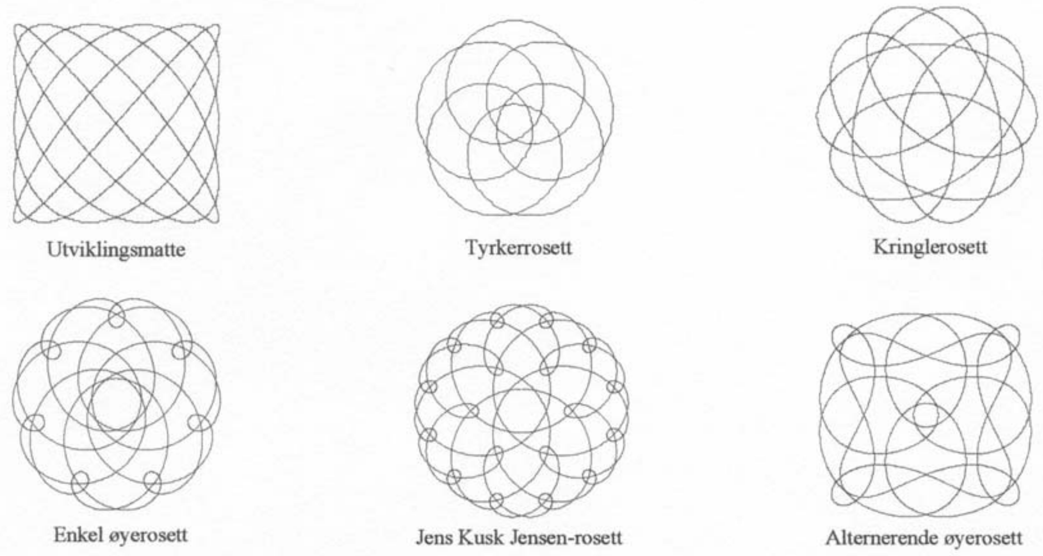
Figur 26 Varianter av kringlerosetten laget med hamptau

Figur 25 Forskyvningen av spekteret tilsvarer antall omdreininger

Figur 26 viser hvordan kringlerosetten i figur 25 A) og B) tar seg ut når den realiseres ved hjelp av hamptau.

Høyere ordens taumatter

Tilsvarende kan høyere ordens matter analyseres, syntetiseres og varieres i det uendelige. Figur 27 viser en rekke forskjellige matter og rosetter som er syntetisert og variert ved hjelp av Winplot. En alternerende øyerosett har i alt 36 parametere som kan endres.

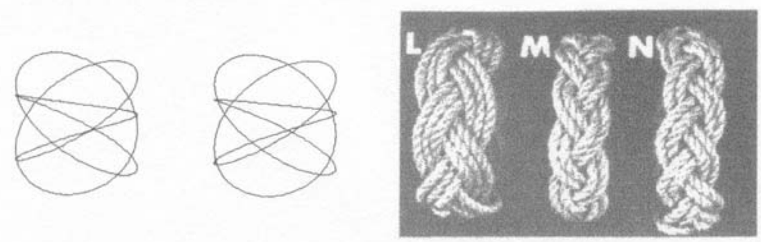


Figur 27 Tradisjonelle og nye rosetter simmulert ved hjelp av Winplot

Tredimensjonale taumatter (tyrkerknopen)

Det er også mulig å syntetisere 3-dimensjonale matter. Disse er i virkeligheten knuter når de realiseres ved hjelp av tauverk. En *tyrkerknop* (vanlig benyttet som tørkleknute) er en 1. ordens knute som også kan betegnes som en 3 dimensjonal Lissajous-figur (eller utviklingsmatte).

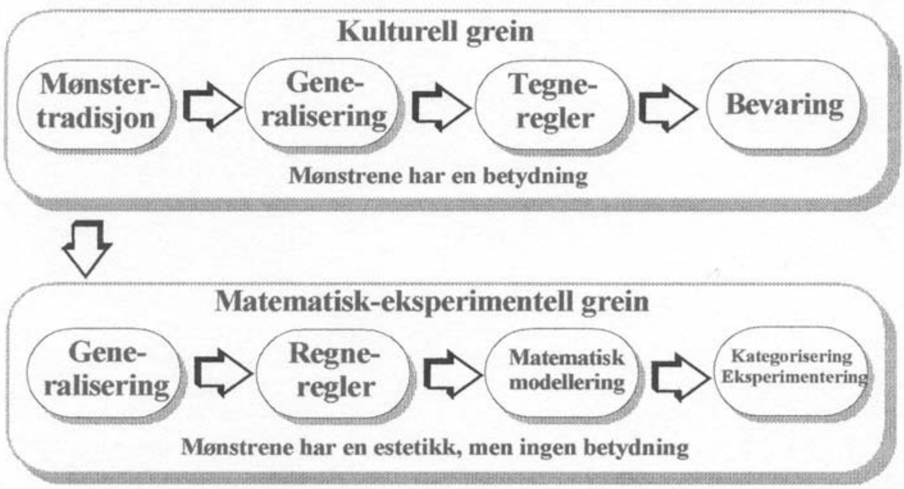
For nærmere beskrivelse av sammenhengen mellom Lissajous-figurer og taumatter se [2].



Figur 28 Tyrkerknopen eller 3-dimensjonale Lissajous-figurer
A) Stereoskopisk bilde av matematisk beregnet tyrkerknop
B) Tre tyrkerknoper laget i tauverk [8]

Hva er så hensikten med å gjøre disse mønstrene matematiske?

Vi finner en form og vi finner reglene for hvordan denne formen framkommer. Disse reglene generaliseres slik at de kan brukes til et hvert tilfelle innen en familie av mønster. Reglene kan da enten bli "tegneregler" som føres videre i en kulturell tradisjon eller de kan "matematiseres" slik at matematiske ligninger kan brukes til å modellere mønster.



Figur 29 Mønster i kultur og matematikk

I en kulturell tradisjonen vil tegnereglene brukes til å bevare mønstrene for framtidige generasjoner. De gjør at mønstrene og fremstillingen av dem blir lettere å huske og lære. Mønstrene har som oftest en symbolsk betydning og det er ofte denne symbolske betydningen som er det sentrale og ikke den estetiske utformingen. I denne tradisjonen endres mønstrene meget langsomt, og en er opptatt av bevaringen framfor nyutviklingen.

Når symbolet "matematiseres" er dette for å kunne plassere det inn i en kategori (f.eks. innen en eller annen symmetrikategori). Matematikken er dessuten et unikt verktøy til å eksperimentere med varianter og videreutvikle mønsteret.

I dette foredraget/workshopen har vi benyttet begge disse måtene å behandle flettemønster på, og vi har oppdaget hvilke muligheter som ligger i de ulike måtene å generalisere mønstertegningen på.

Vi har dessuten sett hvordan de ulike metodene for analyse av mønstrene har avdekket nye sider og muligheter for videreutvikling. Figur 29 oppsummerer forskjellene i den kulturelle og den matematisk-eksperimentelle greina.

Referanser

[1] Nils Kr. Rossing, *"Pendeltegning"*, Vitensenteret 2002

[2] Nils Kr. Rossing, Christoph Kirfel, *"Matematisk beskrivelse av Taumatter"*, 2003, ikke utgitt ennå

[3] Paulus Gerdes, *"Reconstruction and extension of lost symmetries: Examples from the Tami of south India"*, Computers & mathematics with applications, vol 17, 1989

[4] Aidan Meehan, *"Cletic Design - Knotwork The Secret Method of the Scribes"*, Thames and Hudson 1996, 2'nd ed. ISBN 0-500-27630-7

[5] Marcia Ascher, *"Ethno Mathmatics"*, Brooks/Cole Publishing Company 1991, ISBN 0-534-14880-8 Universitetsbiblioteket i Oslo)

[6] Paulus Gerdes, *"Ethnomathematics and education in Africa",* Stockholms Universitet jan. 1995, Institute of Internatinal Education

[7] Paulus Gerdes, *"Sona Geometry - Reflections on the tradition of sand drawings in Africa South of Equator"*, Volume 1, Instituto Superior Pedagógico Mocambique 1994

[8] Kaj Lund, "Måtter og rosetter", Borgen 1972, 3. opplag

Fördjupad tal-uppfattning på ett aktivt sätt

Av Kerstin Sanden og Camilla Söderback

*(**Kerstin Sandén** (ksanden@abo.fi) är lektor vid Vasa övningsskola och arbetar med barn i förskolan och åk 1-6. **Camilla Söderback** (: csoderba@abo.fi) är matematiklärare i åk 7-9 och gymnasiet vid samma skola. Vasa övningsskola är praktikskola för blivande lärare.)*

Fördjupad taluppfattning på ett aktivt sätt

Under workshopen presenterar vi och arbetar med ett eget material vi utarbetat för eleverna. Det innehåller åldersanpassade övningar, förslag och idéer för hur man som lärare kan stärka elevernas taluppfattning och förståelse för positionssystemet. Materialet är gjort så att förskolbarnen fördjupar förståelsen för och analyserar talen 0-10 medan de äldre eleverna bygger upp egna talsystem och arbetar med främmande baser.

Bakgrund

Som lärare vid Vasa övningsskola ville vi ta tillvara de möjligheter som ges då vår skola omfattar såväl förskola, årskurserna 1-9 som gymnasium. Dels ville vi som lärare utbyta erfarenheter och därtill få en inblick i hur matematikämnet undervisas i en annan åldersgrupp. På lång sikt önskade vi skapa samarbete mellan olika lärarkategorier för att underlätta kontinuiteten i barnens matematikundervisning.

Vi valde att jobba med en fördjupad taluppfattning eftersom detta område inte är specifikt åldersbundet och vi såg ett behov av att fördjupa förståelsen för detta. Ett sätt att fördjupa det här var att räkna med andra baser än tio och få en inblick i främmande talsystem. Det kändes speciellt utmanande och intressant eftersom våra kursplaner och läromedel inte ger räkning med andra baser stort utrymme.

Vision

Vårt mål var att fördjupa förståelsen av vårt talsystem på två olika sätt:

1. Ge barnen en inblick i talsystemets utveckling och matematikens kulturhistoria.
2. Låta barnen bekanta sig med främmande baser och räkna i andra talsystem.

Positionssystemet och vårt talsystem är svårbegripligt för många barn. Ännu i gymnasieålder har en del av eleverna svårt att fullständigt förstå vårt positionssystem. Hur kan vi med samlad erfarenhet av undervisning i olika åldersgrupper tillsammans skapa material och metoder som underlättar förståelsen för detta? Vilka är elevreaktionerna i de olika grupperna och hur åldersrelaterade är de?

Vårt talsystems kulturhistoria

Vi har på ett naturligt sätt försökt ge matematikundervisningen en fördjupad och intressant dimension genom att belysa matematikens kulturhistoria. Då vi tagit upp talsystemets utveckling i historiskt perspektiv anser vi att vi ökat motivationen och förbättrat förståelsen för positionssystemet uppbyggnad. Under lektionerna har vi gett kunskap om och fört gemensamma diskussioner med eleverna om hur vårt nuvarande sätt att skriva tal utvecklats från enkla streck och symboler.

Dagmar Neuman, bland flera andra, hävdar att mycket tyder på att barnen intelligensutveckling följer den historiska kunskapsutvecklingen. Människorna behövde flera tusen år på sig för att utveckla positionssystemet. Därför är det rimligt att anta att detta är en kunskap som barnen behöver god tid på sig för att lära sig. Som lärare tror vi att en inblick i talsystemets utveckling förbättrar elevernas förståelse.

Den historiska orsaken till att vi fick ett talsystem var att människan hade ett behov av att få översikt över större mängder. Det är lättare att få en uppfattning av mängden om man delar den i grupper. Principen att dela in i lika stora grupper är grundvalen för positionssystemet.

Arne Engström menar att det är viktigt att barnet försätts i situationer där han/hon själv upptäcker behovet av en symbol. De yngre eleverna har förberetts för vårt talsystem samt behovet av det genom att vi låtit dem göra undersökningar av större antal där de dragit streck och då sett ett behov att gruppera och göra streckmängden mera lätthanterlig. De äldre barnen har uppmuntrats att använda 5-gruppen (handen) då de skapat egna talsystem. De har även bekantat sig med basen 2.

Räkning i andra talsystem

Den stora landvinningen i matematikens historia är införandet av positionssystemet. I stället för att låta varje symbol ha ett bestämt värde låter man symbolens plats ha ett bestämt värde. När man gör det kan man klara sig med ett mycket begränsat antal symboler.

Förskolbarnen har fördjupat förståelsen för talen 0-10 genom att ge dem innehåll i sagor, teckningar, problemlösnings- och tredimensionella uppgifter. Siffersymbolen 0 har tagits i bruk då de haft behov av tiomängden (båda händerna). Additions- och subtraktionstabellen har nötts in så mångsidigt som möjligt.

De äldre barnen har arbetat med baserna 5 och 2. Vi har haft Kristin Dahl som inspirationskälla, då vi gjort vårt material. Barnen har i laborationerna upptäckt positionssystemets hemlighet och möjligheter. De har också insett behovet av siffran noll under sina laborationer med främmande talsystem.

Iakttagelser och tankar i nuläget

En gemensam iakttagelse är att detta arbete har varit mycket motiverade för såväl låg- som högpresterande elever i samtliga åldersgrupper. Vinningen är stor redan i att man uppnått detta. Arbetet lämpar sig väl som projektarbete.

Då barnen arbetat med främmande baser har avancerad huvudräkning ingått som en naturlig del. Fastän eleverna tilläts använda miniräknare använde de den mindre än förväntat och då främst som kontrollverktyg. Barnen var så hängivna uppgiften samt litade på sin huvudräkningsfärdighet att miniräknaren blev så gott som obehövlig. Vi hade inte räknat med att eleverna skulle få så mycket träning i huvudräkning på köpet.

Under arbetets gång har många intressanta frågor väckts och diskuterats. Varför dominerade användandet av romerska siffror den europeiska kulturen under så lång tid? Finns det flera fördelar med romerska siffror än den odelade femgruppen? Vad bidrog till att vi idag använder arabiska siffror? När och hur är det mest naturligt att införa talet noll i undervisningen? I vilka situationer grupperar vi dagligen på ett annat sätt än med tio som bas? Kan vi jämföra dagens streckkoder med historiska primitiva streck?

Litteratur

Butterworth B. (2000). *Den matematiska människan*. WSOY
Dahl, K. (1991). *Den fantastiska matematiken*. Falkenberg: Fischer & co
Dahl, K. (1999). *Kvadrater, hieroglyfer och smart kort-mera matte med mening*.
Gran B. (1998). *Matematik på elevens villkor*. Lund: Studentlitteratur
Häggblom L. (1994) *Matematik på barnets villkor.* Vasa: ÖH/Åbo Akademi
McLeish J (1994). *Matematikens kulturhistoria*. Forum
Neuman, D. (1989). *Räknefärdighetens Rötter*, Liber, Utbildningsförlaget
Nystedt L. (1995). *På tal om tal*. Stockholm: Instant mathematics

Graph theory puzzles

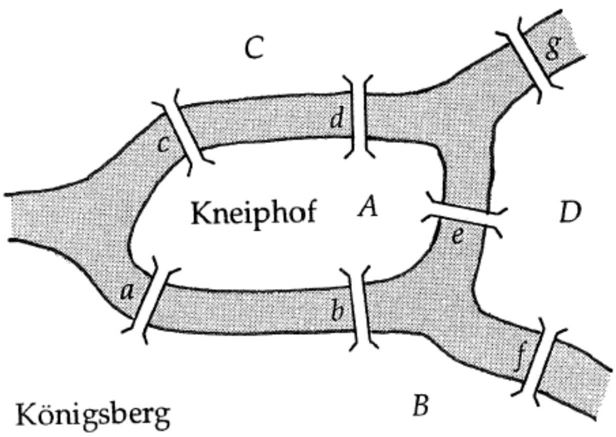
Av Robin Wilson

The Open University, UK
R.J.Wilson@open.ac.uk

In this article are a number of recreational puzzles whose investigation originally gave rise to the subject now known as *graph theory*. However, these puzzles can be enjoyed in their own right, without any knowledge of graphs, and are presented here for you to try.
This article is in two parts. In the first part I present the puzzles, in five sections. In the second, I discuss their solutions.

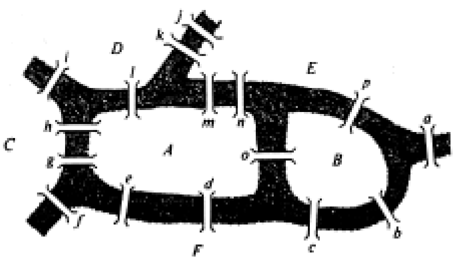
Part 1: The puzzles

A. Islands and bridges
In 1735 Leonhard Euler presented a solution of the Königsberg bridges problem: this problem asks you to go for a walk around the city of Königsberg (shown below) in such a way that you cross each of the seven bridges exactly once.

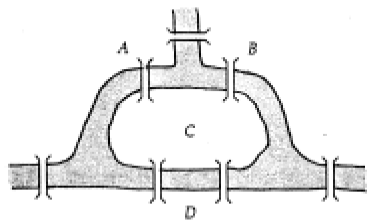


The city of Königsberg
Euler proved that such a walk is impossible. You might like to discover why, and then try to find a walk that crosses each of the bridges just once in each of the following arrangements of islands and bridges. *Can you discover a general rule that tells you when such a walk is possible? And if there is such a walk, can you find one that begins and ends at the same place?*

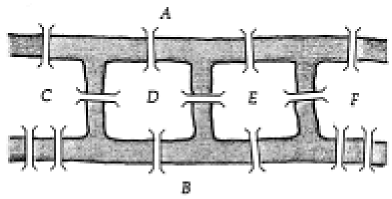
(a)



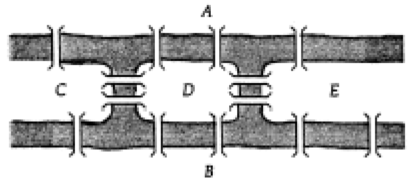
(b)



(c)

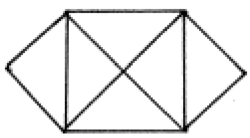


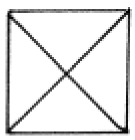
(d)



B. Drawing pictures

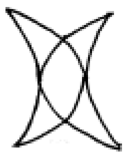
Consider the picture shown below on the left. If you experiment a little, you will find that you can draw it without lifting your pen off the paper and without traversing any portion of line more than once. However, it is impossible to do this with the picture on the right – you need two separate penstrokes to cover the entire picture.



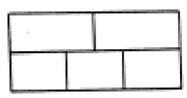


How many separate penstrokes do you need to draw each of the following pictures without traversing any portion of line more than once?

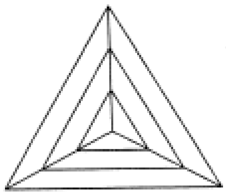
(a)



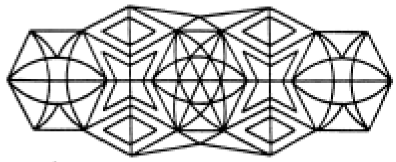
(b)



(c)

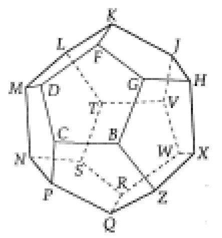


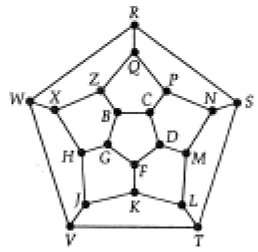
(d)



C. A Voyage around the World

In 1856 Sir William Rowan Hamilton devised a game in which you have to go around the World visiting twenty cities labelled with the consonants of the alphabet: Brussels, Canton, Delhi, . . . , Zanzibar, and returning to the start. He depicted the world as a dodecahedron whose 20 vertices correspond to the cities, and he put various restrictions on the cyclical path.



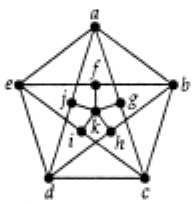


(a) In how many ways can you complete such a cycle if you start with BCPNM?

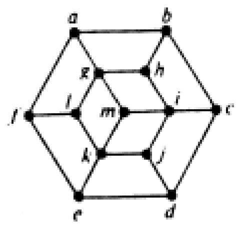
(b) In how many ways can you complete such a cycle if you start with JVTSR?

We can similarly ask whether it is possible to visit all the cities in other diagrams, always returning to the starting point. *Is this possible for each of the following diagrams?*

(c)

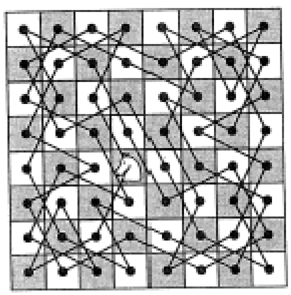


(d)



D. Knight's-tour problems

On a chessboard a knight always moves two steps in one direction and one step in a perpendicular direction. The problem of finding a knight's tour in which a knight visits all 64 squares of an 8 × 8 chessboard and returns to its starting point is a very old one. A solution appears below.

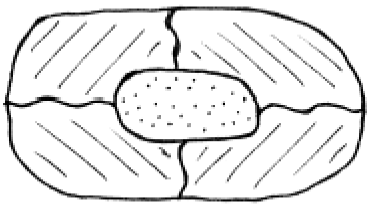


Can you find a knight's tour on each of the following chessboards in which a knight visits every square and returns to its starting point?

(a) 4 × 4   (b) 3 × 6   (c) 3 × 8   (d) 5 × 5   (e) 6 × 6

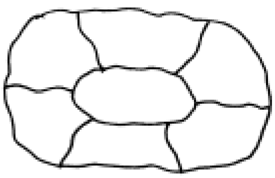
E. Map colouring

When colouring a map we want neighbouring countries to be differently coloured, so that we can tell them apart. The following map has been so coloured with three colours.

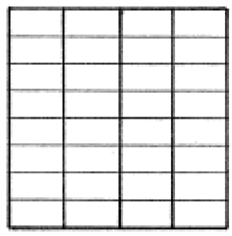


How many colours do you need to colour the countries of each of the following maps? (Note that, when two countries meet along a boundary line you must colour them differently; however, when two countries meet at a single point, you may, but need not, give them the same colour.)

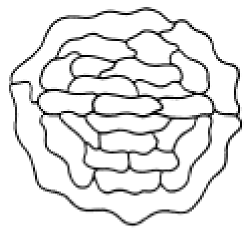
(a)



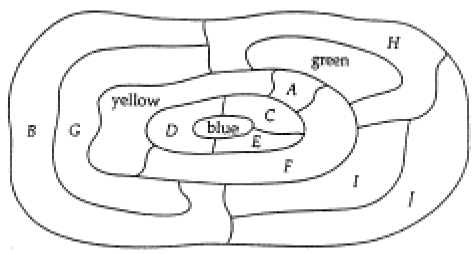
(b)



(c)



(d) The countries of the following map are to be coloured red, blue, green and yellow. If three countries are already coloured as shown, show that country A must *be coloured red. What colour is country B?*



Part 2: Discussion and solutions

A. Islands and bridges

Solution

(a) You can cross each bridge exactly once and return to your starting point – for example, start in region E and cross the bridges in alphabetical order, starting with a and ending with p.
(b) You can cross each bridge exactly once, but you must start in region A and end in region B (or vice versa) – a possible walk is $A \to B \to C \to A \to D \to C \to D \to B$.
(c) As in part (a), you can cross each bridge once and return to your starting point – for example, $A \to C \to B \to C \to D \to B \to E \to D \to A \to E \to F \to B \to F \to A$.
(d) As in part (b), you can cross each bridge once, but you must start in region B and end in region E (or vice versa) – for example,
$$B \to C \to A \to D \to C \to D \to B \to D \to A \to E \to D \to E \to B \to E.$$

Discussion
You may have discovered that the clue to these problems concerns whether the number of bridges into each region is even or odd. Since you need to exit each region that you enter, the total number of bridges into each region must be even – except possibly for the regions at the beginning and end of the walk. In fact, as Euler discovered:
if the number of bridges into each region is even, you can start anywhere, cross each bridge exactly once, and end at your starting point;
if there are exactly two regions with an odd number of bridges, you can start in either, cross each bridge exactly once, and end in the other;
if there are more than two regions with an odd number of bridges, there is no walk that crosses each bridge exactly once.
Thus, for the Königsberg bridges problem, the numbers of bridges are A 3, B 3, C 3, D 5, and so no walk is possible.
In part (a), the numbers are A 8, B 4, C 4, D 4, E 6, F 6, so a walk is possible, starting anywhere.
In part (b), the numbers are A 3, B 3, C 4, D 4, so a walk is possible, starting in A and ending in B.
In part (c), the numbers are A 4, B 6, C 4, D 4, E 4, F 4, so a walk is possible, starting anywhere.
In part (d), the numbers are A 4, B 5, C 4, D 8, E 5, so a walk is possible, starting in B and ending in E.

B. Drawing pictures

Solution

(a) One penstroke is needed.
(b) Four penstrokes are needed.
(c) Two penstrokes are needed.
(d) One penstroke is needed.

Discussion
The reason is similar to that given in *Section A*. Whenever you enter a meeting point of three or more lines, you must be able to leave it, so there must be an even number of lines at each

such point – except possibly for the beginning and end of each penstroke. So the number of penstrokes needed is half the number of 'odd points'. For example, the picture in part (c) has four odd points (the centre and the three vertices of the outer triangle), and so just two penstrokes are needed. In picture (d), there are just two odd points (on the far left and far right), so a single penstroke will suffice.

C. A Voyage around the World

Solution

(a) There are two voyages that start with *BCPNM* – these are:
BCPNMDFKLTSRQZXWVJHGB and *BCPNMDFGHXWVJKLTSRQZB*.
(b) There are two voyages that start with *JVTSR* – these are:
JVTSRWXZQPNMLKFDCBGHJ and *JVTSRWXHGFDCBZQPNMLKJ*.
(c) There is a cycle – for example, *abfeicgkhdja*.
(c) There is no such cycle.

Discussion
Such voyages are now called *Hamiltonian cycles*. To find them, it is helpful to erase those edges that cannot appear in such a cycle. For example, in part (a) where you start with *BCPNM*, the inclusion of the edges *BC* and *CP* excludes the edge *CD* – and similarly, you can erase the edges *PQ* and *NS*. Moreover, since you have erased *CD*, you must therefore include the edges *FD* and *DM*. Continuing in this way restricts the possibilities sufficiently for you to discover the required cycles easily. It is interesting that, whatever five letters you start with, the number of possible cycles must be 0, 2 or 4.

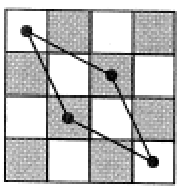
The cycle in part (c) can be found by inspection. To see why there is no Hamiltonian cycle in part (d), suppose that there is such a cycle. Now colour the point *a* red, its neighbours *b*, g and *j* blue, *their* neighbours red, and so on, until all points are coloured (so *a*, *c*, *e*, *h*, *j*, *l* and *m* are red and the others are blue). Then every edge has a red end and a blue end, so that the points on any Hamiltonian cycle must alternate in colour: red-blue-red-blue-… . But this means that the number of red points (which is 7) must equal the number of blue points (which is 6). This contradiction shows that no Hamiltonian cycle can exist.

D. Knight's-tour problems

Solution

(a) no (b) no (c) yes (d) no (e) yes

Discussion
Several such problems can be solved by looking at specific squares. In part (a), the only way of reaching opposite corner squares is shown in the following diagram. Since this already completes a cycle, a full knight's tour (visiting all 16 squares) is impossible.



Similar arguments show that the chessboards in parts (b) and (d) have no knight's tour – in part (b) consider the squares in row 2, columns 1 and 5, and in part (d) consider the four corner squares. Alternatively, in part (d), you can simply observe that a knight must alternate between black squares and white squares, and so a full knight's tour is possible only when the total number of squares is even, which is not the case here. The knight's tours in parts (c) and (e) can be found by inspection.

E. Map colouring

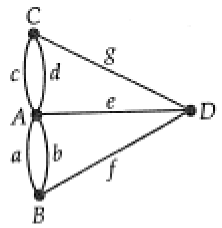
Solution

(a) 3 (b) 2 (c) 4
(d): country *B* must be coloured yellow.

Discussion
The colourings for parts (a), (b) and (c) can be found by inspection.
In part (d), country *A* can only be blue or red. If *A* were blue, then *F* would be red, *D* would be green, *E* would be yellow, and it would then be impossible to colour *C*. So *A* must be red. It follows that *F* is blue, *C* is green, *D* is red, *E* is yellow, *H* is red, *G* is green, and *B* is yellow.

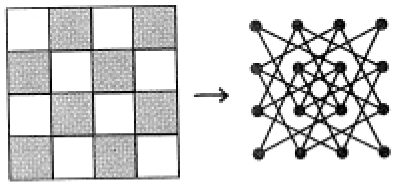
In fact, it can be proved that four colours suffice for colouring any map. This famous result, first conjectured in 1852 and known as the *four-colour theorem*, was eventually proved in 1976 after a long and difficult struggle that made extensive use of a computer.

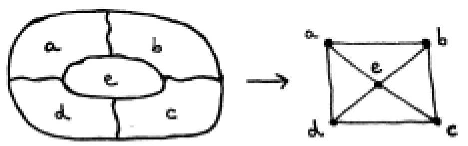
Conclusion: what is graph theory?
Graph theory is the study of network diagrams, such as the one shown below. A *graph* is a diagram that has a number of points, called *vertices*, joined in pairs by lines, called *edges*; thus, the graph below has four vertices and seven edges.



Several of the above types of problem are immediately seen to involve graphs. For example, the drawing puzzles of *Section B* and the Voyage around the World problem of *Section C* are problems involving the tracing of paths and cycles on graphs. The islands-and-bridges problems of *Section A* can also be expressed in graphical terms – for example, if we represent each part of the city of Königsberg by a vertex and each bridge joining two parts of the city by an edge joining the corresponding vertices, then we obtain the above graph; the problem is then one of tracing this graph, as in *Section B*.

We also obtain graphs from the knight's-tour problems in *Section D* by placing a vertex in each square of the chessboard and joining two vertices whenever the corresponding squares are linked by a knight's move, as illustrated below; the problem is then to find a Hamiltonian cycle in the resulting graph. Finally, we can represent any map by a graph by placing a vertex in each country and joining two vertices whenever the corresponding countries are adjacent, as shown below for the first map in *Section E*; our map-colouring problems then become those of colouring the vertices of a graph in such a way that connected vertices are coloured differently.





Graph theory is now a major area of mathematics, both because of its rich theory and because of its many and varied applications in subjects ranging from chemistry and operational research to sociology and statistical mechanics. If you wish to learn more about this fascinating subject, you are recommended to consult any of the references below.

References

Joan M. Aldous and Robin J. Wilson, *Graphs and Applications: An Introductory Approach* (with CD-Rom), Springer, 2000.

N. L. Biggs, E. K. Lloyd and R. J. Wilson, *Graph theory 1736-1936*, Oxford, 1998.

Oystein Ore, *Graphs and their Uses*, Mathematical Association of America, 1990.

Robin Wilson, *Four Colours Suffice*, Penguin Books, 2002.

Stamping through the mathematics

Av Robin Wilson

The Open University, UK

R.J.Wilson@open.ac.uk

In 1971, Nicaragua issued a set of postage stamps featuring 'the ten mathematical formulae that changed the face of the earth', from 1 + 1 = 2, via Pythagoras's theorem and Newton's law of gravitation, to Einstein's law, $E = mc^2$. In this informal article I shall survey five thousand years of mathematics, illustrating the story with some of the 1500 stamps that relate to mathematics.

Early mathematics

We start with **1 + 1 = 2** [*Fig. 1*], although such formal equations did not appear until much later. From earliest times, people wanted to count and measure objects around them. Early methods of counting included forming stones into piles, cutting notches in sticks, and **counting on the fingers** [*Fig. 2*]. It is undoubtedly due to finger counting that our familiar decimal number system emerged.

An early form of pocket calculator was the **quipu** [*Fig.3*], invented by the Incas of Peru. It consists of a main cord attached to thinner knotted cords – the sizes and positions of the knots correspond to different numbers – and was used for recording and conveying numbers and for accounting purposes.

Egypt and Babylon

In Egypt, the main achievements involved the practical skill of measurement. The magnificent **pyramids** [*Fig. 4*], from about 2600 BC, attest to the Egyptians' extremely accurate measuring ability: in particular, the Great Pyramid has a square base whose sides agree to less than 0.01%. Constructed from more than two million blocks of over 2 tons in weight, each pyramid also contains an intricate arrangement of internal chambers and passageways.

Our knowledge of later Egyptian mathematics derives mainly from two fragile primary sources, the Moscow papyrus and the Rhind papyrus (c.1650 BC). These include tables of fractions and problems in arithmetic and geometry, probably designed for the teaching of scribes and accountants. *Fig. 5* shows some **Egyptian accountants** doing their mathematics.

Also around 1800 BC, Mesopotamian mathematicians wrote with a wedge-shaped stylus on damp clay which was then baked in the sun. Hundreds of these **cuneiform tablets** [*Fig. 6*] have survived: they include an extremely accurate value for √2, solving quadratic equations, and calculating areas and volumes in geometry. The number system was sexagesimal, based on 60, which we still use when measuring time.

Greek geometry

We now move to more familiar territory. For a thousand years or so from 600 BC, mathematics flourished in the Greek-speaking world of the eastern Mediterranean. During this time, the Greeks developed deductive logical reasoning, which became the hallmark of their work, especially in geometry.

Pythagoras (c.550 BC) [*Fig. 7*] was a semi-legendary figure, born on the island of Samos, who formed a School to further the study of mathematics, philosophy and the sciences. The Pythagoreans believed that ‘All is number’, and emphasised the ‘mathematical arts’ of arithmetic, geometry, astronomy, and music.

It is not known who first proved **Pythagoras’s theorem** [*Fig. 8*] that ‘the area of the square on the hypotenuse of a right-angled triangle is the sum of the areas of the squares on the other two sides’, but the related idea of a Pythagorean triple (numbers satisfying $a^2 + b^2 = c^2$) may have been familiar to the Mesopotamians a thousand years before Pythagoras: a cuneiform tablet contains numbers associated with the triple (12,709, 13,500, 18,541).

Plato’s Academy

Until about 300 BC, Athens became the most important intellectual centre in Greece, numbering among its scholars Plato and Aristotle.

Around 387 BC, Plato founded a school in a part of Athens called ‘Academy’, and Plato’s Academy soon became the focal point for mathematical study. Over the entrance appeared the inscription: ‘Let no-one ignorant of geometry enter here’. In Raphael’s fresco *The School of Athens*, **Plato and Aristotle** [*Fig. 9*] appear on the steps of the Academy. Plato believed that mathematics and philosophy provided the finest training for those ruling the state. In his *Republic* he discussed the Pythagoreans’ mathematical arts of arithmetic, geometry, astronomy and music, justifying their importance for those who held positions of responsibility.

Aristotle was fascinated by logical questions and systematised the study of logic and deductive reasoning. In particular, he explained why $\sqrt{2}$ cannot be written as a fraction a/b, and he discussed syllogisms such as: ‘All men are mortal; Socrates is a man; thus Socrates is mortal’.

Euclid and Archimedes

Around 300 BC, mathematical activity moved to the Egyptian part of the Greek empire, to Alexandria. The first important mathematician there was **Euclid** [*Fig. 10*], who is mainly remembered for his *Elements*. The most influential and widely read mathematics book of all time, the *Elements* is a compilation of known results, and consists of thirteen books on geometry (plane and solid), number theory, and the theory of proportion. A model of deductive reasoning, it starts from initial axioms and postulates and uses rules of deduction to derive new propositions in a logical and systematic order.

Archimedes (c.250 BC) [*Fig. 11*], from Syracuse in Sicily, was one of the greatest mathematicians who ever lived. He calculated the area and volume of spheres and cylinders, listed the thirteen

Archimedean semi-regular polyhedra – solids whose faces are regular but not all of the same shape – and by calculating the perimeters of 96-sided polygons that approximate a circle, he proved that π lies between $3^{10}/_{71}$ and $3^{1}/_{7}$. In mechanics he found the 'law of moments' for a balance, and in statics he stated 'Archimedes' principle' on the weight of an object immersed in water, in order to test the purity of King Hiero's gold crown: on discovering this principle he supposedly jumped out of his bath and ran naked down the street shouting 'Eureka!' (I have found it!).

China

Meanwhile, in China, several people tried to evaluate π. Around 100 AD, Zhang Heng, inventor of the seismograph for measuring earthquakes, gave the value √10 (about 3.16), a value already known to Indian mathematicians. Particularly remarkable was **Zu Changzhi** (around 500 AD) [*Fig.12*], who considered regular polygons with about 25,000 sides and deduced that π is about 3.1415926. He also found the approximation 355/113, which is correct to six decimal places; this approximation was not rediscovered in the West for another thousand years.

A similar situation occurred with '**Pascal's triangle**' of binomial coefficients, which appeared in a Chinese text of 1303, four hundred and fifty years before Pascal [*Fig. 13*].

Islamic mathematics

The period from 750 to 1400 was an important time for mathematics. Islamic scholars, united by their new religion, seized on Greek and Roman writings from the west and Hindu writings from the east and developed them.

Some of our mathematical language dates from this time. The word 'algorithm' (a step-by-step procedure for solving a problem) derives from **al-Khwarizmi** [*Fig. 14*], who lived in Baghdad and wrote influential works on arithmetic and algebra. His *Arithmetic* introduced the Hindu decimal place-value system to the Islamic world, while the title of his algebra book, *Kitab al-jabr wal-muqabala*, gives us the term 'algebra'; 'al-jabr' means adding a positive term to both sides of an equation to eliminate a negative one.

A century later, the mathematician and poet **Omar Khayyam** [*Fig. 15*] wrote on the binomial theorem and on geometry. In algebra he gave the first systematic classification of cubic equations, but such equations were not solved in general until the sixteenth century. In the west he is remembered mainly for his collection of poems, called the *Rubaiyat*.

During the Middle Ages, the Islamic world spread across the top of Africa, and up into Europe through Spain and Italy. Córdoba, in Spain, became the scientific capital of Europe, while Islamic decorative art and architecture spread throughout southern Spain and include the fine geometrical tiling patterns in the Alhambra in Granada. The Córdoban geometer and instrument maker **al-Zarqali** [*Fig. 16*] produced important sets of trigonometrical tables and constructed many astrolabes. These consist of a brass disc suspended by a ring that is fixed or held in the hand. There is a circular scale on the rim and an attached rotating bar; to measure the altitude of a planet or star, you look along the bar at the object and read the altitude from the scale.

The Middle Ages

In Europe, the period from 500 to 1000 is known as the 'Dark Ages'. The legacy of the ancient world was almost forgotten, schooling became infrequent, and the level of culture remained low. But revival of interest in mathematics began with **Gerbert of Aurillac** [*Fig. 17*], probably the first person to introduce the Hindu-Arabic numerals into Christian Europe; he was crowned Pope in 999.

Hindu-Arabic calculations were also used by Leonardo of Pisa (or **Fibonacci**) [*Fig. 18*] in his *Liber abaci* [Book of calculation] of 1202. This celebrated book contained many problems in arithmetic and algebra, including the celebrated 'rabbits problem' that leads to the 'Fibonacci sequence' 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, … , in which each successive term is the sum of the previous two.

Other scholars interested in mathematics included Geoffrey Chaucer, author of the *Canterbury tales*, whose learned treatise on the astrolabe was one of the earliest science books to be written in English.

The growth of learning

The renaissance in mathematical learning during the Middle Ages was due to three factors: the establishment of universities, the translation of Arabic texts into Latin, and the invention of printing. Universities enabled European scholars to discourse on matters of common interest, translations of Euclid, Archimedes and other Greek writers made their works available to these scholars, and printing enabled these scholarly works to be available cheaply for everyone.

The first European university was Bologna, founded in 1088, and Paris and Oxford followed shortly after. The curriculum was in two parts, of which the second, leading to a Master's degree, was based on the '**quadrivium**', the Greek mathematical arts of arithmetic and geometry (shown in *Fig. 19*), astronomy and music.

Gutenberg's invention of the printing press (around 1440) enabled mathematical works to be widely available for the first time. At first, books were printed in Latin for the scholar, but increasingly vernacular works began to appear at a price accessible to all; these included texts in arithmetic, algebra and geometry, as well as practical works to prepare young men for a commercial career. Important among these was the 1494 *Summa* by **Luca Pacioli** [*Fig. 20*], a 600-page compilation of the mathematics known at the time, which included the first published account of double-entry bookkeeping.

The invention of printing also led to the standardisation of **mathematical notation** [*Fig. 21*]. The symbols + and – first appeared in a 1489 arithmetic text, and the equals sign was introduced in 1557 by Robert Record. The symbols × and ÷ were not introduced until somewhat later.

Renaissance art

It was around this time that painters first became interested in showing three-dimensional objects realistically, giving visual depth to their works through geometrical perspective. The first person to investigate perspective seriously was Brunelleschi, who designed the dome of Florence cathedral, and whose ideas were then developed by his friend Alberti, who presented mathematical rules for correct perspective painting. The celebrated German artist Albrecht Dürer was a master of perspective, as can be seen from his engraving ***St Jerome in his study*** [*Fig. 22*].

The age of exploration

The Renaissance also coincided with the great sea voyages and explorations of Columbus, Vasco da Gama, Vespucci and Magellan. Such explorations required the development of accurate maps and globes and reliable navigational instruments for use at sea.

For navigational purposes, astrolabes were widely used, as were quadrants, octants and sextants. Quadrants had been around in Europe from the thirteenth century and have the shape of a quarter-circle (90°), while octants correspond to an eighth of a circle (45°), and a **sextant** [*Fig. 23*] corresponds to a sixth (60°). To measure an object's altitude, you look at it along the top edge of the instrument, and the position of a movable rod on the circular rim gives the desired altitude.

Earlier, the Jewish scholar Levi ben Gerson had invented the widely-used Jacob's staff for measuring the angular separation between two celestial bodies. Unfortunately, in order to measure the angle between the sun and the horizon you had to look directly at the sun. The **back-staff** [*Fig. 24*] is a clever modification in which navigators could use the instrument with their backs to the sun.

Map-making

These nautical explorations played a major role in the development of map-making. Trying to represent the spherical earth on a flat sheet of paper led to new types of map projection and to improved maps for navigators at sea.

The first 'modern' maps of the world used the 'Mercator projection', obtained by projecting the sphere outwards on to a vertical cylinder and then stretching the scale vertically. In this way, the horizontal latitude lines and the vertical longitude ones appear as straight lines, and all the angles (and compass directions) are correct. Incidentally, **Gerard Mercator** [*Fig. 25*] was the first person to use the word 'atlas', for his three-volume collection of maps that appeared around 1590.

The new astronomy

Nicolaus Copernicus [*Fig. 26*], the 'father of modern astronomy', transformed his subject by replacing Ptolemy's earth-centred system of planetary motion by a 'heliocentric system' with the sun at the centre and the earth as just one of several planets in a circular orbit around it. His book *De revolutionibus* [On the revolution of the heavenly spheres] was published in 1543 and a copy of it was presented to him on his death-bed.

However, the Copernican system aroused much controversy and brought its supporters into direct conflict with the Church who considered the earth to lie at the centre of Creation. People were arrested by the Inquisition in Venice, and even burned alive for heresy, for espousing Copernican ideas. Indeed, at a famous Inquisition trial in 1633, Galileo was placed under house arrest after his Dialogue concerning the two chief world systems presented the Copernican system as superior to the Ptolemaic one. Galileo was not pardoned by the Church until 1995.

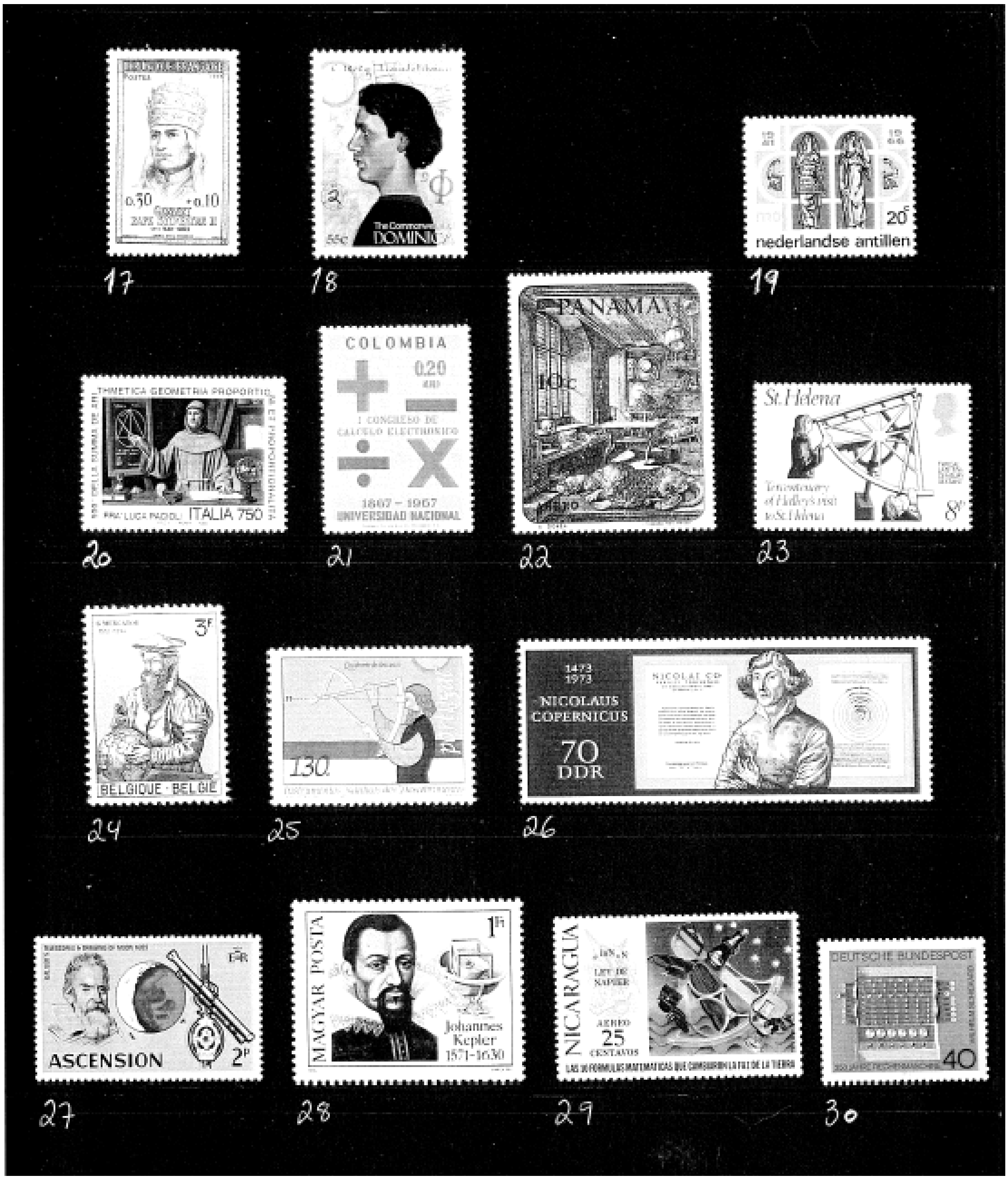
Galileo Galilei taught mathematics in Padua [*Fig. 27*]. In his 1638 mechanics book *Two new sciences* he discussed uniform and accelerated motion and explained why the path of a projectile is a parabola. In astronomy he was the first to make extensive use of the telescope, discovering the moons of Jupiter and Saturn, and drawing the moon's surface.

Johannes Kepler [*Fig. 28*] is remembered for his three laws of planetary motion. Using extensive observations by the Danish astronomer Tycho Brahe, Kepler was led to propose that the planets move in elliptical orbits with the sun at one focus, and that the line from the sun to any planet sweeps out equal areas in equal times. Kepler was indeed fascinated by ellipses and other conics, and introduced the word 'focus' into mathematics. By summing thin discs he found the volumes of many solids obtained by rotating such curves around an axis, thereby foreshadowing the development of the integral calculus. He was also interested in polyhedra, discovering the cuboctahedron, and his name is associated with the 'Kepler-Poinsot star polyhedra'. Wrongly, he claimed that the five regular solids fit snugly in between the orbits of the six known planets: the cube lies between Saturn and Jupiter, and so on.

Calculating numbers

Around this time, in 1614, the Scotsman John Napier introduced logarithms as a tool for calculation, designed to replace lengthy calculations involving multiplication and division by easier ones using additions and subtractions. Being somewhat awkward to use, **Napier's logarithms** [*Fig. 29*] were soon supplanted by Henry Briggs's simpler ones to base 10, whose use proved an enormous boon to astronomers and navigators. Their invention quickly led to the development of instruments based on a logarithmic scale, such as the slide rule; dating from around 1630, it was used for over three hundred years until the advent of the pocket calculator.

The first mechanical calculating machines also appeared around this time, such as one described by **Schickard** in 1623 [*Fig. 30*]. Others were later constructed by Pascal and Leibniz.



17th-century France

In 17th-century France, the major mathematical figures were Descartes, Fermat and Pascal. Descartes and Fermat introduced algebraic methods into geometry, and this swing from geometry to algebra would eventually climax 100 years later with the work of Euler.

The most celebrated work of **René Descartes** [*Fig. 31*] was his 1637 *Discourse on method*, a philosophical treatise on universal science. The *Discourse* has a 100-page appendix on geometry, containing his fundamental contributions to analytic geometry. An ancient problem of Pappus had asked for the path traced by a point moving in a specified way relative to a number of fixed lines. To solve this, Descartes named two particular lengths x and y and calculated all the other lengths in terms of them, obtaining a conic as the required path. Thus Descartes introduced algebraic methods into geometry, but he did not initiate the Cartesian coordinates (with axes at right angles) usually named after him. Incidentally, 300 years later, France issued a stamp commemorating the ***Discours de la méthode*** [*Fig. 32*], but got the title wrong – it was corrected in a later stamp.

Fermat also studied analytic geometry, but is mainly known for his contributions to number theory. These include his famous claim to have proved '**Fermat's last theorem**' [*Fig. 33*], that for any $n > 2$ there are no non-trivial integer solutions x, y and z of the equation $x^n + y^n = z^n$. This was eventually proved by Andrew Wiles in 1995.

Blaise Pascal [*Fig. 34*] showed an early interest in mathematics. At the age of 16 he obtained his 'hexagon theorem' about six points lying on a conic. He wrote about 'Pascal's triangle' and hydrodynamics ('Pascal's principle'), and was one of the first to investigate the theory of probability.

Isaac Newton

Isaac Newton [*Fig. 35*] was born in 1642. In Cambridge, he avidly studied contemporary works, such as a Latin edition of Descartes' Geometry and a book of John Wallis on infinite series. Inspired by the latter, he produced, while still an undergraduate, the infinite series expansion for the binomial expression. Newton was later appointed Lucasian professor of mathematics at Cambridge, a post now held by Stephen Hawking.

The story of Isaac Newton and the **apple** [*Fig. 36*] is well known. Seeing an apple fall, he realised that the gravitational force pulling the apple to earth is the same as the force that keeps the moon orbiting round the earth, and the earth orbiting round the sun. This planetary motion is governed by a universal law of gravitation, the 'inverse-square law': the force of attraction between two objects varies as the product of their masses, and inversely as the square of the distance between them; so, if the distance is tripled, the force decreases by a factor of 9. In his 1687 *Principia mathematica*, possibly the greatest scientific work of all time, Newton used this law to justify Kepler's laws of elliptical planetary motion and account for cometary orbits and the variation of tides.

Reactions to Newton

Reactions to Newton's *Principia* were mixed. In England it was well received, even though few readers understood it. However, it was long and difficult and raised awkward questions concerning the shape of the earth. Newton's *Principia* predicted a flattening of the earth at the poles due to the earth's rotation so that the earth is 'onion-shaped', while Descartes had earlier proposed a rival 'vortex theory' of the universe, in which the earth's rotation causes a lengthening at the poles so that the earth is 'lemon-shaped'. National pride was at stake, and the matter was urgent since inaccurate map-making had led to the loss of many lives at sea. Eventually, in 1735, a **geodetic mission to Lapland** [*Fig. 37*] and one to Peru settled the matter by comparing the swing of a pendulum near the North Pole and on the equator. These missions confirmed that Newton was correct: the earth is flattened at the poles.

Incidentally, Newton's *Principia* wouldn't have appeared if it hadn't been for Edmond Halley, who cajoled Newton into developing his ideas on gravitation and publishing them in the *Principia* at Halley's expense. He is primarily remembered for '**Halley's comet**' [*Fig. 38*]. Observing the comet in 1682, he realised that it was the same one that had been seen several times earlier and predicted its return in late 1758. Its appearance then, several years after his death, did much to vindicate Newton's theory of gravitation, and because of this prediction, the comet was named after him.

Calculus

During the 17th century much progress had been made on the two branches of the calculus, the areas now called 'differentiation' (how do objects move or change?) and 'integration' (finding areas). It was gradually realised that these seemingly unrelated processes are inverse to each other, so that integrating and then differentiating leaves you where you started. During the 'plague years' of 1665-67, Newton explained for the first time why this inverse relationship holds.

However, although Newton could claim priority, **Gottfried Wilhelm Leibniz** [*Fig. 39*] (who developed it independently) was the first to publish it. Also, his notation was more versatile than Newton's: his 'D' for differentiation and his integral sign were introduced in the autumn of 1675, within three weeks of each other, and are still used today. His calculus was very different from Newton's, being based on geometry rather than on velocity and motion.

The work of Leibniz continued a tradition of Continental mathematics that extended via the Bernoulli family to Euler. **Leonhard Euler** [*Fig. 40*] was probably the most prolific mathematician of all time. He reformulated the calculus using functions, introducing the notation $f(x)$, as well as those for e, i ($\sqrt{-1}$) and $\sum$ (for summation). He contributed to number theory, differential equations and mechanics, and related the trigonometrical and exponential functions via the equation $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

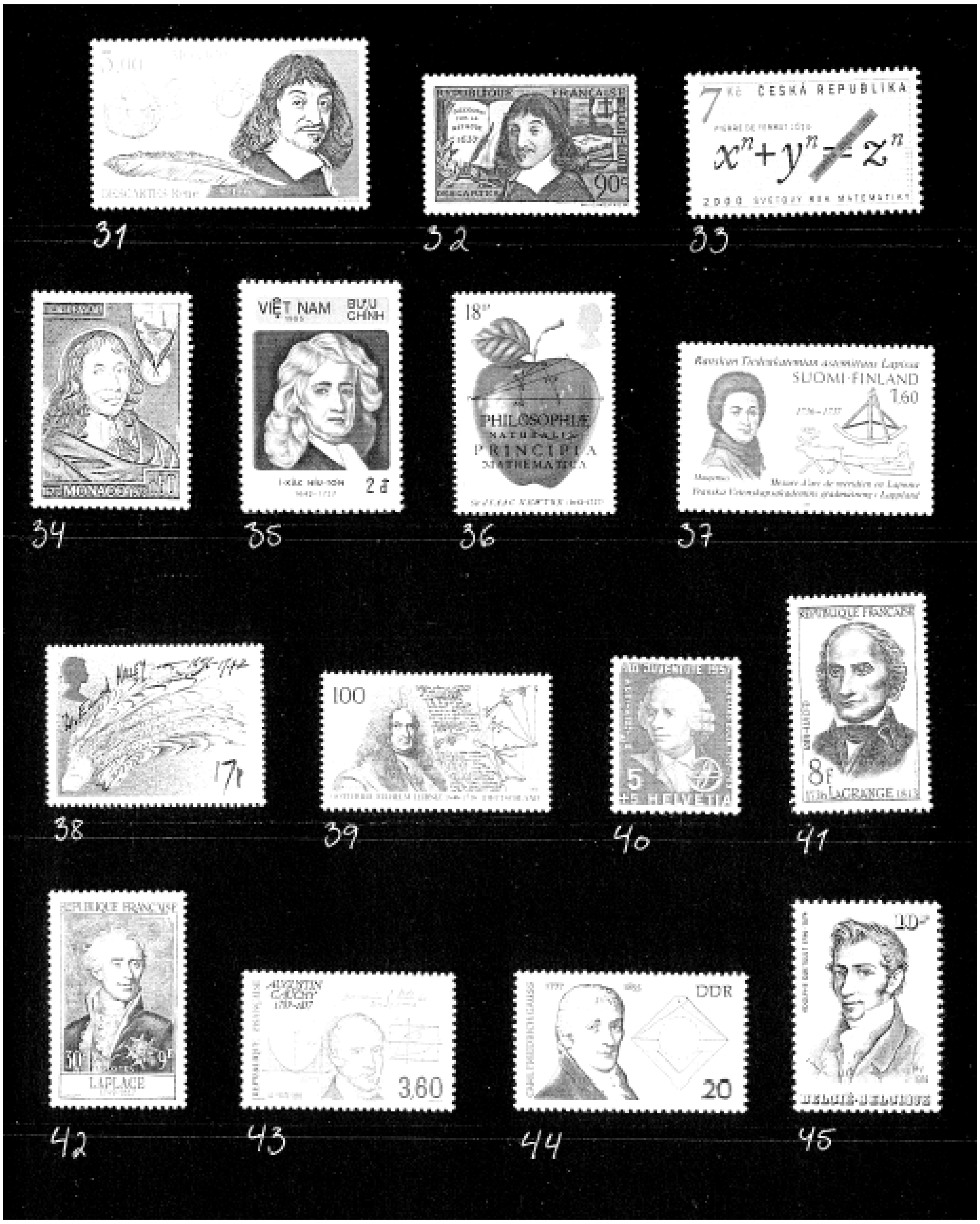
France and Germany

Euler's successor at the court of Frederick the Great in Berlin was **Joseph Louis Lagrange** [*Fig. 41*]. He wrote the first 'theory of functions', using power series to make the calculus more rigorous, and also a very influential text on mechanics. In number theory he proved that every positive integer can be written as the sum of four perfect squares: for example, $79 = 49 + 25 + 4 + 1$. Shortly after the French Revolution, a commission was set up to standardise the weights and measures in France and introduce a metric system; Lagrange was its chairman.

In contrast, **Pierre-Simon Laplace** [*Fig. 42*] was the applied mathematician *par excellence*. He wrote a celebrated account of the theory of probability, and is remembered for the 'Laplace transform' of a function. His monumental five-volume treatise on celestial mechanics, using the newly developed differential equations, earned him the title of 'the Newton of France'.

Work in France continued with **Augustin-Louis Cauchy** [*Fig. 43*]. The calculus had proved to be on shaky grounds, but Cauchy rescued the situation in the 1820s with his formal treatment of limit and continuity. He also developed complex analysis, and his integral formula appears on the stamp.

Meanwhile in Germany, **Carl Friedrich Gauss** [*Fig. 44*] was working in many areas, ranging from complex numbers and polynomials to astronomy and electricity. One of the greatest mathematicians of all time, he investigated polygons that can be constructed by ruler and compass and proved that a regular *n*-sided polygon can be constructed if *n* is a 'Fermat prime', such as 17 (as on the stamp) or 65,537.



Statistics

In statistics, Gauss also discussed the normal, or Gaussian, distribution. Another important statistician was the Belgian ***Adolphe Quetelet*** *[*Fig. 45*], who desired to find the statistical characteristics of an 'average man': this led to his recording the chest measurements of 5000 Scottish soldiers.* ***Florence Nightingale*** *[*Fig. 46*], the 'lady with the lamp' during the Crimean War, was much influenced by Quetelet, and analysed and displayed the mortality data that she collected in the Crimea, using her 'polar diagrams', a forerunner of the pie-chart.*

Another important woman mathematician was **Sonya Kovalevskaya** [*Fig. 47*], who made valuable contributions to mathematics, physics and astronomy, as well as being a well-known novelist. Barred by her gender from studying in Russia, she went to Heidelberg, attending lectures of Kirchhoff on electricity and Helmholtz on sound. Later, she won a coveted prize from the French Academy for a memoir on the rotation of bodies.

The liberation of algebra

In the early 19th century there was a major breakthrough in algebra, when the Norwegian mathematician **Niels Henrik Abel** [*Fig. 48*] solved a long-standing problem. We mentioned earlier that quadratic equations were solved by the Babylonians, and Italian mathematicians in the 16th century showed how to solve cubic equations (of degree 3) and quartic equations (of degree 4). Abel showed that the chain stops here – there's no general formula to solve equations of degree 5 or more.

Abel's work was continued by the brilliant French mathematician **Évariste Galois** [*Fig. 49*], who found out which equations can be solved. Galois had a short and turbulent life, being sent to jail more than once for political activities, and dying tragically in a duel at the age of 20, having sat up the previous night writing out his mathematical achievements for posterity.

The liberation of geometry

There was also a major revolution in geometry. Euclid's *Elements* starts with five 'postulates': four are straightforward, but the fifth is different in style, resembling a theorem that ought to be provable from the others. One version of it is the 'parallel postulate': given any line l and any point p not lying on l, there's a line parallel to l passing through p.

For over 2000 years mathematicians tried to deduce this result from the first four postulates, but could not do so. This is because there are 'non-Euclidean geometries' satisfying the first four postulates but not the fifth: these geometries have infinitely many lines parallel to l passing through p. Although Gauss later claimed to have discovered them, they were first published by the Russian **Nikolai Lobachevsky** [*Fig. 50*] and the Hungarian **János Bolyai** [*Fig. 51*], around 1830.

Other strange geometries from the 19th century include the **Möbius strip** [*Fig. 52*], which is a surface with only one side.

All these new geometries caused a revolution in thinking in the 19th century, because it was no longer clear which one corresponds to the world we live in. Indeed, the geometry that arises naturally in Einstein's theory of relativity is not our familiar Euclidean geometry. **Albert Einstein** appears in *Fig. 53*, with his famous equation $E = mc^2$, relating energy and mass.

The birth of computing

The birth of the computer can be traced back to the work of **Charles Babbage** [*Fig. 54*] in the 1830s. Although Babbage's machines were not built during his lifetime, the idea of a programmable computer had been born.

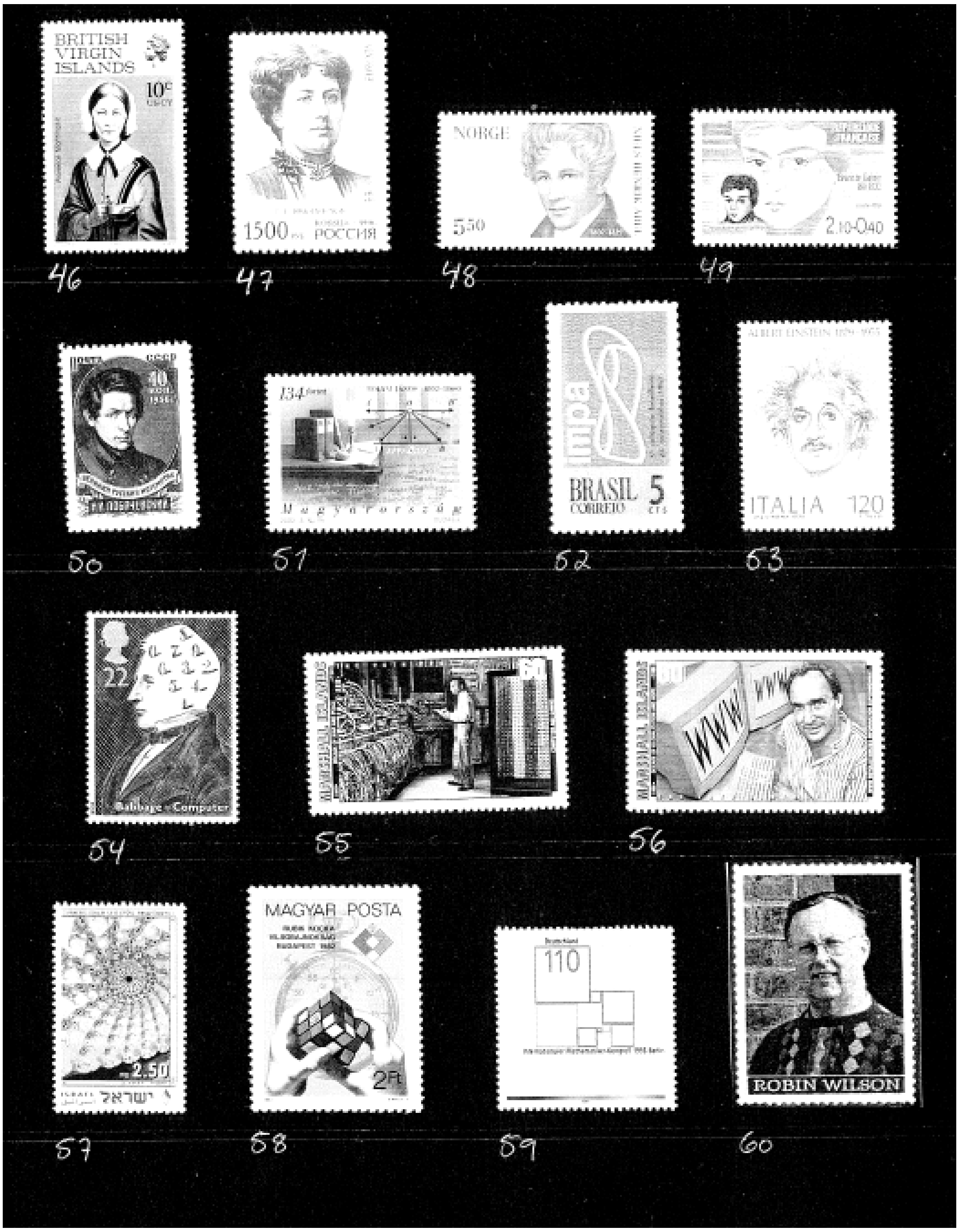
The modern computer age started in the Second World War, with COLOSSUS in England deciphering German military codes, and **ENIAC** [*Fig. 55*] in the United States. Later developments included the world-wide web, invented by **Tim Berners-Lee** [*Fig. 56*], and communications have been transformed by the introduction of electronic mail.

The 20th century

So, finally, we've reached the 20th century. Here there are many stamps one could include, but we present just three. The current interest in chaos and fractals has been captured in a stamp depicting a **Julia set** [*Fig. 57*], the fractal pattern arising from iterating a quadratic formula. For something more light-hearted, there is the **Rubik cube** [*Fig. 58*] that was so popular in the 1980s.

Mathematics has developed at an ever-increasing pace in the past century. Every year there are many thousands of meetings to discuss recent developments. In particular, some 4000 mathematicians meet every four years at the **International Congress of Mathematics** – the last Congress was in Berlin in 1998, and *Fig. 59* shows the stamp issued especially for that Congress. It includes a solution of the 'squaring-the-rectangle' problem of dividing a rectangle with integer sides (177 and 176) into unequal squares, all with integer sides. The background consists of spirals made from the digits of π.

So, as we look back over 5000 years, it is tempting to emulate *Time* magazine's 'Man of the Year' and 'Man of the Century', and choose the 'Mathematician of all time'. Fortunately, there's only one possible candidate [*Fig. 60*].



Further reading (and more stamps)
Robin J. Wilson, *Stamping through Mathematics*, Springer, New York, 2001.

To skritt fram og ett til siden – om rytme og kroppslig matematikk

Av Carl Haakon Waadeland

Institutt for musikk, NTNU
7491 Trondheim
carl.haakon.waadeland@hf.ntnu.no

Innledning: En naturlig dragning mot rytmisk atferd og opplevelse:

Rytme er et fenomen som er grunnleggende for hvordan vi strukturerer våre handlinger, våre omgivelser,- våre liv.- Vi innordner våre gjøremål etter døgnrytmer og arbeidsrytmer, vi kommuniserer ved hjelp av gjenkjennbare rytmiske uttrykk i lyd og bilde, og om vi hører musikk med en god, swingende rytme, vil vi gjerne "swinge med" og bevege oss til musikken: Vi danser! Felles for mange av disse rytmene er at de representerer en ordning av tid, bevegelse eller hendelsesforløp som er *syklisk*, dvs. de kjennetegnes ved et mønster av hendelser som gjentar seg selv etter en viss tid:

- Hjerteslag gir en repeterende "grunnpuls" og referanse for tidsforløp.
- Åndedrettet gir en sammenhengende veksling mellom spenning og avspenning (pust inn/ pust ut).
- Jordrotasjonen gir en repeterende veksling mellom natt og dag.
- Jordens og månens gjensidige gravitasjonspåvirkning gir opphav til flo og fjære.
- Jordens gang rundt sola gir en tilbakevendende årssyklus.

Faktisk er det også slik at dersom vi blir stilt overfor et hendelsesforløp av *like* hendelser, adskilt med *konstante* tidsintervall, som for eksempel når vi lytter til en regelmessig slagserie der alle slagene er like sterke og gir samme lyd, så viser empiriske undersøkelser at vi spontant utfører en såkalt *subjektiv rytmisering* ved å tillegge enkelte av slagene ekstra "vekt",- for derigjennom å oppfatte hendelsene som *grupper av hendelser* på eksempelvis 2, 3 eller 4 slag (se for eksempel Elliott, 1986).

Eksempel 1:

```
>           >           >           >           >
x   x   x   x   x   x   x   x   x   x   x   x   x   x   x   ………..
```

I en serie av like hendelser er her hver tredje hendelse tillagt ekstra "vekt" i *vår opplevelse* av hendelsesforløpet.

Om hendelsene i eksemplet ovenfor er trommeslag, vil en gruppering i sykler på 3 slag medføre at slagserien oppleves som *3-takt* (kanskje som en *vals*), mens en gruppering i sykler på 4 slag vil generere en opplevelse av *4-takt*.

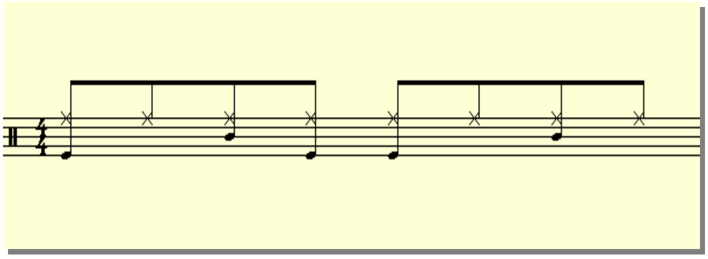
Fra en trommeslagers beveggrunn vil vi nå se litt nærmere på hvordan forskjellige rytmiske sykler er sammensatt. Da vil vi også oppdage at matematikk kan gi interessant innsikt i rytmiske strukturer og at trommeslageren i sitt spill utfører *kroppslig matematikk*.

En kroppslig multiplikasjonstabell:

I rock, jazz, latinamerikansk og afroamerikansk musikk etableres den rytmiske basis i stor grad av trommeslagerens spill. Vanligvis spiller da trommeslageren variasjoner over rytmiske sykler som oftest består av 2, 3, eller 4 pulsslag. Disse rytmiske syklene (i musikk kalt *ostinat*) inneholder så mye musikalsk informasjon at ostinatene i seg selv blir *karakteriserende for en musikkstil,- en musikkgenre.* Dette opplever vi når vi hører en trommeslager spille en rytme og vi sier: ”Dette er en typisk rockerytme”, eller: ”nå spilles en typisk swing-groove”, og også: ”den rytmen kan vi danse vals til”.

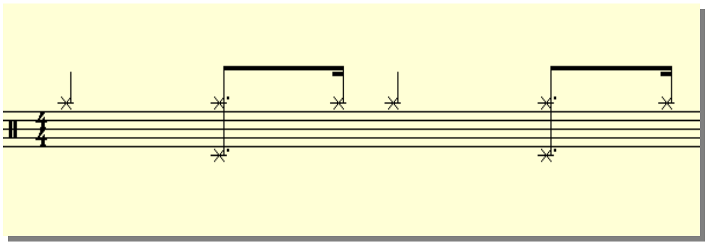
<u>Eksempel 2:</u>

a) En typisk rockegroove:



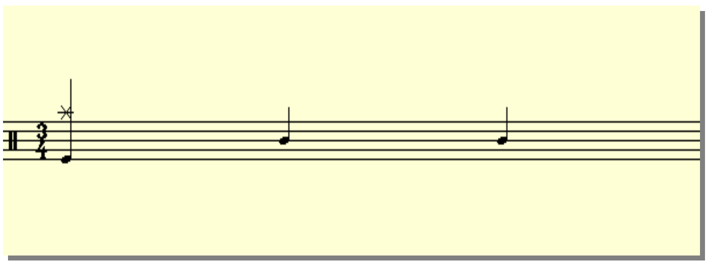
De øverste notene (her notert med x) spilles på *hihat*, de midterste på *skarptromme*, og de nederste på *basstromme*.

b) En typisk swingrytme:



Øverste noter spilles her på *cymbal*, mens nederste spilles på *hihat* (med fot).

c) Typisk vals:



Her spilles øverste note på cymbal, midterste på skarptromme og nederste på basstromme.

I eksemplene ovenfor vil de fleste være enig i at a) og b) er rytmer/groover i 4-takt, mens c) er en groove i 3-takt. (Dette understrekes også av notasjonen som er valgt i beskrivelsen av groovene.) Imidlertid kan også mange trommegroover være *flertydige* med hensyn til om de blir oppfattet som 2, 3, eller 4-takt. I særdeleshet gjelder dette for flere *afrikanske groover*.

Eksempel 3:

En viktig rytmisk referanse i mye afrikansk musikk, er en såkalt "bjellerytme", dvs. en rytmisk figur som spilles med en trommestikke på en spesiell bjelle. Her er et eksempel på en vestafrikansk bjellerytme:

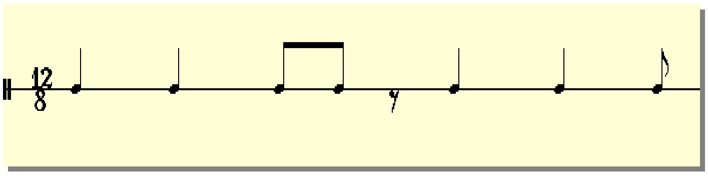
x o x o x x o x o x o x

↑ slag

↑ ikke-slag

Denne bjellerytmen spilles om og om igjen, og utgjør en rytmisk syklus med til sammen *12 "tellepunkt"*, der det på hvert tellepunkt er enten et slag: **x**, eller *ikke* et slag: **o** . (Merk at disse tellepunktene kun representerer en måte for oss å analysere denne rytmen.- Den afrikanske musikeren teller vanligvis *ikke*.)

Om vi skulle skrive bjellerytmen med vanlig (vestlig) notenotasjon, kunne følgende være en mulig notasjonsmåte:



Avhengig av hvordan de 12 tellepunktene vektlegges og grupperes, vil bjellerytmen ovenfor kunne oppleves som en groove i 3-takt eller 4-takt:

(i) Anta til å begynne med at vi spiller bjellerytmen med høyre hånd og samtidig tramper (med høyre fot) på *hvert fjerde* tellepunkt. Situasjonen er da følgende:

x o x o x x o x o x o x (høyre hånd)

x o o o x o o o x o o o (høyre fot)

4 4 4

I dette tilfellet vil det i løpet av én syklus av bjellerytmen trampes 3 slag der avstanden mellom trampene er konstant (= 4 tellepunkt). Trampene etablerer på denne måten en rytmisk puls, hvor vi har 3 pulsslag pr. syklus. Dette vil på en naturlig måte generere en opplevelse av bjellerytmen som en groove i 3-takt.

(ii) Om vi på den annen side spiller bjellerytmen med høyre hånd samtidig som vi tramper på *hvert tredje* tellepunkt, har vi følgende situasjon:

x o **x** o **x** **x** o **x** o **x** o **x** (høyre hånd)

x o o **x** o o **x** o o **x** o o (høyre fot)

3 3 3 3

Her tramper vi 4 slag med lik avstand mellom trampene, og bjellerytmen oppleves nå naturlig som en groove i 4-takt.

Merk:
Det er en god og morsom øvelse å spille bjellerytmen med tramp på henholdsvis hvert fjerde og hvert tredje tellepunkt, som beskrevet ovenfor. Om du gjør dette, vil du også oppleve at bjellerytmen på en fundamental måte *skifter karakter og uttrykk* alt etter som den spilles i 3-takt eller i 4-takt.

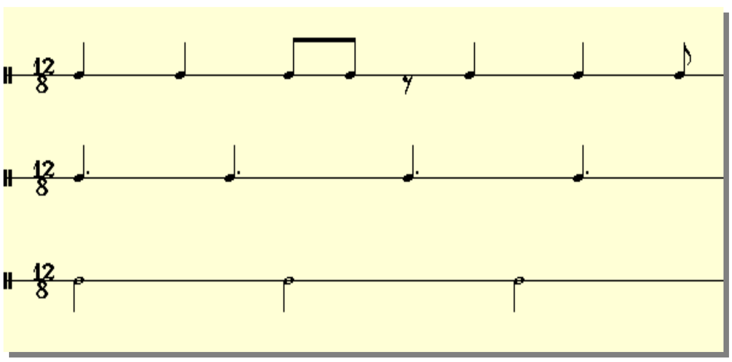
(iii) Trommeslagere som spiller bjellerytmen, vil ofte *utnytte* den taktmessige flertydighet som grooven har ved *samtidig* å indikere så vel 3-takt som 4-takt. Dette kan for eksempel gjøres på følgende måte:

x o **x** o **x** **x** o **x** o **x** o **x** (høyre hånd)

x o o **x** o o **x** o o **x** o o (venstre hånd)

x o o o **x** o o o **x** o o o (høyre fot)

Dersom dette skulle noteres med noter i vårt vanlige notasjonssystem, kunne det se slik ut:



Øverste rytmefigur (bjellerytmen) spilles av høyre hånd, midterste av venstre hånd, og nederste rytme spilles av høyre fot.- Her er et altså slik at venstre hånd spiller hvert tredje *tellepunkt, mens høyre fot spiller* hvert fjerde.*- Om vi nå nummererer tellepunktene med start på 0, altså: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ….., så har vi:*

Venstre hånd *spiller punktene: 0, 3, 6, 9, 12, 15, 18, …. (om vi fortsetter nummereringen forbi de 12 første tellepunktene), mens:*
Høyre fot *spiller punktene: 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, ….*

M.a.o.:

> *I sitt spill demonstrerer trommeslageren i dette tilfelle deler av en* ***kroppslig multiplikasjonstabell****, der venstre hånd spiller* 3-gangen*, mens høyre fot spiller* 4-gangen.

Avhengig av hvorvidt vi gir mest fokus til venstre hånd eller høyre fot, vil bjellerytmen skifte karakter.

I utførelsen av (iii) ovenfor spiller venstre hånd 4 like slag *i løpet av samme tidsintervall som høyre fot spiller* 3 like slag*. Dette kalles gjerne* polyrytmikk.- *Om vi opplever (iii) som 3-takt, sier vi at venstre hånd spiller "4 mot 3" (4 slag mot 3 tramp), om vi føler (iii) som 4-takt, sier vi gjerne at høyre fot spiller "3 mot 4".*

Dersom vi kikker litt bak de matematiske tallstrukturene i eksemplet ovenfor, vil vi oppdage at ethvert polyrytmisk forhold*,* m *mot* n *(der* m *og* n *er positive hele tall), kan konstrueres på liknende vis som 4 mot 3, eller 3 mot 4. La oss illustrere dette med et eksempel:*

<u>Eksempel 4:</u>

Spørsmål:
Hvordan spiller vi polyrytmen 4 mot 5 *?*

Svar:
Vi svarer på spørsmålet ved å angi en strategi for hvordan vi kan trampe 5 slag med lik avstand mellom trampene samtidig som vi klapper 4 slag med lik avstand mellom klappene.

Det første vi nå må gjøre, er å finne en syklus med felles tellepunkter *for 5 tramp og 4 klapp. Siden* minste felles multiplum *av 5 og 4 er 20, vil syklusen i dette tilfelle bestå av* 20 tellepunkter*. Dermed er faktisk også løsningen gitt:*
Vi tramper på hvert fjerde tellepunkt, og klapper på hvert femte tellepunkt.
I løpet av én syklus med 20 tellepunkter vil dette gi oss 4 klapp mot 5 tramp, altså 4 mot 5.

*Situasjonen er følgende (*klapp *øverst,* tramp *nederst):*

5 5 5 5

<u>x</u> *o o o o* ***<u>x</u>*** *o o o o* ***<u>x</u>*** *o o o o* ***<u>x</u>*** *o o o o*

| | | | |

<u>x</u> *o o o* ***<u>x</u>*** *o o o* ***<u>x</u>*** *o o o* ***<u>x</u>*** *o o o* ***<u>x</u>*** *o o o*

4 4 4 4 4

Med referanse til vår kroppslige multiplikasjonstabell er det her slik at vi tramper 4-gangen samtidig som vi klapper 5-gangen. Leseren oppfordres til selv å prøve dette på kroppen!

Swingende sinus:

Som vi har vært inne på i det foregående, kan en del aspekter ved rytmeutøvelse betraktes som en kroppsliggjøring av tallforhold. En ytterligere kopling mellom rytme og kroppslig matematikk kommer til syne om man vil analysere eller lage synteser av rytmeframføring i musikk.- I forrige avsnitt ble det gjort et poeng av at den rytmiske basis i latinamerikansk og afroamerikansk musikk i stor grad er generert av trommeslagerens spill, og at trommeslageren her ofte spiller variasjoner over et rytmisk ostinat/ en syklisk rytmefigur.- Den fysiske utøvelsen av disse ostinatene vil dermed også gjerne følge et *syklisk bevegelsesmønster*, hvilket innebærer at et studium av rytmeframføring i musikk i dette tilfelle vil ha et *periodisk hendelsesforløp av kroppsbevegelser* som forskningsobjekt.

Med vår matematiske bakgrunn vil sikkert mange av oss vite at den franske matematiker og fysiker, Jean-Baptiste Joseph Fourier (1768-1830), postulerte at periodiske forløp lar seg approksimere av summer av sinus- og cosinusfunksjoner.- Om vi ønsker å analysere eller konstruere synteser av rytmeframføringer som er karakterisert ved rytmiske ostinat, kan det derfor synes å være en god strategi å bruke sinus- og cosinusfunksjoner som byggekosser i modellbyggingen. Et slikt utgangspunkt blir ytterligere motivert av at empiriske undersøkelser av kroppsbevegelser viser at sinusbevegelser er blant de bevegelser som er enklest å etterlikne (se Viviani, 1990).

I en artikkel publisert i Skriftserie for Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen, no.1, 2003 (Konferanserapport fra Nordisk konferanse i matematikkdidaktikk ved NTNU, 2002), se Waadeland (2003a), presenteres en matematisk modell for rytmeframføring der forskjellige rytmeutøvelser i musikk, ofte karakterisert ved systematiske *avvik* fra metronom, blir etterliknet ved hjelp av såkalt *rytmisk frekvensmodulasjon*, hvor én sinus frekvensmodulerer en annen sinus. Denne modellen er implementert i et dataprogram (Waadeland & Saue, 1999), og det kan konstrueres synteser av blant annet springar dialekter, wienervals akkompagnement og forskjellige fraseringer av swingkomp i jazz (se også Waadeland, 2000, 2001).- Siden de fleste som leser dette også vil ha tilgang til konferanserapporten nevnt ovenfor, vil ikke denne modellen bli ytterligere omtalt her.- I stedet vil vi kort presentere et prosjekt som måler og analyserer bevegelser ved framføring av swingkomp i jazz. Derigjennom vil vi også få et lite innblikk i hvordan sinusbeveglser opptrer som komponenter i bevegelsesanalyse av rytmeframføring (dette er også presentert i Waadeland, 2003b,c).

Utgangspunktet er at vi har gjennomført et eksperiment etter følgende retningslinjer:

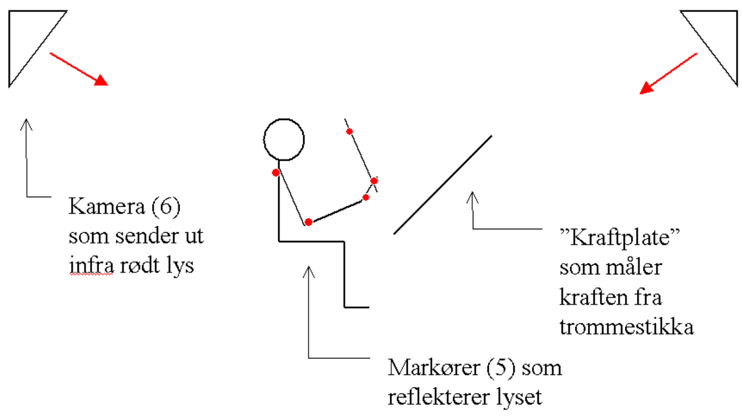
Forsøkspersoner:
Jazztrommeslagere, studenter og lærere ved jazzlinja, Institutt for musikk, NTNU.
Oppgave:
Spill swi*ngrytme* (som i Eksempel 2b beskrevet tidligere), underlagt forskjellige framføringsbetingelser (se nedenfor).
Mål:
Studere mulige relasjoner mellom trommeslagernes bevegelser og følgende framførings-parametre:

- Tempo
- Dynamikk

- ”Swing ratio” (rytmisk underdeling)

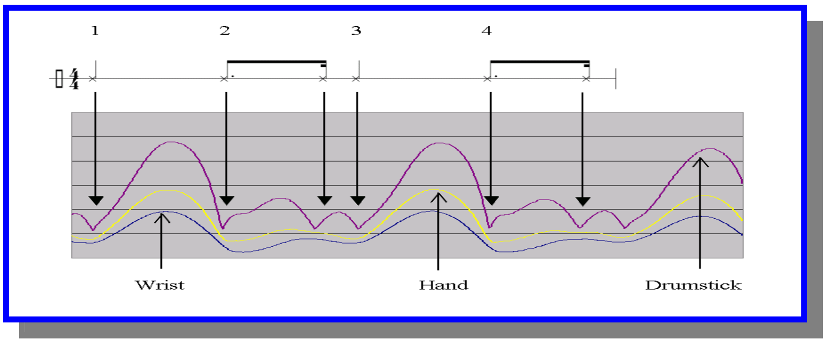
Målemetode:

Målemetoden som ble benyttet er velkjent innefor bevegelsesvitenskap, og målingene ble utført assistert av Geir Oterhals, Seksjon for bevegelsesvitenskap, NTNU. Figuren nedenfor illustrerer hvordan eksperimentet ble gjennomført.



Det infrarøde lyset ble reflektert i markørene (se figuren) og målt (samplet) i et datasystem. Dermed fikk vi en registrering av trommeslagerens bevegelser. Kraftplaten registrerer dynamikk (slagstyrke).

Nedenfor ser vi hvordan måleresultatene kan se ut.- Her vises en grafisk representasjon av en swingframføring, der vertikal bevegelse (høyde vs. tid) av håndledd (wrist), hånd (hand) og trommestikke (drumstick) er inntegnet.

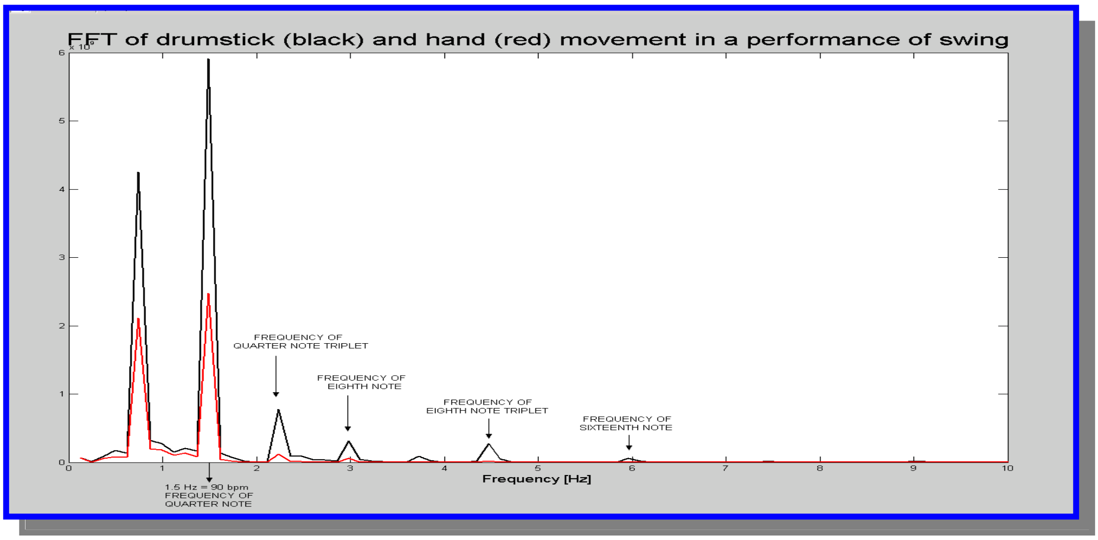


Vi legger merke til at denne figuren viser *periodisk-liknende* bevegelseskurver som antyder en *bevegelseskategori* i denne framføringen av swingrytme. Det synes naturlig at disse bevegelseskategoriene kan være avhengig av så vel den enkelte trommeslager, som de forskjellige framføringsparametrene (tempo, dynamikk, ”swing ratio”).

Målingene av trommeslagernes bevegelser gir en stor mengde data, og ytterligere analyse er nødvendig for å gi pålitelige resultat.- En analysemetode som synes å gi interessant informasjon om relasjoner mellom bevegelseskategorier og rytmisk frasering, er såkalt *spektralanalyse* av swingframføring. Ved denne metoden *dekomponeres* bevegelseskurvene i henhold til Fouriers teori, der resultatet av dekomposisjonen er at vi får fram *frekvensene* og relativ styrke (amplitude) til de forskjellige sinusbevegelser som trommebevegelsene kan ses sammensatt av.- Analysen utføres ved å bruke Matlab til å beregne FFT (Fast Fourier Transform).

Eksempel 5:

Opptellingstempo: grunnpuls = fjerdedelsnote = 90 bpm (beats per minute):



Merk at her er alle frekvenskomponenter heltallsmultipla av *grunnfrekvensen*, 0.75 Hz, som i dette tilfelle svarer til frekvensen av framføring av *halvnoter*. Oversatt til musikalsk terminologi betyr dette at de enkelte sinuskomponenter som trommebevegelsene kan dekomponeres ved, hver for seg svarer til framføringer av de enkelte noteverdiene: halvnote, fjerdedelsnote, fjerdedels triol, åttendelsnote etc.

Hovedfokus i denne lille presentasjonen har vært å se rytmeutøvelse i musikk som uttrykk for en kroppsliggjøring av matematikk.- I studier av trommeslageres bevegelser ved framføring av swingrytme har vi nå oppdaget at sinusfunksjoner kan brukes som byggeklosser i analyse og syntese av swingkomp. Vi vil derfor avslutte med en reformulering av den franske filosof og matematiker, René Descartes' (1596-1650) velkjente utsagn: "Cogito, ergo sum" ("Jeg tenker, altså er jeg"). Vi sier i stedet: ***Sinus, ergo swing!***

Referanser:

Elliott, Ch.A. (1986). Rhythmic Phenomena – Why the Fascination? I Evans & Clynes (Eds.), *Rhythm in Psychological, Linguistic, and Musical Processes* (3-12). Ch.C Thomas- Publ.

Viviani, P. (1990). Common Factors in the Control of Free and Constrained Movements. In M. Jeannerod (Ed.), *Attention and Performance XIII* (345-373). Lawrence Erlbaum Associates, Publ.

Waadeland, C.H. (2000). *Rhythmic Movements and Moveable Rhythms – Syntheses of Expressive Timing by Means of Rhythmic Frequency Modulation.* Dissertation. Trondheim: Department of Musicology, Norwegian University of Science and Technology

Waadeland, C.H. (2001). "It Don't Mean a Thing If It Ain't Got That Swing – Simulating Expressive Timing by Modulated Movements", *Journal of New Music Research,* 30(1), 23-37.

Waadeland, C.H. (2003a). Swingende kurver og matematisk rytmikk. I *Skriftserie for Nasjonalt Senter for Matematikk i Opplæringen*, no.1-2003 (249-255), NTNU.

Waadeland, C.H. (2003b). "Analysis of Jazz Drummers' Movements in Performance of Swing Grooves – A Preliminary Report", In R.Bresin (Ed.) *Proceedings of SMAC 03, Stockholm Music Acoustic Conference 2003*, 573-576.

Waadeland, C.H. (2003c). Analyse av rytmiske forskyvninger ved trommespill. Publiseres i NAS-nytt (Norsk Akustisk Selskap).

Waadeland, C.H. & Saue, S. (1999). Computer Implementation of Rhythmic Frequency Modulation in Music. In J. Tro & M. Larsson (Eds.), *Proceedings 99 Digital Audio Effects Workshop, Trondheim, December 9-11, 1999* (185). Trondheim: Department of Telecommunications, Acoustic Group, Norwegian University of Science and Technology.